Übung 2

1. Seien X und Y unabhängig mit $X \sim \mathcal{N}(\nu, 1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\eta, 1)$. Der Parameter von Interesse sei $\theta = \nu/\eta$.

a) Zeige, dass

$$\phi(X, Y, \theta_0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |X - \theta_0 Y| \le c_\alpha \sqrt{1+\theta_0^2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit einem geeigneten c_α ein Test ist zum Niveau α für $H_0 : \theta = \theta_0$. Wie muss man c_α wählen?

b) Bilde mit dem Dualitätslemma einen Konfidenzbereich $I(X, Y)$ für θ zum Niveau $1-\alpha$. Ist $I(X, Y)$ immer ein endliches Intervall? Falls nicht, welche anderen Fälle sind möglich?
Hinweis: Zeichne die Funktion $f(\theta) = (X - \theta Y)^2/(1+\theta^2)$. Suche Extrema und bestimme das Verhalten der Funktion für $\theta \to \pm\infty$.

2. Bei wiederholten Messungen einer Konstanten kann es geschehen, dass aufeinanderfolgende Beobachtungen abhängig sind. Wir untersuchen die Auswirkungen der Abhängigkeit in folgendem Modell

$$X_i = \mu + \epsilon_i$$

$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ normalverteilt, $E[\epsilon_i] = 0$, $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = \sigma^2 \rho^{|i-j|}$ mit $|\rho| < 1$.

a) Wir schätzen μ durch das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Welche Verteilung hat $\bar{X}_n$ in obigem Modell?

b) Im Untermodell, wo $\sigma^2 = 1$, $\rho = 0$ und μ unbekannt, ist $I_n = [\bar{X}_n \pm 1.96/\sqrt{n}]$ ein 95%-Konfidenzintervall für μ. Berechne die asymptotische Überdeckungswahrscheinlichkeit von I_n im grösseren Modell, wo $\sigma^2 = 1$ bekannt und ρ und μ unbekannt sind, d. h. berechne

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mu,\rho}[I_n \ni \mu]\,.$$

Was passiert für $\rho \to \pm 1$? Kann man also die Abhängigkeit vernachlässigen oder nicht?

3. In den folgenden zwei Unteraufgaben wird der Einfluss von Ausreissern auf den t-Test und auf eine davon abgeleitete Verwerfungsregel untersucht.

a) Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Realisierung von unabhängigen $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen (μ,σ^2 beliebig). Wogegen konvergiert die Teststatistik T des Ein-Stichproben t-Tests von $H_0 : \mu = 0$ gegen $H_A : \mu \neq 0$, wenn x_1 durch y mit $y \to \infty$ ersetzt wird? Wie entscheidet der zugehörige t-Test auf dem 5%-Niveau?

b) Eine Möglichkeit, einen Lokationsparameter zu schätzen, besteht darin, zuerst die Ausreisser wegzulassen und dann das arithmetische Mittel der verbleibenden Werte als Schätzer zu verwenden.
Eine Variante einer populären Verwerfungsregel verwirft alle Beobachtungen x_i mit $|x_i - \overline{x}|/s > 3$.
Zeige, dass der Bruchpunkt des Schätzers $\leq 10\%$ ist, d.h. dass bereits 10% grobe Fehler unter den Daten $x_1, \ldots, x_n$ zum Versagen der Verwerfungsregel und somit zum Zusammenbruch des Schätzers führen können. (Ein Versagen der Verwerfungsregel bedeutet, dass ein Ausreisser nicht als solcher erkannt wird.)
Hinweis: Berechne für den Fall, dass die k Beobachtungen $x_1, \ldots, x_k$ durch y ersetzt werden (also für die neue Stichprobe $z = (y, \ldots, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)$) den Grenzwert $\lim_{y \to \infty}(y - \overline{z})/s_z$.

Abgabe: Montag, 26. November