Übung 3

1. Eine Erdölgesellschaft besitzt die Ausbeutungsrechte an einem bestimmten Ort, an dem sich entweder Öl befindet (θ_1) oder nicht (θ_2). Sie hat drei Aktions-Möglichkeiten: a_1: Selbst bohren, a_2: Rechte mit anderer Gesellschaft teilen, a_3: Rechte verkaufen.

Die Verluste sind dabei wie folgt:

$L(\theta, a)$	a_1	a_2	a_3
θ_1	0	4	7
θ_2	12	8	1

Sei X das Ergebnis einer seismischen Untersuchung codiert auf 0 und 1. Man kennt die Verteilungen für X, wenn Öl vorliegt und wenn nicht:

$P_\theta(X)$	$X = 0$	$X = 1$
θ_1	0.3	0.7
θ_2	0.6	0.4

a) Berechne und zeichne die Risikopunkte $(R(\theta_1, d), R(\theta_2, d))$ für alle möglichen Verfahren d.

b) Welches ist das Minimax-Verfahren unter allen Verfahren?

c) Gib alle zulässigen Verfahren an.

d) Berechne die a-posteriori Verteilung von θ gegeben $X = 1$ für die a-priori-Verteilung $\alpha(\theta_1) = 0.6$ und $\alpha(\theta_2) = 0.4$. Bestimme daraus, wie das Bayesverfahren entscheidet für $X = 1$.

2. $X_1, \dots, X_n$ seien i.i.d. $\mathcal{N}(\theta, 1)$-verteilt. Als a-priori-Verteilung für θ wählen wir die Normalverteilung $\mathcal{N}(\xi, \tau^2)$. Berechne

a) die bedingte Verteilung von θ gegeben $(X_1, \dots, X_n)$.
Hinweis: Quadratisch ergänzen beim Zähler der Bayes'schen Formel,

b) den Bayes-Schätzer für θ bei quadratischem Verlust.

c) Betrachte den Fall, wo $n = \tau^2 = 1$ und $|X_1 - \xi|$ wesentlich grösser als 1. Was bedeutet diese letzte Bedingung? Skizziere in derselben Figur die a-priori-, die Likelihood- und die a-posteriori-Dichte. Ist das intuitiv einleuchtend?

3. Seien $\theta_1, \dots, \theta_k$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\xi, \tau^2)$. Gegeben $\theta_1, \dots \theta_k$ seien ferner $X_1, \dots, X_k$ unabhängig, $X_j \sim \mathcal{N}(\theta_j, 1)$. Als Beispiel kann man sich folgende Situation vorstellen:

$$\begin{aligned} \theta_j &= \text{wahrer Blutdruck der } j\text{-ten Person} \\ X_j &= \text{gemessener Blutdruck der } j\text{-ten Person} \end{aligned}$$

a) Berechne die (Rand-) Verteilung Q_{ξ,τ^2} von X_j.
Hinweis: Überlege, dass obiges Modell einfach bedeutet $X_j = \theta_j + \varepsilon_j$ mit $\theta_1, \dots, \theta_k \sim \mathcal{N}(\xi, \tau^2)$, $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und alle $\theta_1, \dots, \theta_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ unabhängig.

b) Schätze ξ, τ^2 mit dem MLE bezüglich Q_{ξ,τ^2} und gib den empirischen Bayesschätzer für θ_j an.

Abgabe: Montag, 10. Dezember