Blutdruckstudie: Biofeedback

Biofeedback + Medikament	Biofeedback	Medikament	Kontrolle
158	188	186	185
163	183	191	190
173	198	196	195
178	178	181	200
168	193	176	180

Treatmentmittel:

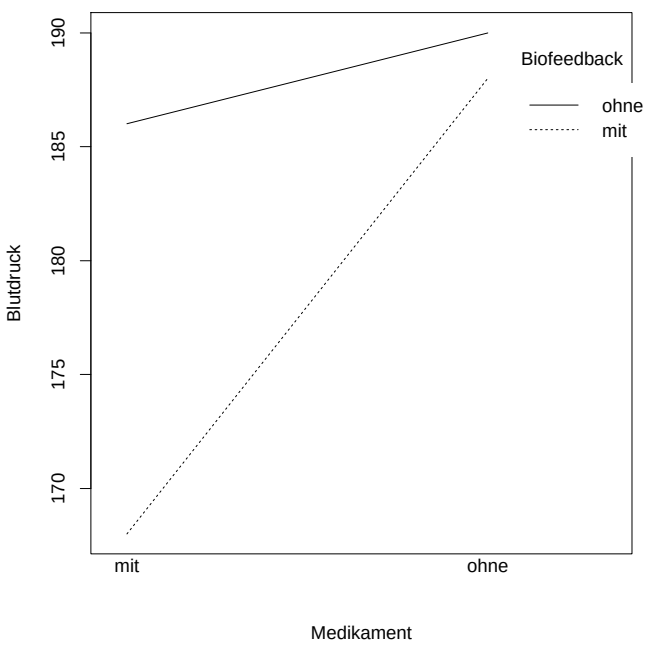
	Medikament		
	nein	ja	
Biofeedback			Total
nein	190	186	188
ja	188	168	178
Total	189	177	183

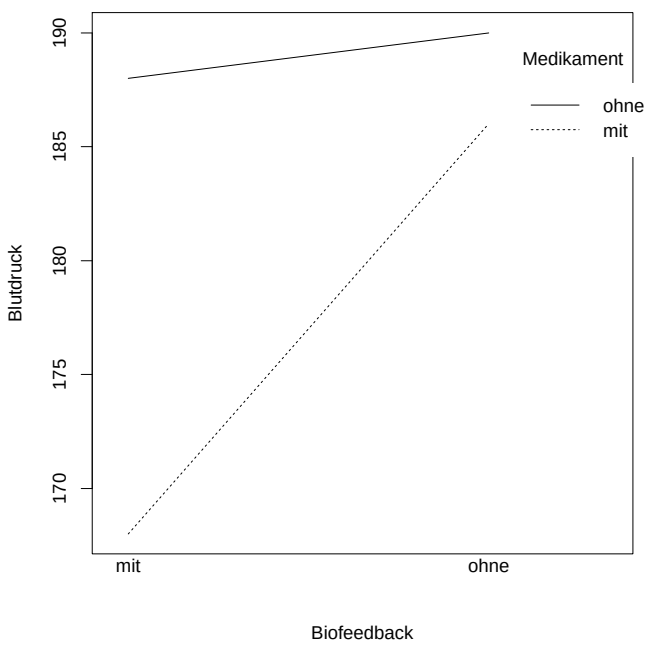
Haupteffekt von Biofeedback:
$188 - 178 = 10$ mmHg

Effekt von Biofeedback mit Medi: 18 mmHg
$\neq$
Effekt von Biofeeback ohne Medi: 2 mmHg

$\longrightarrow$ **Interaktion, Wechselwirkung**

Interaktionsplot





Modell für zwei Faktoren

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

$$i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J; k = 1, \ldots, n.$$

Nebenbedingungen: $\sum A_i = 0$, $\sum B_j = 0$,

$$\sum_i (AB)_{ij} = 0, \sum_j (AB)_{ij} = 0.$$

A_i : mittlere Abweichung der Beob. mit Faktor A auf Level i vom Gesamtmittel.

B_j : analog

$\mu + A_i + B_j$: Gesamtmittel + mittlere Wirkung von A auf Level i + mittlere Wirkung von B auf Level j.

$(AB)_{ij}$: Abweichung vom additiven Modell

Schätzungen:

$\hat{\mu} = y_{...}$, $\hat{A}_i = y_{i..} - y_{...}$ und $\hat{B}_j = y_{.j.} - y_{...}$

$\widehat{AB}_{ij} = y_{ij.} - (\hat{\mu} + \hat{A}_i + \hat{B}_j) = y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...}$

Biofeedback B	Medikament A nein	ja	Total
nein	190	186	$y_{.1.} = 188$
ja	188	168	$y_{.2.} = 178$
Total	$y_{1..} = 189$	$y_{2..} = 177$	$y_{...} = 183$

$\hat{\mu} = 183$, $\hat{A}_1 = -\hat{A}_2 = 6$, $\hat{B}_1 = -\hat{B}_2 = 5$

Das rein additive Modell ergibt also folgende Prognosen $(\hat{\mu} + \hat{A}_i + \hat{B}_j)$ für die vier verschiedenen Treatments:

Biofeedback	Medikament nein	ja
nein	194	182
ja	184	172

$\widehat{AB}_{11} = \widehat{AB}_{22} = -\widehat{AB}_{12} = -\widehat{AB}_{21} = -4.$

Zerlegung der Gesamtvariabilität:

$$SS_{tot} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{res}$$

$$\begin{aligned}
SS_{tot} &= \sum\sum\sum (y_{ijk} - y_{...})^2 \\
SS_A &= \sum\sum\sum (y_{i..} - y_{...})^2 \\
SS_B &= \sum\sum\sum (y_{.j.} - y_{...})^2 \\
SS_{AB} &= \sum\sum\sum (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2 \\
SS_{res} &= \text{≪Differenz≫}
\end{aligned}$$

Freiheitsgrade:

Haupteffekt mit I Levels: $I - 1$ df,
Interaktion zwischen zwei Faktoren mit I und J Levels: $(I - 1)(J - 1)$ df.

Anova-Tabelle:

Source	SS	df	MS	F	P-Wert
Medi	720	1	720	11.52	0.004
Bio	500	1	500	8.00	0.012
Medi:Bio	320	1	320	5.12	0.038
Residual	1000	16	62.5		
Total	2540	19			

Schätzungen:

	Effektgrösse	V.I.
Medi ohne Bio:	$y_{21.} - y_{11.} = 186 - 190 = -4$	$(-14, 6)$
Medi mit Bio:	$y_{22.} - y_{12.} = 168 - 188 = -20$	$(-30, -10)$
Bio ohne Medi:	$y_{12.} - y_{11.} = 188 - 190 = -2$	$(-12, 8)$
Bio mit Medi:	$y_{22.} - y_{21.} = 168 - 186 = -18$	$(-28, -8)$

(Standardfehler: $\sqrt{2MS_{res}/5} = 5$)

Vorteile von Factorials

Factorial

Biofeedback	Medikament nein	ja
nein	6	6
ja	6	6

Zwei Einzelstudien

Medikament nein	ja
6	6

und

Biofeedback nein	ja
6	6

oder:

Kontrollen	Medi	Bio
8	8	8

	Bio + Medi	Bio	Medi	Kontrolle
ohne Diät	158	188	186	185
	163	183	191	190
	173	198	196	195
	178	178	181	200
	168	193	176	180
mit Diät	162	162	164	205
	158	184	190	199
	153	183	169	171
	182	156	165	161
	190	180	177	179

Zusammengefasst:

Treatmentmittel ohne Diät(C)

Bio (B)	Medikament (A) nein	ja	Total
nein	190	186	188
ja	188	168	178
Total	189	177	183

Treatmentmittel mit Diät (C)

Bio (B)	Medikament (A) nein	ja	Total
nein	183	173	178
ja	173	169	171
Total	178	171	174.5

Haupteffekte:

Medikament (A): $183.5 - 174 = 9.5$
Biofeedback (B): $183 - 174.5 = 8.5$
Diät(C): $183 - 174.5 = 8.5$

2-fache Interaktionen AB, AC, BC:

Bio (B)	Medi (A) nein	ja	Total
nein	186.5	179.5	183
ja	180.5	168.5	174.5
Total	183.5	174	178.75

Bio: mit Medi − ohne Medi: $180.5 - 168.5 = 12$

ohne Bio: mit Medi –ohne Medi:$186.5 - 179.5 = 7$

3-fache Interaktion ABC

Modell und Anova-Tabelle

$$y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + (AB)_{ij} + (AC)_{ik} + (BC)_{jk} + (ABC)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$

mit $\sum A_i = 0, \ldots,$
$\sum_k (ABC)_{ijk} = \sum_j (ABC)_{ijk} = \sum_i (ABC)_{ijk} = 0$

Source	df	MS=SS/df	F
A	$I-1$		MS_A/MS_{res}
B	$J-1$		MS_B/MS_{res}
C	$K-1$		MS_C/MS_{res}
AB	$(I-1)(J-1)$		MS_{AB}/MS_{res}
AC	$(I-1)(K-1)$		MS_{AC}/MS_{res}
BC	$(J-1)(K-1)$		MS_{BC}/MS_{res}
ABC	$(I-1)(J-1)(K-1)$		MS_{ABC}/MS_{res}
Residual	«Differenz»	$MS_{res} = \hat{\sigma}^2$	
Total	$IJKn-1$		

Source	SS	df	MS	F	P-Wert
medi	902.5	1	902.5	6.33	0.017
bio	722.5	1	722.5	5.06	0.031
diät	722.5	1	722.5	5.06	0.031
medi:bio	62.5	1	62.5	0.44	0.51
medi:diät	62.5	1	62.5	0.44	0.51
bio:diät	22.5	1	22.5	0.16	0.69
medi:bio:diät	302.5	1	302.5	2.12	0.15
Residual	4566.0	32	142.7		
Total	7363.5	39			

Unbalancierte Factorials

unkorrelierte Schätzungen:

$$SS_{tot} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + \underbrace{SS_{res}}_{SS_C + \ldots + SS_{res'}}$$

korrelierte Schätzungen:

$$SS_{tot} = SS'_A + SS'_B + SS'_{AB} + SS_C + \ldots + SS_{res'}$$

SS Typ I: SS_A ignoriert alle anderen SS

SS Typ II: SS_A berücksichtigt alle anderen Haupteffekte, ignoriert alle Interaktionen

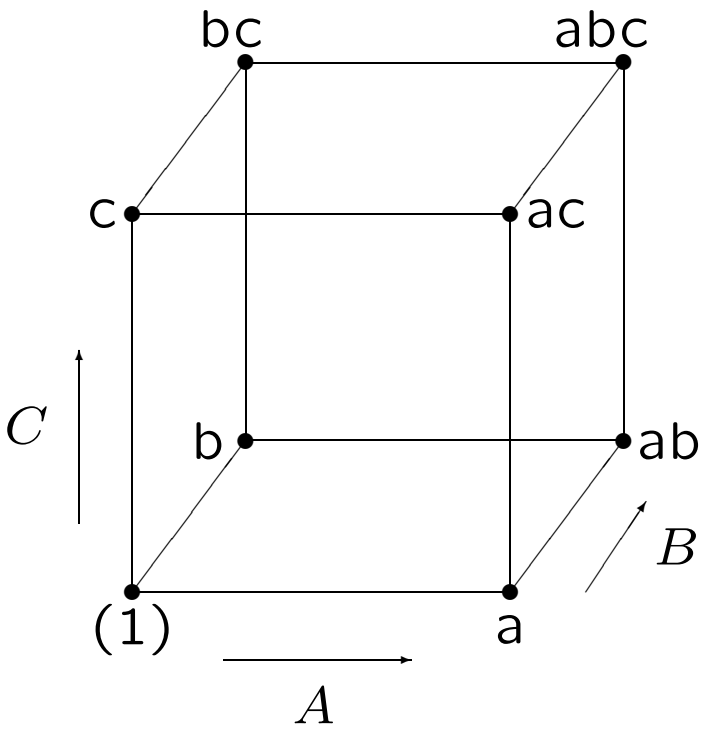
SS Typ III: SS_A berücksichtigt alle anderen Effekte

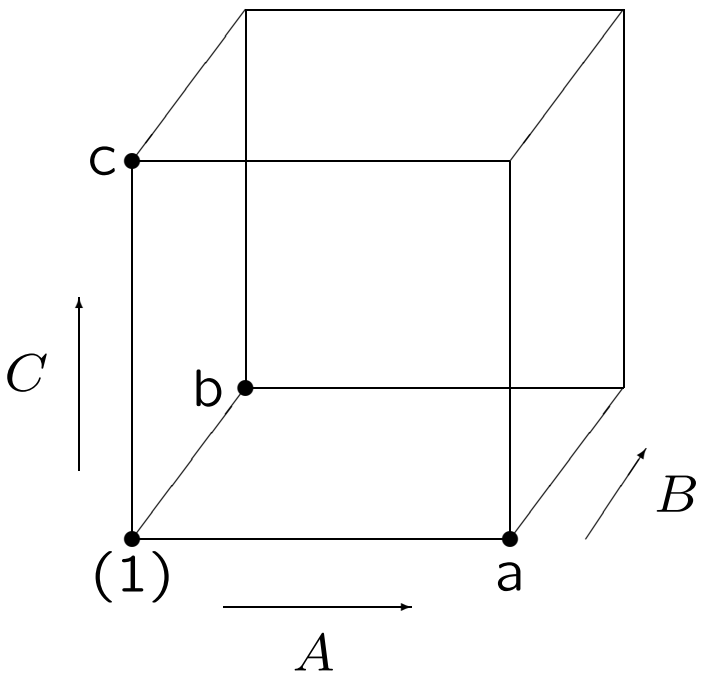
Fractional Factorials

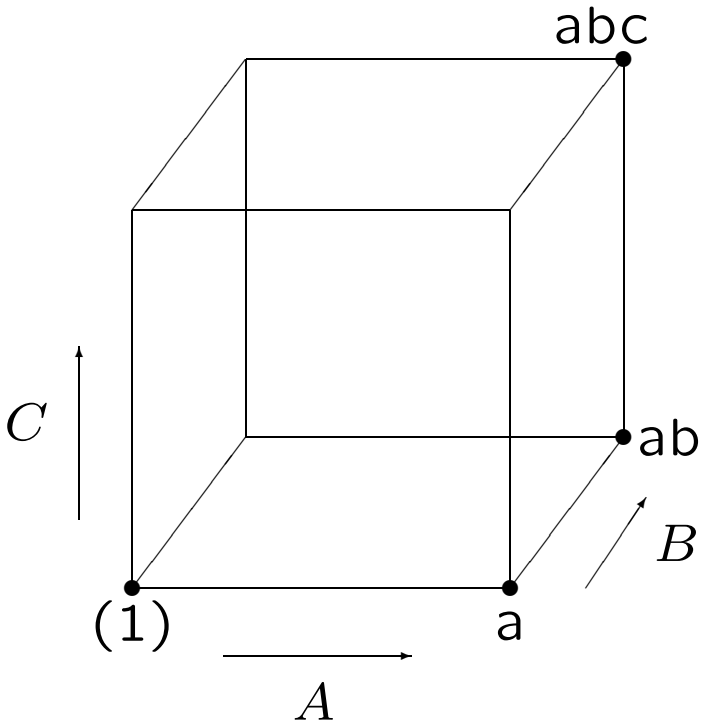
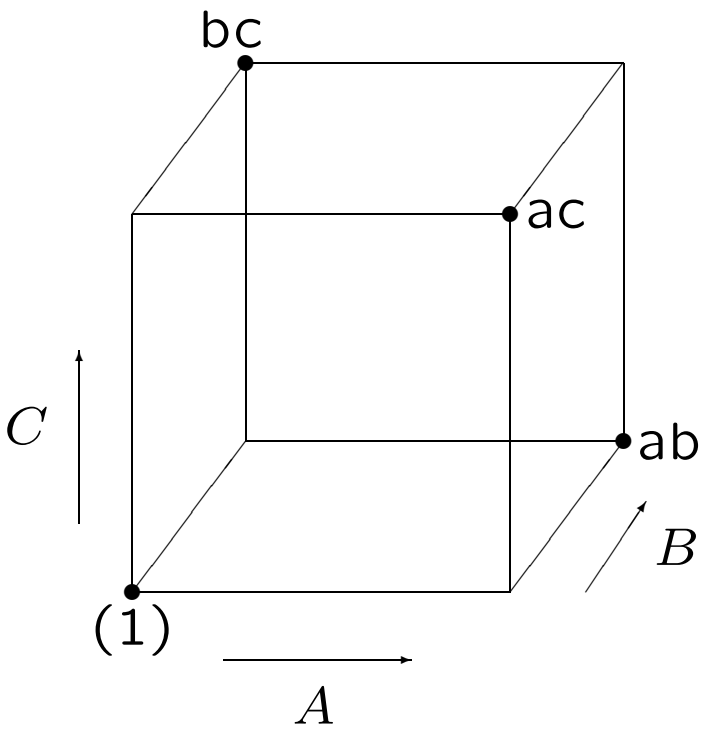
Notation:

(1)	alle Faktoren auf dem „tiefen“ Level
a	A auf dem „hohen“, alle übrigen Faktoren auf dem „tiefen“ Level
bc	B und C auf dem „hohen“, A auf dem „tiefen“ Level

2^3-Faktorial:




c
b
C
B
(1)
a
A


abc
C
ab
B
(1)
a
A

Gleichmässige Überdeckung