# Übung 5

**1.** Betrachte das 2-Stichproben-Modell

$$\begin{aligned} U_i &= \mu + \epsilon_i\,, \quad i = 1, \ldots, n \\ V_j &= \nu + \eta_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \end{aligned}$$

wobei die gemeinsame Verteilung von $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ als bekannt vorausgesetzt wird. Der unbekannte Parameter ist also $\theta = (\mu, \nu)$, und wir interessieren uns für $g(\theta) = \mu - \nu$. Der Verlust sei $L(\theta, a) = L(a - g(\theta)) = (a - g(\theta))^2$.

**a)** Definiere Äquivarianz für einen Schätzer $T = T(U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m)$ von $g(\theta)$.

**b)** Zeige, dass äquivariante Schätzer konstantes Risiko haben.

**c)** Bestimme die allgemeine Form eines äquivarianten Schätzers.

**d)** Zeige: Falls $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ die besten äquivarianten Schätzer von $\mu$ und $\nu$ sind und falls $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ und $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ unabhängig sind, dann ist $T = \hat{\mu} - \hat{\nu}$ UMRE für $g(\theta)$.

**2.** Beispiel eines unzulässigen Minimax-Schätzers

Sei $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ mit $\theta \in [0, \infty)$ (wenn z.B. von der Anlage des Experimentes klar ist, dass der wahre Wert positiv ist, die gemessenen Werte aber auch negativ sein können). Als Verlust wählen wir wie üblich $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$.

**a)** Zeige, dass $T = X$ minimax ist.
*Hinweis*: Nimm an, dass ein $T'$ existiert mit $\sup_{\theta \geq 0} R(\theta, T') = \sup_{\theta \geq 0} R(\theta, T) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Setze $b(\theta) = E_\theta[T'] - \theta$ und leite aus der Cramér-Rao-Ungleichung eine Ungleichung für $b$ und $\frac{d}{d\theta} b$ ab. Zeige, dass diese Ungleichung keine Lösung hat.

**b)** Zeige, dass $T = X$ unzulässig ist.
*Hinweis*: Überlege, wie man $T$ modifizieren kann unter Ausnützung von $\theta \geq 0$, sodass der Schätzer überall kleineres Risiko hat.

**3.** Spieltheorie und Statistik

In der Spieltheorie hat man häufig 2 Spieler und die Mengen $\mathcal{D}_i$ der möglichen Strategien des Spielers $i$. Wenn Spieler 1 Strategie $\alpha \in \mathcal{D}_1$ wählt und Spieler 2 Strategie $d \in \mathcal{D}_2$, dann bezahlt Spieler 2 an Spieler 1 den Betrag $R(\alpha, d)$. Diese Spiele werden "Zwei-Spieler-Nullsummenspiele" genannt.

Ein statistisches Entscheidungsproblem kann man (aus Bayesianischer Sicht) als Spiel Natur gegen Statistiker auffassen. Die Natur wählt einen Parameter $\theta$ gemäss Verteilung $\alpha$ und der Statistiker ein Verfahren $d$. Der Statistiker erleidet dann den mittleren Verlust $R(\alpha, d) = \int \int L(\theta, T(x))\, P_\theta(dx)\, \alpha(d\theta)$, also das Bayesrisiko.

**a)** Zeige, dass stets gilt

$$\inf_{d\in\mathcal{D}_2}\sup_{\alpha\in\mathcal{D}_1} R(\alpha,d) \geq \sup_{\alpha\in\mathcal{D}_1}\inf_{d\in\mathcal{D}_2} R(\alpha,d)\,.$$

**b)** $(\alpha^*, d^*)$ heisst ein *Sattelpunkt*, falls $R(\alpha,d^*) \leq R(\alpha^*,d^*) \leq R(\alpha^*,d)\ \forall \alpha, d$.
Zeige: Wenn ein Sattelpunkt $(\alpha^*, d^*)$ existiert, dann gilt

$$\inf_{d\in\mathcal{D}_2}\sup_{\alpha\in\mathcal{D}_1} R(\alpha,d) = \sup_{\alpha\in\mathcal{D}_1}\inf_{d\in\mathcal{D}_2} R(\alpha,d) = R(\alpha^*,d^*)\,.$$

Interpretation: Ein Sattelpunkt ist eine Situation, in der jeder der beiden Spieler sich automatisch verschlechtert, wenn er von seiner Strategie abweicht, sofern der Gegner seiner Strategie treu bleibt.

**c)** Betrachte speziell ein Schätzproblem: Sei $T^*$ Bayes zur a priori Verteilung $\alpha^*$ und $R(\theta, T^*)$ konstant. Zeige, dass dann $(\alpha^*, T^*)$ ein Sattelpunkt ist. $\alpha^*$ heisst auch ungünstigste a priori Verteilung. Begründe diese Bezeichnung.

Anschauungshalber wollen wir die Spieltheorie auf das 2-Finger-Morra Spiel anwenden: Sara und Nina spielen gegeneinander. Auf "Jetzt!" müssen beide einen oder zwei Finger zeigen. Zeigen beide die gleiche Anzahl Finger, so erhält Sara von Nina die totale Anzahl gezeigter Finger in Franken (also 2 oder 4), sonst erhält Nina von Sara 3 Franken.

d) Bestimme die Auszahlungsmatrix und zeige, dass es (für feste Strategien) keinen Sattelpunkt gibt (d.h. in Teilaufgabe a) gilt $>$).

e) Wir wollen nun auch randomisierte Strategien zulassen: beide Spielerinnen entscheiden zufällig, ob sie einen oder zwei Finger zeigen, und zwar mit Wahrscheinlichkeiten $p_N$ und $1 - p_N$ resp. $p_S$ und $1 - p_S$. Zeige:

1. Es existiert für beide Spielerinnen je eine Strategie so, dass das Risiko konstant ist bei allen Strategien der Gegnerin.
2. Dieses Strategienpaar definiert einen Sattelpunkt.

f) An wessen Stelle würdest Du spielen, wenn Du wählen dürftest?

**Präsenz:** Montags 12-13 in LEO C 12.1 oder nach Vereinbarung Christian Hennig, `hennig@stat.math.ethz.ch`, Tel. 632 61 84.

**Abgabe:** Montag, 21. Januar 2002