Übung 6

1. Seien $X_1, \dots X_n$ i.i.d. $\sim$ Uniform$(0, \theta)$. Wir betrachten die beiden Schätzfolgen $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ und $U_n = \frac{n+1}{n} T_n$.

a) Zeige, dass T_n der MLE und U_n der UMVU ist. (Benutze für den Nachweis von UMVU, dass T_n vollständig und suffizient ist.)

b) Berechne $\mathrm{Var}(T_n)$ und $\mathrm{Var}(U_n)$. Wie rasch konvergieren diese gegen Null für $n \to \infty$?

c) Zeige, dass T_n und U_n konsistent sind für θ.

d) Zeige, dass $n(\theta - T_n) \xrightarrow{d} Z$, wobei Z exponential$(\frac{1}{\theta})$-verteilt ist.

e) Hat $n(\theta - U_n)$ die gleiche asymptotische Verteilung?

2. Die Schiefe der Verteilung einer reellwertigen ZV X ist definiert als $\lambda = \mu_3/\sigma^3$, wobei $\mu_i = E(X - EX)^i$ das i-te zentrale Moment der Verteilung bezeichnet und $\sigma^2 = \mu_2$. Mit $X_i,\ i = 1, \dots, n$ i.i.d. lässt sich die Schiefe der Verteilung P von X_1 schätzen durch

$$l_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^{3/2}}.$$

Vorausgesetzt sei $\mu_6 < \infty,\ \sigma^2 > 0$.

a) Zeige, dass l_n lokations- und skaleninvariant ist, d.h.

$$l_n(Y_1, \dots, Y_n) = l_n(X_1, \dots, X_n) \text{ für } Y_i = (X_i - m)/s,\ m \in \mathbb{R}, s > 0.$$

b) Sei $Y_i = (X_i - EX_1)/\sigma$, d.h. $EY_i = 0,\ EY_i^2 = 1\ \forall i$. Berechne die asymptotische Verteilung von $(\bar{Y}, \bar{Y^2}, \bar{Y^3})^T$.

c) Stelle l_n als $h(\bar{X}, \bar{X^2}, \bar{X^3})$ dar und berechne die asymptotische Verteilung von l_n mit der Delta-Technik.
Hinweis: Verwende a) und b).

d) Gib konkret die asymptotische Varianz von l_n an, wenn P eine Normalverteilung ist.
Hinweis: Verwende $\mu_4/\sigma^4 = 3,\ \mu_6/\sigma^6 = 15$.
Wegen a) ist die asymptotische Verteilung unabhängig von den Parametern. Das Ergebnis kann verwendet werden, um einen Test auf Vorliegen einer Normalverteilung zu konstruieren.

e) Begründe heuristisch, warum λ die "Schiefe" einer Verteilung misst.

3. Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir schätzen die beiden Parameter μ und σ mit dem 2-dimensionalen M-Schätzer T_n, der gegeben ist durch $\psi_1(x, \mathbf{t}) = \operatorname{sign}(x - t_1)$ und $\psi_2(x, \mathbf{t}) = \operatorname{sign}(\frac{|x-t_1|}{t_2} - \Phi^{-1}(\frac{3}{4}))$. ($\Phi$ ist die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und sign die Vorzeichenfunktion, d. h. $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $\operatorname{sign}(0) = 0$.)

a) Berechne T_n explizit.

b) Zeige, dass die wesentliche Bedingung für Konsistenz (von T_n für μ und σ) gilt, nämlich $\int \psi(x, g(\theta)) P_\theta(dx) = 0$ für $\theta = (\mu, \sigma)$ und $g(\theta) = \theta$. Berechne formal die Einflussfunktion und die asymptotische Kovarianzmatrix.

c) Begründe heuristisch, dass Lokations- und Skalenschätzer Bruchpunkt $\frac{1}{2}$ haben.

d) Begründe heuristisch, dass die Skalenschätzung mittels Interquartile Range ($IQR_n = X_{(\frac{3}{4}n)} - X_{(\frac{1}{4}n)} \mathrel{\widehat{=}}$ 3. Quartil - 1. Quartil) Bruchpunkt $\frac{1}{4}$ hat.

Abgabe: Dienstag, 28. Januar 2002