Matrizen und Vektoren

Definition

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Die Dimension von A ist dim A $= n \times m$ (Anzahl Zeilen $\times$ Anzahl Spalten)
a_{ij} : Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $\mathbf{A}$

Transponierte Matrix von $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Spezialfälle:

Eine Matrix der Dimension 1×1 ist eine Zahl (Skalar). Eine quadratische Matrix hat gleichviele Spalten wie Zeilen.
Eine Matrix, die nur aus einer Spalte besteht, ist ein Vektor.
Wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A^t}$, so heisst $\mathbf{A}$ symmetrisch.
Eine Diagonalmatrix ist symmetrisch und alle Elemente ausserhalb der Diagonalen sind 0.
Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist diagonal mit lauter Einsen in der Diagonale.

Rechnen mit Matrizen

Addition und Subtraktion von zwei Matrizen und die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar geschieht elementweise.

Multiplikation zweier Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3} \\ 4 \quad 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$$

Einfaches lineares Regressionsmodell $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Lineare Unabhängigkeit und inverse Matrizen

Eine Menge von Vektoren heisst **linear unabhängig**, wenn keine der Spalten als Linearkombination der übrigen geschrieben werden kann.

Das **Inverse $\mathbf{A^{-1}}$** einer Matrix $\mathbf{A}$ ist :

$$\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{I}$$

Nicht jede Matrix ist invertierbar.
Ein Inverses existiert genau dann, wenn alle Spalten, resp. Zeilen linear unabhängig sind.

Zufallsvektoren und Kovarianzmatrizen

Ein Zufallsvektor ist ein Vektor aus Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

Erwartungswert

$$E(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix

$$Cov(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} VarY_1 & Cov(Y_1, Y_2) & Cov(Y_1, Y_3) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ Cov(Y_1, Y_2) & VarY_2 & Cov(Y_2, Y_3) & \cdots & Cov(Y_2, Y_n) \\ Cov(Y_1, Y_3) & Cov(Y_2, Y_3) & Var(Y_3) & \cdots & Cov(Y_3, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(Y_1, Y_n) & Cov(Y_2, Y_n) & Cov(Y_3, Y_n) & \cdots & VarY_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}) &= \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot E(\mathbf{Y}) \\ Cov(\mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}) &= \mathbf{B} \cdot Cov(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{B}^t \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Verteilungen

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsvektors ist die gemeinsame Verteilung der einzelnen Zufallsvariablen.
Bsp: Eine bivariate Normalverteilung hat fünf Parameter: $\mu_x, \sigma_x^2, \mu_y, \sigma_y^2, \rho_{xy}$
Notation:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Z} \sim N(\boldsymbol{\mu}, Cov(\mathbf{Z}))$$

mit

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Cov(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$