Musterlösung zur Übung 6

1. $X_1, \dots X_n$ i.i.d. $\sim$ Uniform$(0,\theta)$, $\quad T_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, $\quad U_n = \frac{n+1}{n}\, T_n$

Vorbereitung:

$$\begin{aligned} P[T_n \le x] &= \Big(\frac{x}{\theta}\Big)^n \cdot 1_{\{x\ge 0\ \wedge\ x\le\theta\}} + 1_{\{x>\theta\}} \\ f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \cdot 1_{\{x\ge 0\ \wedge\ x\le\theta\}} \end{aligned}$$

a) T_n ist MLE:

$$L_{x_1,\dots x_n}(\theta) = \Big(\frac{1}{\theta}\Big)^n \cdot 1_{\{\theta\ge \max_i x_i\}} \stackrel{!}{=} \max \implies \widehat{\theta}_{MLE} = \max(x_1,\dots,x_n)$$

U_n ist erwartungstreu:

$$\mathbf{E}[U_n] = \mathbf{E}[\frac{n+1}{n} T_n] = \frac{n+1}{n} \int_0^\theta x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \theta$$

Nach Korollar 3.1 (Lehmann-Scheffe) ist U_n also UMVU, da er nur von der suffizienten und vollständigen Statistik T_n abhängt.

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[U_n] &= \mathbf{E}[U_n^2] - E[U_n]^2 = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 \mathbf{E}[T_n^2] - \theta^2 \\ &= \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 \cdot \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx - \theta^2 = \frac{1}{n(n+2)}\ \theta^2 \\ \mathrm{Var}[T_n] &= \mathrm{Var}[\frac{n}{n+1}\ U_n] = \frac{n^2}{(n+1)^2} \mathrm{Var}[U_n] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\ \theta^2 \end{aligned}$$

Beide Varianzen gehen also mit n^{-2} gegen 0. Üblicherweise gehen aber die Varianzen von Schätzern höchstens mit n^{-1} gegen 0. (Vgl. Cramer-Rao Ungleichung, deren Voraussetzungen hier allerdings nicht erfüllt sind.)

c)

$$\begin{aligned} P[|T_n - \theta| < \varepsilon] &= \underbrace{P[T_n \le \theta+\varepsilon]}_{1} - P[T_n \le \theta - \varepsilon] = 1 - P[X_1 \le \theta-\varepsilon, \dots, X_n \le \theta-\varepsilon] \\ &= 1 - P[X_i \le \theta-\varepsilon]^n = 1 - \Big(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\Big)^n \stackrel{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{also } T_n \xrightarrow{P} \theta \end{aligned}$$

Konsistenz von U_n analog, oder mittels Slutsky (und zusätzlichem Theorem, dass Konvergenz in Verteilung äquivalent zu Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist, sofern Z_n gegen eine Konstante konvergiert):

$$U_n = \frac{n+1}{n} T_n, \quad \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1, \quad T_n \xrightarrow{P} \theta \quad \stackrel{Slutsky}{\Longrightarrow} \quad U_n \xrightarrow{d} \theta \quad \Longrightarrow \quad U_n \xrightarrow{P} \theta$$

d)

$$\begin{aligned} P[n(\theta - T_n) \le x] &= P[T_n \ge \theta - \frac{x}{n}] = 1 - P[T_n \le \theta - \frac{x}{n}] \\ &= 1 - \Big(1 - \frac{x}{n\theta}\Big)^n \cdot 1_{\{x \ge 0 \,\wedge\, x \le n\theta\}} - 1_{\{x<0\}} \\ &\overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot 1_{\{x\ge 0\}} - 1_{\{x<0\}} \end{aligned}$$

$n(\theta - T_n)$ ist also $\mathrm{Exp}(-\frac{1}{\theta})$-verteilt.

e)

$$\begin{aligned} P[n(\theta - U_n) \le x] &= 1 - P[U_n \le \theta - \frac{x}{n}] = 1 - P[T_n \le \frac{n}{n+1}\theta - \frac{x}{n+1}] \\ &= 1 - \Big(\frac{n}{n+1} - \frac{x}{(n+1)\theta}\Big)^n \cdot 1_{\{x \ge -\theta \,\wedge\, x \le n\theta\}} - 1_{\{x<-\theta\}} \\ &\overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot 1_{\{x\ge -\theta\}} - 1_{\{x<-\theta\}} \end{aligned}$$

Die beiden Schätzer haben also nicht die gleiche asymptotische Verteilung.

2. **a)** Wir haben $\bar{Y} = (\bar{X} - m)/s$. Damit

$$l_n(Y_1, \ldots, Y_n) = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3/s^3}{\big(n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/s^2\big)^{3/2}} = l_n(X_1, \ldots, X_n).$$

b) Der multivariate ZGS kann angewandt werden auf die Zufallsvektoren $Z_i = (Y_i, Y_i^2 - 1, Y_i^3 - \lambda)^T,\ i \in \mathcal{N}$, da offenbar $EY_i^3 = \mu_3/\sigma^3 = \lambda$. Wegen $\mu_6 < \infty$ existiert $V = E[Z_i Z_i^T]$ und $\sqrt{n}\bar{Z}_n \xrightarrow{d} Z$ mit $Z \sim \mathcal{N}_3(0, V)$. Berechnung von V (Bezeichnung $Y = Y_1$):

$$\begin{gathered} V_{11} = EY^2 = 1, \quad V_{12} = E[Y(Y^2-1)] = EY^3 = \lambda, \\ V_{13} = E[Y(Y^3 - \lambda)] = EY^4 = \mu_4/\sigma^4, \quad V_{22} = E[(Y^2-1)^2] = \mu_4/\sigma^4 - 1, \\ V_{23} = E[(Y^2-1)(Y^3-\lambda)] = EY^5 - EY^3 - \lambda EY^2 + \lambda = \mu_5/\sigma^5 - \lambda, \\ V_{33} = E[(Y^3-\lambda)^2] = EY^6 - 2\lambda EY^3 + \lambda^2 = \mu_6/\sigma^6 - \lambda^2. \end{gathered}$$

$\sqrt{n}(\bar{Y}, \bar{Y^2}, \bar{Y^3})$ (Vektoren werden im Folgenden "pragmatisch" als Zeilen oder Spalten dargestellt) ist also asymptotisch verteilt gemäss

$$\mathcal{N}_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu_4/\sigma^4 \\ \lambda & \mu_4/\sigma^4 - 1 & \mu_5/\sigma^5 - \lambda \\ \mu_4/\sigma^4 & \mu_5/\sigma^5 - \lambda & \mu_6/\sigma^6 - \lambda^2 \end{pmatrix}\right).$$

c)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^3 - 3X_i^2\bar{X} + 3X_i(\bar{X})^2 - (\bar{X})^3) = \bar{X^3} - 3\bar{X^2}\bar{X} + 2(\bar{X})^3.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + (\bar{X})^2) = \bar{X^3} - (\bar{X})^2.$$

Daher

$$l_n(X_1, \ldots, X_n) = h(\bar{X}, \bar{X^2}, \bar{X^3}) \text{ mit } h(a,b,c) = \frac{c - 3ab + 2a^3}{(b-a^2)^{3/2}}.$$

Mit den Bezeichnungen von Satz 6.5 genügt es wegen a), $l_n(Y_1,\ldots,Y_n)$ und also $U_n = (\bar{Y}, \bar{Y^2}, \bar{Y^3})$ sowie $u = (0,1,\lambda)$ zu betrachten, wobei offenbar $h(u) = \lambda$. Weiterhin

$$\frac{\partial h}{\partial u}(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{(b-a^2)^{3/2}(6a^2-3b)-3a\sqrt{b-a^2}(c-3ab+2a^3)}{(b-a^2)^3} \\ \frac{-(b-a^2)^{3/2}3a-3\sqrt{b-a^2}(c-3ab+2a^3)/2}{(b-a^2)^3} \\ \frac{1}{(b-a^2)^3} \end{pmatrix},$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial u}(u) = (-3, -3\lambda/2, 1)^T.$$

Damit konvergiert $\sqrt{n}(l_n(X_1,\ldots,X_n)-\lambda) = \sqrt{n}(l_n(Y_1,\ldots,Y_n)-\lambda)$ nach Verteilung gegen $\mathcal{N}(0, v^T V v)$.

d) Für die Normalverteilung gilt wegen Symmetrie $\lambda = \mu_5 = 0$, also

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow v^T V v = 6.$$

e) Zunächst ist für symmetrische ZV $\mu_3 = 0$, und damit auch λ. "Schiefe" bedeutet anschaulich, dass auf der einen Seite von EX mehr Masse liegt, aber dafür näher an EX, auf der anderen weniger, aber dafür weiter gestreut bzw. weit aussen. $(X-EX)^3$ wird stark positiv, wenn die Abweichungen auf positiver Seite verglichen mit der negativen Seite weit weg von EX sind. Dafür muss auf der positiven Seite weniger Masse liegen, denn die weiten positiven Abweichungen von EX müssen durch mehr Masse auf negativer Seite "ausgeglichen" sein (sonst läge EX nicht dazwischen). Teilung durch σ^3 ist notwendig, um die Skaleninvarianz zu erreichen. $|\mu_3|$ alleine kann, falls $\neq 0$, durch Erhöhung von σ^2 hochgetrieben werden, ohne die optische Schiefe der Verteilungsdichte zu ändern.

3. a) Aus der definierenden Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(x_i - t_1) \\ \operatorname{sign}\left(\frac{|x_i-t_1|}{t_2} - \Phi^{-1}(\frac{3}{4})\right) \end{pmatrix} = 0$$

erhält man $\sum \operatorname{sign}(x_i - t_1) = 0 \iff t_1 = \operatorname{median}(x_1,\ldots,x_n)$ und

$$\begin{aligned} &\sum \operatorname{sign}\Big(\frac{|x_i - \operatorname{median}(x_1,\ldots,x_n)|}{t_2} - \Phi^{-1}\big(\frac{3}{4}\big)\Big) = 0 \\ \iff\quad & \#\Big\{x_i \,\Big|\, |x_i - \operatorname{median}(x_1,\ldots,x_n)| > t_2\Phi^{-1}\big(\frac{3}{4}\big)\Big\} \\ & = \#\Big\{x_i \,\Big|\, |x_i - \operatorname{median}(x_1,\ldots,x_n)| < t_2\Phi^{-1}\big(\frac{3}{4}\big)\Big\} \\ \iff\quad & t_2 = \frac{\operatorname{median}(|x_1 - \operatorname{median}(x_1,\ldots,x_n)|,\ldots,|x_n - \operatorname{median}(x_1,\ldots,x_n)|)}{\Phi^{-1}\big(\frac{3}{4}\big)} \\ & = \frac{1}{\Phi^{-1}\big(\frac{3}{4}\big)} \operatorname{MAD}(x_1,\ldots,x_n) \quad \widehat{=}\ \text{konsistenter Schätzer für } \sigma \text{ unter } \mathcal{N}(\mu,\sigma) \end{aligned}$$

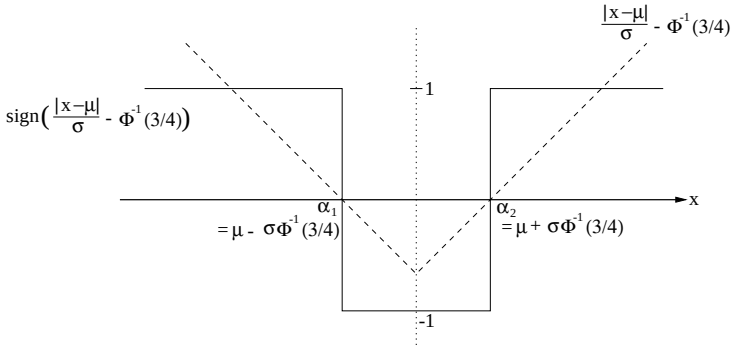
Das ergibt die explizite Form

$$T_n = T_n(X_1,\ldots,X_n) = \begin{pmatrix} \operatorname{median}(X_1,\ldots,X_n) \\ \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{3}{4})} \operatorname{MAD}(X_1,\ldots,X_n) \end{pmatrix}.$$

b) Wir zeigen zuerst, dass die Bedingung in ihrer ersten Komponente erfüllt ist. Es bezeichnen $\varphi_{\mu,\sigma}$ und $\Phi_{\mu,\sigma}$ die Dichte bzw. die Verteilungsfunktion von X_i.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x-\mu)\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\mu} (-1)\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx + \int_{\mu}^{\infty} 1\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$

Für die zweite Komponente betrachten wir folgende Abbildung.



$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\big(\frac{|x-\mu|}{\sigma} - \Phi^{-1}(\frac{3}{4})\big)\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&\quad= \int_{-\infty}^{\alpha_1} 1\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-1)\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\infty} 1\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&\quad= \Phi_{\mu,\sigma}(\alpha_1) - (\Phi_{\mu,\sigma}(\alpha_2) - \Phi_{\mu,\sigma}(\alpha_1)) + (1 - \Phi_{\mu,\sigma}(\alpha_2)) \\
&\quad= \Phi\big(-\Phi^{-1}(\frac{3}{4})\big) - \big(\Phi\big(\Phi^{-1}(\frac{3}{4})\big) - \Phi\big(-\Phi^{-1}(\frac{3}{4})\big)\big) + \big(1 - \Phi\big(\Phi^{-1}(\frac{3}{4})\big)\big) \\
&\quad= \frac{1}{4} - \big(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\big) + \big(1 - \frac{3}{4}\big) = 0
\end{aligned}$$

Die Berechnung der Einflussfunktion $IF(X_i,\theta) = -M(\theta)^{-1}\psi(X_i, g(\theta))$ geht vorteilhaft über die Gleichung (6.13)

$$M(\theta) = -\int \psi(x,\theta)(\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_\theta(x))^T.$$

Setze $q = \Phi^{-1}(\frac{3}{4})$ und beachte

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x),\ \varphi''(x) = (x^2-1)\varphi(x),\ \tfrac{\partial}{\partial\mu}\varphi_{\mu,\sigma}(x) = -\varphi'_{\mu,\sigma}(x),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial\sigma}\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \left(\tfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \tfrac{1}{\sigma}\right)\varphi_{\mu,\sigma}(x).$$

Damit

$$\begin{aligned}
M(\theta)_{11} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x-\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\varphi_{\mu,\sigma}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x-\mu)\varphi'_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(y)\varphi'_{0,\sigma}(y)\,dy \\
&= -2\int_{-\infty}^{0} \varphi'_{0,\sigma}(y)\,dy = -2\varphi_{0,\sigma}(0) = -\frac{2}{\sigma}\varphi(0).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M(\theta)_{12} &= 0\,, \\
M(\theta)_{21} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} - q\right) \frac{\partial}{\partial\mu}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} - q\right) \varphi'_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(|y|-q)\frac{1}{\sigma}\varphi'(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma}\left(\int_{-\infty}^{-q} \varphi'(y)\,dy + \int_{-q}^{q} \varphi'(y)\,dy + \int_{q}^{\infty} \varphi'(y)\,dy\right) \\
&= \frac{1}{\sigma}(\varphi(-q) - \varphi(-q) + \varphi(q) - \varphi(q)) = 0. \\
M(\theta)_{22} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} - q\right) \frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} - q\right) \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right) \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(|y|-q)\frac{y^2-1}{\sigma^2}\varphi(y)\,dy \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^{-q} (y^2-1)\varphi(y)\,dy - \int_{-q}^{q} (y^2-1)\varphi(y)\,dy + \int_{q}^{\infty} (y^2-1)\varphi(y)\,dy\right) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}(2\varphi'(-q) - 2\varphi'(q)) = -\frac{4q}{\sigma^2}\varphi(q).
\end{aligned}
$$

Die Einflussfunktion ist

$$
\begin{aligned}
IF(X_i,\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2\varphi(0)} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{4q\varphi(q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(X_i-\mu) \\ \operatorname{sign}\big(\frac{|X_i-\mu|}{\sigma} - q\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2\varphi(0)}\operatorname{sign}(X_i-\mu) \\ \frac{\sigma^2}{4q\varphi(q)}\operatorname{sign}\big(\frac{|X_i-\mu|}{\sigma} - q\big) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Es bleibt noch die asymptotische Kovarianzmatrix $V(\theta) = \mathbf{E}_\theta[IF(X_i,\theta)IF(X_i,\theta)^T]$ zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
V(\theta)_{11} &= \frac{\sigma^2}{4\varphi(0)^2}\,\mathbf{E}_\theta[\operatorname{sign}^2(X_i-\mu)] = \frac{\sigma^2}{4\varphi(0)^2} \\
V(\theta)_{12} &= V(\theta)_{21} = \frac{\sigma^3}{8q\varphi(0)\varphi(q)}\,\mathbf{E}_\theta\left[\operatorname{sign}(X_i-\mu)\operatorname{sign}\big(\frac{|X_i-\mu|}{\sigma} - q\big)\right] \\
&= \frac{\sigma^3}{8q\varphi(0)\varphi(q)}\Big(\underbrace{-\int_{-\infty}^{\alpha_1} + \underbrace{\int_{\alpha_1}^{\mu} - \int_{\mu}^{\alpha_2}}_{=0} + \int_{\alpha_2}^{\infty}}_{=0}\Big)\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx = 0 \\
&\qquad \text{(siehe Abbildung vorne)} \\
V(\theta)_{22} &= \frac{\sigma^4}{16q^2\varphi(q)^2}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten (endlich ...)

$$V(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{4\varphi(0)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^4}{16(\Phi^{-1}(\frac{3}{4})\varphi(\Phi^{-1}(\frac{3}{4})))^2} \end{pmatrix}.$$

c) Der Median hat offensichtlich Bruchpunkt $\frac{1}{2}$: Wenn weniger als die Hälfte der Beobachtungen gegen $\pm\infty$ geht, dann gibt es mindestens je einen endlichen Wert, der grösser und einen der kleiner ist als der Median, also ist der Median $< \infty$. Geht aber die Hälfte der Punkte gegen $+\infty$, dann geht auch der Median gegen $+\infty$.
Dieselbe Überlegung gilt für den MAD. (Zusätzlich gilt es noch zu berücksichtigen, dass man bei einem Skalenschätzer auch von einem Zusammenbruch des Schätzers spricht, wenn er 0 wird.)

d) Der Interquartile-Range Schätzer bricht offensichtlich zusammen, sobald eines der beiden Quartile gegen $\pm\infty$ geht. Dazu müssen genau ein Viertel der Beobachtugen gegen $-\infty$ gehen (resp. gegen $+\infty$).