

CONCORSO NAZIONALE 2017 DI SCIENZA E GIOVENTÙ

SINISTRE AZIONI A DISTANZA

SULLA NATURA DELLE CORRELAZIONI NELLA
TEORIA QUANTISTICA

Autore:
Silvio BARANDUN

Advisor:
Christian FERRARI

Lavoro di Maturità 2017
Liceo Cantonale Locarno

Silvio Barandun
Via delle Vigne 4, 6648 Minusio
barandun.silvio@gmail.com

Originariamente editato come

LAVORO DI MATURITÀ
TEORIA QUANTISTICA

SINISTRE AZIONI A DISTANZA
SULLA NATURA DELLE CORRELAZIONI NELLA
TEORIA QUANTISTICA

SILVIO BARANDUN

Professore responsabile: Christian FERRARI

Liceo Cantonale Locarno
Anno scolastico 2016 - 2017

Finito di stampare il 23 marzo 2017

Indice

Abstract	V
I La teoria quantistica	1
1 Fondamenti della teoria quantistica	3
1.1 Luce e onde elettromagnetiche	3
1.2 Introduzione alla natura quantistica della luce	7
1.3 Logica quantistica	8
1.3.1 Stati	9
1.3.2 Osservabili	10
1.4 Costruzione del modello per la polarizzazione	10
1.5 Misurazione ideale e probabilità	13
1.6 Valore medio e fluttuazioni	15
1.7 Osservabili incompatibili	17
1.8 Evoluzione temporale	17
2 Interferenze quantistiche ad una particella	21
2.1 Motivazioni sperimentali	21
2.1.1 Dualismo onda-particella	22
2.1.2 Interferenze e informazione “which-way”	23
2.2 L’interferometro di Mach-Zehnder	24
2.2.1 L’apparecchio	24
2.2.2 Modello, stati e osservabili	25
2.2.3 Evoluzione temporale dello stato	26
2.2.4 Studio delle interferenze	28
2.2.5 “Which-way”	30
2.3 Interpretazione e considerazioni conclusive	32
3 Entanglement	33
3.1 Formalismo: Lo spazio prodotto tensoriale	33
3.2 Polarizzazioni intrecciate e correlazioni	35
3.3 L’interferometro di Franson modificato	38
3.3.1 Modello, stati e osservabili	38
3.3.2 Evoluzione temporale dello stato	39
3.3.3 Studio delle correlazioni	40
3.4 Interpretazione e considerazioni conclusive	40

II Sinistre azioni a distanza	43
4 Argomento EPR	45
4.1 Introduzione	45
4.2 L'articolo EPR	46
4.2.1 Premesse	46
4.2.2 L'argomentazione di EPR	47
4.3 Argomentazione	47
4.3.1 Alternativa logica	47
4.3.2 Realtà simultanea per due grandezze che non commutano .	49
4.3.3 Conclusione del ragionamento	51
4.4 Critica	51
4.5 Commenti e conclusioni	52
5 Teorema di Bell	55
5.1 Premessa sulla natura classica delle correlazioni	55
5.1.1 Scambio di informazione	55
5.1.2 Correlazioni stabilite alla sorgente	55
5.2 Teoria delle variabili nascoste	56
5.3 Teorema di Bell	57
5.3.1 Disuguaglianza di Bell	57
5.3.2 Disuguaglianza di Bell nella fisica quantistica	58
5.3.3 Enunciato del Teorema di Bell	63
5.4 Disuguaglianze di Bell negli esperimenti	63
5.4.1 Prime esperienze: FREEDMAN et al. e ASPECT et al.	63
5.4.2 Problematica "Loopholes"	65
5.4.3 Dimostrazione definitiva: HENSEN et al.	66
5.5 Considerazioni finali e conclusioni	67
6 Conclusioni	69
Elenco delle figure	71
A Basi matematiche	73
Bibliografia	79

Prefazione

PRESENTATAMI la possibilità di eseguire un lavoro di ricerca nell'ambito dell'affascinante e sconvolgente fisica quantistica, la decisione per la materia è stata semplice. Le conoscenze del tema all'inizio del lavoro erano quasi inesistenti. È proprio stata questa possibilità di costruire una teoria dalle sue fondamenta, su una base libera che mi ha affascinato e ha stimolato la curiosità di intraprendere questa strada.

Il tema di approfondimento è stata una scelta influenzata dai recenti sviluppi sperimentali che si legano a questo tema. Questi portano una chiusura del cerchio dando una coerenza logica, un inizio e una fine al lavoro.

Ringraziamenti

Ringrazio di cuore il professor Christian FERRARI che ha consentito, grazie alle sue conoscenze e alla sua disponibilità, la realizzazione di questo lavoro.

Ringrazio anche il professor Gianni BOFFA, per le costruttive discussioni su cause e conseguenze filosofiche dell'argomento di questo lavoro e per l'aiuto nella spiegazione di alcuni apparati sperimentali, il professor Frederick JOPLING, per l'aiuto nella redazione delle parti in lingua inglese, e il professor Gian Michele GRAF, per le importanti annotazioni e gli interessanti spunti di riflessione propostomi.

Abstract

QUESTO lavoro di ricerca nell'ambito della teoria quantistica ha lo scopo di chiarire, se possibile, quale è la natura del fenomeno delle correlazioni a due particelle, conseguenza dell'esistenza degli "stati intrecciati".

Il lavoro si suddivide in due parti distinte. La prima parte è dedicata alla costruzione della teoria quantistica e all'introduzione del fenomeno studiato. L'obiettivo preposto è quello di costruire una base strutturalmente e logicamente solida in modo da dare veridicità alla conclusione dell'analisi del tema analizzato nella parte di approfondimento.

La seconda parte, grazie agli strumenti costruiti nella parte precedente, percorrere, seguendo lo sviluppo storico, diverse ipotesi formulate per spiegare le cause del fenomeno delle correlazioni.

Si giunge ad un'importante conclusione. Dopo ottant'anni dal primo tentativo di spiegare le cause di questo fenomeno, è ora possibile, grazie a recenti esperimenti, affermare la correttezza (con sostegno sperimentale) della teoria proposta da BELL, ovvero che la teoria quantistica non può essere completata tramite una teoria delle variabili nascoste locali.

Una spiegazione tramite un modello locale non può essere tuttavia esclusa, nonostante un modello di questo tipo sia assente nella letteratura. L'unica spiegazione ad oggi esistente e non confutata sperimentalmente è quella di un'azione non locale tra le particelle. Un'altra divergenza di vedute della comunità scientifica è la valutazione della teoria quantistica: essa stessa viene infatti considerata da alcuni come la teoria locale che spiega le correlazioni. La discussione sulla natura delle correlazioni quantistiche a due particelle rimane dunque aperta.

Research project summary

Subject

The description of quantum pure states in terms of unit vectors of certain complex spaces (so called Hilbert spaces, in this research simply \mathbb{C}^2) creates the possibility for superposition states due to linear combinations of pure states. If superposition occurs in a joint system, the state is called "entangled". In an entangled state the properties of the subsystems are not determined.

An important phenomenon related to entangled states is the two-particle quantum correlation. The measurement of the property of one subsystem yields the unambiguous determination of the other subsystem properties.

This research project attempts to determine, if possible, the nature of the two-particle quantum correlation phenomenon.

Methods

The research carried out is theoretical, and it includes an analysis of experimental results found in the literature. To begin the foundations of quantum physics were studied and modelled. The procedure was carried out with mathematical rigour in order to make it possible to create a structurally and logically sound theory and give validity to the conclusions; subsequently, quantum correlations were examined using the model so obtained. This research followed the historical development with references to the literature describing models and theories which have attempted to explain the nature of the two-particle quantum correlation phenomenon. Finally, the results obtained were compared to the results of the most recent experimentation in the field.

Results

The main result obtained in this research is a definite demonstration that quantum theory and the microscopic world violate Bell's inequality. A consequence of the violation of Bell's inequality is the impossibility of completing the quantum theory with a local hidden variable theory – or, in any case, it is shown that there would be a conflict between this theory and the quantum theory. This result had first been obtained only theoretically – many difficulties delayed an experimental demonstration. A demonstration which can be considered definitive was presented only recently.

The hypothesis of completing the quantum theory with additional variables – as proposed by the Einstein, Podolsky and Rosen group (known as EPR argument) – has thus been proved fallacious.

Discussion

The obtained main result does not lend itself to interpretation: the experimental demonstration of the theoretical result concerning the violation of Bell's inequality must be considered as definitive. Quantum theory can therefore not be completed with any local hidden variable theory.

However, the nonlocality of the microscopic world has yet to be proved beyond doubt. The discussion is therefore open as to whether Nature includes a nonlocal aspect, or if a classical and local model, not yet present in the literature, can explain the quantum correlation phenomenon.

Some scientists retain the quantum theory itself to be the local theory that explains the two-particle quantum correlation phenomenon.

Conclusion

In the end it was not possible to determine in a definitive way the nature of the two-particle quantum correlation phenomenon. The most important conclusion of this research project is that completing the quantum theory with any local hidden theory is definitely impossible.

The only existing explanation for this phenomenon (which is in agreement with the experimental results) is a nonlocal action. Nevertheless, a local model cannot be excluded. The discussion is still open.

Parte I

La teoria quantistica

Capitolo 1

Fondamenti della teoria quantistica

QUESTO capitolo è dedicato all'introduzione dei fondamenti della teoria quantistica. Lo scopo è quello di creare una base sufficientemente solida da poter affrontare il tema di approfondimento che seguirà nei capitoli seguenti.

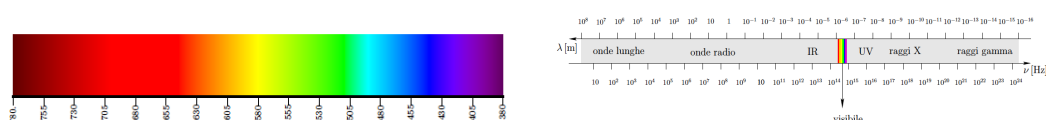
Si introdurranno dunque i concetti fondamentali della fisica quantistica partendo dal postulato della logica quantistica e deducendone le regole generali della teoria quantistica. Tutti i passaggi sono accompagnati da un'esemplificazione attraverso lo studio di un fotone. Al fine di permettere una corretta interpretazione dei passaggi puramente matematici, è stata adibita l'appendice A contenente le conoscenze matematiche di base.

Gli aspetti teorici sono tratti da [22, 38, 43], mentre le esemplificazioni sono dell'autore.

1.1 Luce e onde elettromagnetiche

Il dibattito sulla natura della luce ha dominato il panorama scientifico per secoli, in particolare il XVII e XVIII. Durante questo periodo, prove più o meno significative erano presenti sia per la teoria corpuscolare, difesa in modo autorevole da NEWTON, che per quella ondulatoria, che vedeva tra i suoi esponenti più importanti HUYGENS; la teoria più accreditata era dunque quella difesa dal fisico più influente che, per quell'epoca, era NEWTON. Nel XIX secolo, principalmente grazie ai lavori di YOUNG e FRESNEL, la teoria ondulatoria prende il sopravvento diventando la teoria accettata dalla comunità scientifica [51].

Anni cruciali per lo studio della natura della luce furono quelli tra il 1861 e 1873, durante i quali MAXWELL formulò 4 leggi conosciute oggi come le leggi di Maxwell che sanciscono unione delle teorie elettriche e magnetiche dando forma all'elettromagnetismo. L'unificazione di queste due teorie stabilisce, in particolare con la seconda legge $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ e la quarta $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, che un campo magnetico, rispettivamente un campo elettrico, variabile nel tempo genera un campo elettrico, rispettivamente magnetico. I due fenomeni si trovano così unificati. Questa unificazione ingloba pure la teoria della luce, infatti si dimostra partendo dalle equazioni di Maxwell che nel vuoto esse danno origine a un'equazione di d'Alambert per il campo elettrico ed una per il campo magnetico, conferendo quindi proprietà ondulatorie a questi campi, in questo caso chiamati onde elettromagnetiche di cui la luce è un caso particolare. Dalle caratteristiche appena citate si inserisce la luce nell'insieme delle onde elettromagnetiche [51].



(a) Lo spettro della luce visibile (in nm). (b) Lo spettro delle onde elettromagnetiche.

Figura 1.1: Rappresentazione dello spettro della luce e di tutte le onde elettromagnetiche.

La fisica classica interpreta dunque la luce come un'onda elettromagnetica trasversale che si propaga nello spazio, a una velocità nel vuoto¹ di $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, e come tale ha una frequenza ν caratteristica che varia a dipendenza dal colore. Queste frequenze, e le rispettive lunghezze d'onda λ per la propagazione nel vuoto calcolate tramite l'equazione $\lambda\nu = c$, sono illustrate alla figura 1.1(b).

Polarizzazione²

La figura 1.2 getta le basi per l'introduzione di una nuova, dopo velocità e frequenza, proprietà delle onde elettromagnetiche: la polarizzazione. Questa proprietà è definita dalla direzione di propagazione del campo elettrico.

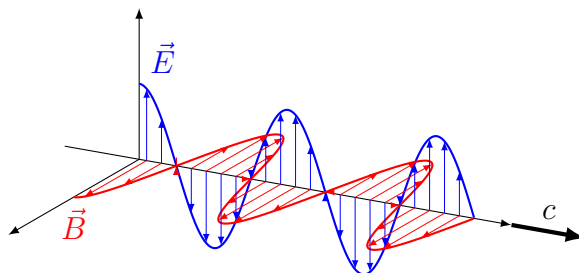


Figura 1.2: Schematizzazione dei campi \vec{E} e \vec{B} nelle onde elettromagnetiche.

Si possono identificare tre categorie di onde in base alla loro polarizzazione.

- Quando il campo elettrico oscilla lungo una direzione ben definita si tratta di una *polarizzazione lineare* come illustrato dalla figure 1.3(a) e 1.3(b).
- Se il campo ruota in modo periodico sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione si parla di *polarizzazione circolare* come illustrato dalla figura 1.3(c).
- Se il campo elettrico non ha una direzione di oscillazione privilegiata si parla di onda *non polarizzata*.

La proprietà “polarizzazione lineare” è associata ad una direzione definita da un vettore $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$, del quale il verso è senza valore, indicante l'asse di oscillazione del campo \vec{E} nella sua propagazione. Due particolari polarizzazioni lineari sono:

¹Ogni velocità c' di propagazione della luce in un mezzo fisico rispetta la legge $c' = \frac{c}{n} \leq c$, dove $n \geq 1$ è l'indice di rifrazione del mezzo.

²Informazioni tratte e in parte ritrattate da [21].

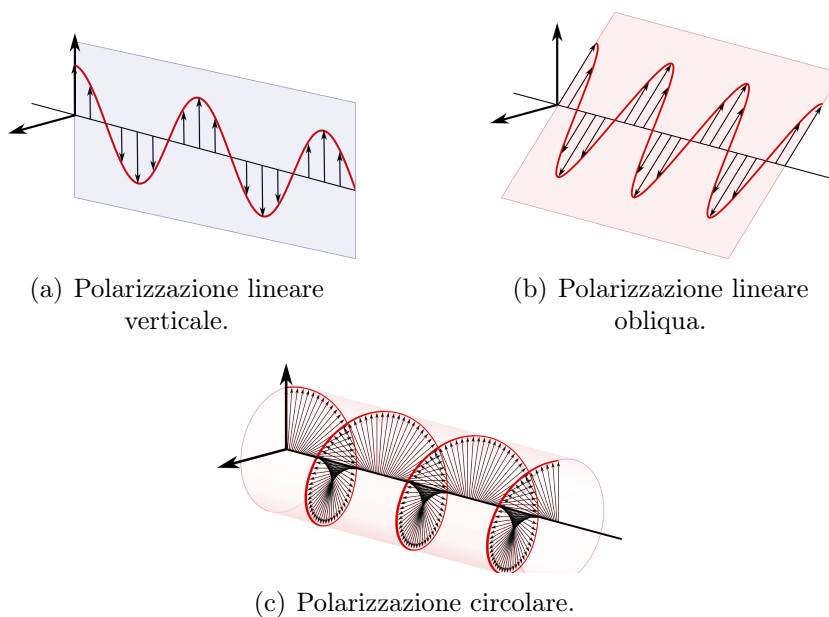


Figura 1.3: Alcune immagini sulla polarizzazione delle onde elettromagnetiche.

- La **polarizzazione lineare** H/V (orizzontale/verticale) rappresentata dai vettori

$$\vec{e}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Questa coppia di vettori costituisce la base canonica di \mathbb{R}^2 , è particolarmente comodo esprimere un generico stato di polarizzazione con asse α tramite una combinazione lineare di questi vettori nel modo seguente:

$$\vec{e}_\alpha = \cos \alpha \vec{e}_H + \sin \alpha \vec{e}_V = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad . \quad (1.1)$$

- La **polarizzazione lineare** $+/-$ ($+45^\circ/-45^\circ$), rappresentata dai vettori

$$\vec{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Una combinazione lineare simile a quella dell'equazione (1.1) ma a coefficienti complessi porta alla definizione della polarizzazione circolare.

- La **polarizzazione circolare** R/L (destra/sinistra) rappresentata dai vettori

$$\vec{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_H + i\vec{e}_V) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_H - i\vec{e}_V) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad .$$

Strumenti di misurazione

Per determinare la polarizzazione delle onde elettromagnetiche esistono due apparecchi di misurazione e due accessori che permettono la misurazione di ogni polarizzazione:

Il polarizzatore è un filtro che, grazie alla sua struttura cristallina, possiede un asse preferenziale. Il polarizzatore trasmette la componente parallela al suo asse e assorbe o riflette quella perpendicolare come mostrato dall'immagine 1.4(a). Questo materiale permette dunque di misurare la polarizzazione lungo una direzione.

Il polarizing beam splitter (PBS) è un materiale che permette di separare un fascio di luce secondo la sua polarizzazione. Nel caso della figura 1.4(b) la polarizzazione orizzontale H è trasmessa, mentre quella verticale V è riflessa. Questo apparecchio di misurazione è quindi ideale per misurare la polarizzazione nelle due direzioni H e V .

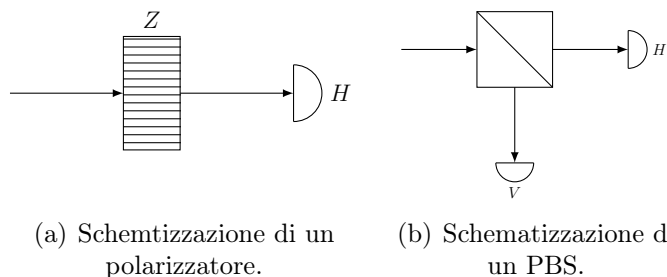


Figura 1.4: Strumenti per la misurazione della polarizzazione.

Il rotatore di polarizzazione è un materiale che permette di ruotare la polarizzazione di un fascio di luce di un angolo $-\alpha$. La separazione di un fascio di luce con asse di polarizzazione α e α^\perp (ad esempio della polarizzazione $+45^\circ$ e -45°) è ottenuta nel modo illustrato nella figura 1.5(a). La luce trasmessa aveva inizialmente la polarizzazione nella direzione α , mentre quella riflessa nella direzione α^\perp .

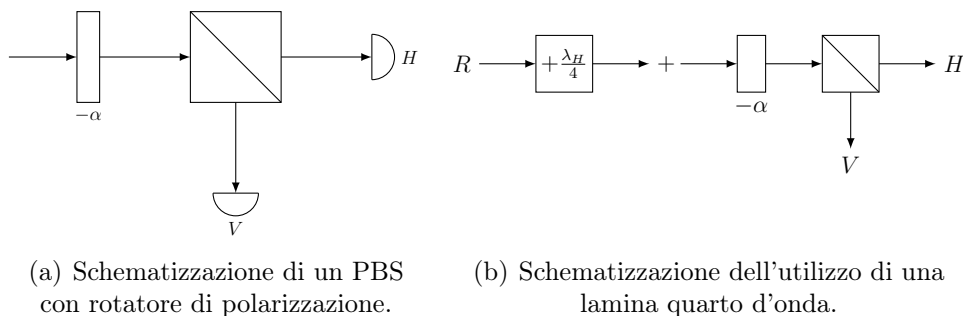


Figura 1.5: Accessori per la misurazione della polarizzazione.

La lamina quarto d'onda è un materiale che permette la conversione dalla polarizzazione circolare a quella lineare e viceversa. Questo materiale aggiusta la fase tra la componente e_H e quella e_V . Utilizzata assieme a un PBS con rotatore di polarizzazione permette la misurazione delle polarizzazioni circolari come mostrato nella figura 1.5(b).

1.2 Introduzione alla natura quantistica della luce

PLANCK, durante i suoi studi sul corpo nero, introdusse nel 1900 per la prima volta il concetto di “quanto” [44]. Egli propose un modello nel quale la radiazione, quando interagisce con la materia, è composta di quanti che possono essere emessi o assorbiti dagli atomi. Questi quanti sono pacchetti finiti di energia, il cui valore dipende dalla frequenza della radiazione. EINSTEIN, nel 1905, introdusse l'idea che non solo gli atomi emettono e assorbono energia in “pacchetti finiti”, come sostenuto da PLANCK, ma che è la stessa radiazione elettromagnetica ad essere costituita da quanti [18], ossia da quantità discrete di energia, poi denominati *fotoni* nel 1926 da LEWIS [40].

Per parlare di luce nel ambito della fisica quantistica bisogna dunque studiare i fotoni; il fotone è il “quanto” associato a *un'onda elettromagnetica*. Si tratta di una particella *neutra* che ha “*tempo di vita infinito*”: può essere creata e distrutta dall'interazione con altre particelle, ma non può decadere spontaneamente. Pur *non avendo massa*, il fotone è influenzato dalla gravità e possiede energia e quantità di moto; nel vuoto si muove alla velocità della luce.

Il fotone inoltre mostra una duplice natura, quella *corpuscolare* e quella *ondulatoria*: a seconda della strumentazione usata per rilevarlo, si comporta – in un'immagine classica – come una particella o come un'onda. L'esperimento dell'effetto fotoelettrico suggerisce la natura corpuscolare della luce, mentre i fenomeni di diffrazione e di interferenza quella ondulatoria. Prima dell'introduzione della fisica quantistica, che descrisse in maniera unificata i due aspetti, questo *dualismo onda-particella* era considerato un paradosso.

La polarizzazione del fotone

La luce, dal punto di vista della fisica quantistica, è dunque composta da particelle chiamate fotoni e può essere considerata come un insieme di fotoni tutti uguali. È quindi naturale definire una proprietà del fotone che possa essere, nel caso di un grande numero di fotoni, messa in relazione alla polarizzazione della luce di cui questi fotoni rappresentano l'interpretazione quantistica.

Dopo aver introdotto il formalismo della fisica quantistica, nella sezione 1.4 verrà costruito il modello per la polarizzazione.

Prime evidenze sperimentali

Si suppone di compiere un esperimento, consistente nel inviare contro un polarizzatore un fotone, facendo passare nell'apparecchiatura *un solo fotone alla*

volta. L'esperienza fornirà due risultati complementari, indipendentemente dalla misurazione e dalla direzione del polarizzatore:

- il fotone attraversa il filtro polarizzatore con cui ha interagito e viene successivamente rilevato;
- il fotone viene assorbito dal polarizzatore senza poter essere quindi rilevato.

Il superamento di un polarizzatore non è mai certo, fatta eccezione per la situazione nella quale l'ultimo polarizzatore attraversato aveva lo stesso asse di orientazione del polarizzatore che sta per essere incontrato.

Inoltre non vi sono direzioni del polarizzatore compatibili. Infatti se si pongono tre polarizzatori in linea: $Z \mapsto X \mapsto Z$ si ottengono dei risultati di incompatibilità, ovvero se il fotone oltrepassa i primi due polarizzatori, *non è certo* che oltrepassi pure il terzo polarizzatore.

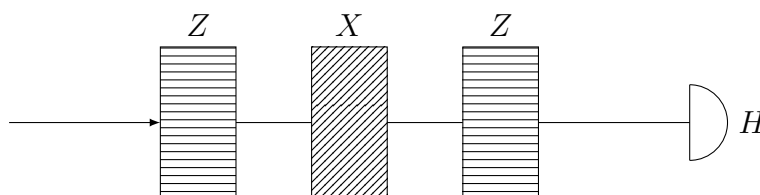


Figura 1.6: Tre polarizzatori in serie: $Z \mapsto X \mapsto Z$.

1.3 Logica quantistica

Considerando un *sistema* Σ , si possono definire delle *proprietà* \mathcal{P}_k che Σ possiede a quel istante o che può acquisire. Per ognuna di queste proprietà \mathcal{P}_k esiste un relativo *test*³ \mathcal{T}_k , i cui risultati possono essere soltanto “sì” oppure “no”. La proprietà \mathcal{P}_k è una *proprietà potenziale* se il sistema Σ può possederla, ovvero se la risposta “sì” è possibile. Nel caso in cui la risposta “sì” è certa, allora \mathcal{P}_k è una *proprietà attuale*.

Sulla base della proprietà \mathcal{P}_k si definisce la *negazione*, notata $\neg\mathcal{P}_k$. Essa è definita come avente risposte opposte al test \mathcal{T}_k . A $\neg\mathcal{P}_k$ corrisponde il test $\neg\mathcal{T}_k$ le quali risposte sono uguali a \mathcal{T}_k a causa delle doppia negazione dei termini.

Altra operazione tra le proprietà è la *coniunzione* notata $\mathcal{P}_k \wedge \mathcal{P}_l$. A essa corrisponde il test $\mathcal{T}_{k \wedge l}$ che consiste nell'effettuare a caso uno dei due test \mathcal{T}_k o \mathcal{T}_l . La proprietà $\mathcal{P}_k \wedge \mathcal{P}_l$ è *attuale* nel caso in cui la risposta al test $\mathcal{T}_{k \wedge l}$ è “sì” certamente.

Si introduce infine la *proprietà banale* \mathcal{V} che è sempre vera e la *proprietà assurda* \mathcal{F} che non è mai vera. Si noti che $\neg\mathcal{V} = \mathcal{F}$ e viceversa.

³Un *test* si differenzia da un'esperienza normale nel modo in cui ammette soltanto un determinato numero di risultati predefiniti in partenza [38].

Complessivamente l'insieme di tutte le proprietà del sistema Σ è:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k, \mathcal{F}, \mathcal{V}\}$$

dove sono definite le operazioni di congiunzione \wedge e negazione \neg .

Postulato della logica quantistica

Il concetto fondamentale per la formalizzazione matematica della fisica quantistica è quello di **spazio di Hilbert** \mathcal{H} . Ad ogni sottospazio vettoriale E di \mathcal{H} è associata una proprietà \mathcal{P} e viceversa. Valgono le seguenti corrispondenze:

- Proprietà $\mathcal{P} \longleftrightarrow$ sottospazio vettoriale E ;
- Proprietà banale $\mathcal{V} \longleftrightarrow \mathcal{H}$;
- Proprietà assurda $\mathcal{F} \longleftrightarrow \{0_{\mathcal{H}}\}$;
- Proprietà $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \longleftrightarrow$ Intersezione $E_1 \cap E_2$;
- Proprietà $\neg\mathcal{P} \longleftrightarrow E^{\perp}$.

In tutto questo lavoro lo spazio di Hilbert \mathcal{H} sarà di dimensione finita, spesso semplicemente di dimensione 2 come risulterà alla sezione 1.4.

1.3.1 Stati

In fisica quantistica ci sono due tipi di stati: gli stati puri e gli stati misti. In questo lavoro ci si concentrerà sugli stati puri, ossia quelli che specificano le informazioni massimali che la Natura permette di avere. Essi non contemplano nessun aspetto probabilistico a differenza degli stati misti in cui le informazioni sono di tipo probabilistico per mancanza di conoscenza da parte dell'osservatore.

Regola 1

Gli *stati* di un sistema quantistico sono rappresentati da vettori $|\psi\rangle$ normalizzati appartenenti allo spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Si nota che vettori linearmente dipendenti che differiscono di un fattore di modulo 1 rappresentano lo stesso stato.

Una proprietà \mathcal{P} è detta attuale se e solo se $|\psi\rangle \in E$, con E il sottospazio vettoriale associato a \mathcal{P} . Dato che uno stato quantistico è rappresentato da un vettore si può applicare il principio di sovrapposizione lineare. La combinazione lineare di due vettori $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$, che rappresentano due diversi stati, dà come risultato un vettore che rappresenta un terzo stato dato da

$$|\psi\rangle = \frac{\lambda|\psi_1\rangle + \mu|\psi_2\rangle}{\|\lambda|\psi_1\rangle + \mu|\psi_2\rangle\|} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad . \quad (1.2)$$

Quest'ultimo stato, creato dalla sovrapposizione di due stati distinti, è chiamato stato di sovrapposizione. Gli stati di sovrapposizione, che in fisica classica non esistono, sono molto importanti in fisica quantistica; infatti in questi stati il sistema si trova potenzialmente in tutti gli stati della combinazione lineare.

1.3.2 Osservabili

Ad ogni test \mathcal{T}_k sono associati i due risultati “sì” e “no”. Questi due risultati rappresentano delle proprietà del sistema, possono dunque essere associati ad un sottospazio vettoriale: “sì” $\Leftrightarrow \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow E_1$ e “no” $\Leftrightarrow \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow E_2$. Se la risposta è “sì” con certezza vale $|\psi\rangle \in E_1$, mentre se è “no” con certezza $|\psi\rangle \in E_2$.

I sottospazi vettoriali E_1 e E_2 sono ortogonali tra di loro, poiché la risposta “sì” con certezza a una delle proprietà implica l'impossibilità di una risposta uguale nell'altra: le proprietà del sistema associate ad ogni test \mathcal{T}_k sono *mutualmente esclusive*. Matematicamente:

$$E_2 = E_1^\perp . \quad (1.3)$$

Si osservi che $\mathcal{H} = E_1 \oplus E_2$ e dunque, se si introducono i proiettori P_{E_1} e P_{E_2} sui due sottospazi vettoriali, si ottiene $P_{E_1} + P_{E_2} = I$. Grazie a ciò, sulla base del teorema spettrale, ad ogni test \mathcal{T}_k è dunque possibile associare una grandezza fisica, l'*osservabile*, che può essere scritta come:

$$A = \lambda_1 P_{E_1} + \lambda_2 P_{E_2} \quad (1.4)$$

dove P_{E_1}, P_{E_2} sono i proiettori associati alle proprietà e λ_1, λ_2 i valori reali che si associano alle risposte “sì” e “no” del test. Per costruzione (per mezzo del teorema spettrale) la matrice dell'equazione (1.4) soddisfa la condizione $A = A^*$, è dunque autoaggiunta.

Regola 2

Le *osservabili* di un sistema quantistico sono rappresentate da matrici autoaggiunte definite su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , ossia $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

1.4 Costruzione del modello per la polarizzazione

Per modellizzare un sistema si devono necessariamente fare delle approssimazioni. Nel contesto in cui ci si muoverà verrà considerato il fotone non caratterizzato sia da variabili spaziali che da variabili inerenti la polarizzazione, bensì verranno prese in considerazione soltanto le variabili inerenti la polarizzazione. Questa scelta permette la modellizzazione del sistema con uno spazio di Hilbert di dimensione 2, ovvero $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ come si deduce qui di seguito.

Indichiamo con \mathcal{P}_α le proprietà di polarizzazione, associate ai test \mathcal{T}_α realizzati con dei polarizzatori (o dei polarizzatori con rotatori e/o con lamine quarto d'onda). L'esperienza mostra che

1. se un fotone oltrepassa il polarizzatore \mathcal{T}_α , e quindi avrà la polarizzazione determinata da quest'ultimo, allora per un polarizzatore $\mathcal{T}_{\alpha'}$ non uguale a \mathcal{T}_α non si otterrà mai la risposta “sì” certamente. Cioè una sola delle proprietà \mathcal{P}_α può essere attuale.
2. se un fotone ha la proprietà \mathcal{P}_α esiste un unico polarizzatore \mathcal{T}_β che fornisce la risposta “no” con certezza.

Da 1. segue che per ogni $\alpha \neq \alpha'$

$$\mathcal{P}_\alpha \wedge \mathcal{P}_{\alpha'} = \mathcal{F} \quad (1.5)$$

infatti la proprietà $\mathcal{P}_\alpha \wedge \mathcal{P}_{\alpha'}$ può essere vera se e solo se esiste una possibilità che entrambi i test \mathcal{T}_α e $\mathcal{T}_{\alpha'}$ forniscano la risposta “sì” certamente, cosa che appunto è impossibile come mostra l’esperienza.

Da 2. segue che $\mathcal{T}_\beta \neq \mathcal{T}_\alpha$ e che \mathcal{P}_β è la negazione di \mathcal{P}_α , ovvero

$$\neg \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\beta \quad . \quad (1.6)$$

Siano dunque E_α i sottospazio vettoriali di \mathcal{H} associati alle proprietà \mathcal{P}_α . Allora l’equazione (1.5) implica

$$E_\alpha \cap E_{\alpha'} = \{0_{\mathcal{H}}\} \quad (1.7)$$

e l’equazione (1.6) implica

$$E_\alpha^\perp = E_\beta \quad . \quad (1.8)$$

Ora, poiché una sola delle proprietà \mathcal{P}_α può essere attuale, la proprietà di avere una certa polarizzazione caratterizza completamente lo stato del sistema e quindi

$$\dim(E_\alpha) = 1 \quad . \quad (1.9)$$

Concludendo le equazioni (1.7-1.9) portano a

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(E_\alpha \oplus E_\alpha^\perp) = \dim(E_\alpha \oplus E_\beta) = \dim(E_\alpha) + \dim(E_\beta) = 2 \quad (1.10)$$

e di conseguenza

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \quad .$$

Esempi su stati e osservabili per la polarizzazione

Per capire meglio quanto appena detto, si propone un esempio pratico applicando questi concetti alla polarizzazione del fotone.

Stati dei fotoni polarizzati

Lo stato di un fotone polarizzato linearmente è rappresentato in generale da:

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle \quad (1.11)$$

dove $|H\rangle$ è lo stato associato alla polarizzazione orizzontale $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|V\rangle$ quello della polarizzazione verticale $|V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e α l’angolo di polarizzazione rispetto all’asse di $|H\rangle$. Si noti l’affinità dell’equazione (1.11) con l’equazione (1.1). Si prenda in considerazione, ad esempio, un sistema nel quale vi è una sorgente che

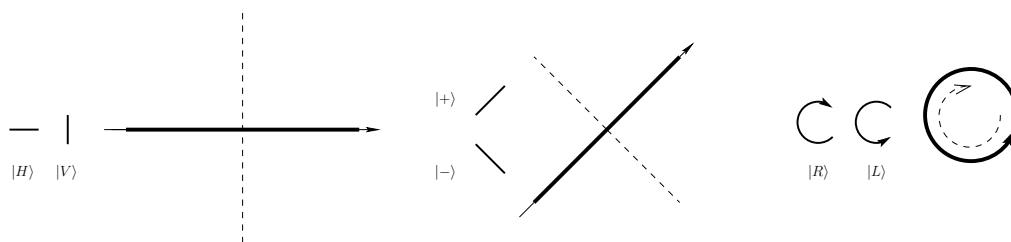


Figura 1.7: Le tre direzioni di polarizzazione più usuali: H/V , $+/-$ e R/L .

emette dei fotoni su un polarizzatore orizzontale ($\alpha = 0^\circ$). I fotoni che avranno superato il polarizzatore orizzontale saranno stati polarizzati orizzontalmente, avranno dunque uno stato descritto dal vettore $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se invece il polarizzatore fosse stato verticale, i fotoni sarebbero stati polarizzati verticalmente ($\alpha = 90^\circ$), ovvero $|V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un processo analogo può essere eseguito per la polarizzazione circolare dopo essere stata tramutata in polarizzazione lineare tramite una lamina quarto d'onda. Infatti, una volta trasposto, lo stato circolare può essere analizzato con un rotatore di polarizzatore e un polarizzatore o PBS.

L'osservabile della polarizzazione

Applicando il teorema spettrale associato alla **Regola 2**, si calcola l'osservabile associata alla polarizzazione misurata da un particolare PBS in alcuni casi esemplari:

- Il PBS senza rotatore di polarizzazione separa gli stati di polarizzazione $|H\rangle$ e $|V\rangle$. Associando $+1$ alla proprietà “polarizzazione orizzontale” e -1 alla proprietà “polarizzazione verticale” si ottiene

$$A = 1 \cdot P_{|H\rangle} - 1 \cdot P_{|V\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z \quad ;$$

- Il PBS con un rotatore di polarizzazione di angolo $\alpha = -45^\circ$ separa gli stati

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Associando il valore $+1$ alla proprietà “polarizzazione $+45^\circ$ ” e -1 alla proprietà “polarizzazione -45° ” si ottiene

$$A = 1 \cdot P_{|+\rangle} - 1 \cdot P_{|-\rangle} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x;$$

- Il PBS con rotatore di polarizzazione di angolo $\alpha = -45^\circ$ sul quale sono inviate le trasposizioni lineari di

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

separa questi due stati. Associando il valore $+1$ alla proprietà “polarizzazione verso destra” e -1 alla proprietà “polarizzazione verso sinistra” si ottiene

$$A = 1 \cdot P_{|R\rangle} - 1 \cdot P_{|L\rangle} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$$

dove σ_x , σ_y e σ_z sono chiamate *matrici di Pauli*.

La scelta dei valori λ_i è indeterminante affinché siano elementi di \mathbb{R} ; vengono però tenuti in considerazione alcuni fattori logici. Ad una delle due proprietà viene, per comodità, quasi sempre associato il valore $+1$. Nel caso di un polarizzatore normale, nel quale i fotoni che non attraversano l'apparecchio vengono distrutti, ha senso associare il valore 0 alla componente diversa dall'asse di polarizzazione. Diversamente in un PBS, nel quale i fotoni che non attraversano l'apparecchio vengono deviati, ha senso associare un valore -1 alla componente diversa da $+1$.

1.5 Misurazione ideale e probabilità

La misurazione è un'esperienza legata ad un'osservabile, dipende infatti dallo strumento di misura utilizzato (che determina l'osservabile). La probabilità di osservare un dato valore è influenzata dallo stato del sistema prima della misurazione.

Questo aspetto della fisica quantistica è il primo a contenere una sostanziale differenza dalla fisica classica. Se, infatti, nelle teorie classiche la misurazione rileva qualcosa che preesiste alla misurazione, la misurazione in fisica quantistica influenza in modo non deterministico e irreversibile lo stato del sistema.

Si prenda in considerazione una proprietà E associata al test rappresentato dalla matrice autoaggiunta A definita dal proiettore $P_{|\varphi\rangle}$ dove si associa 1 alla risposta “sì” e 0 a quella “no”, allora $A = P_{|\varphi\rangle}$. Si vuole misurare questa proprietà. Nel caso di una misurazione ideale, dato lo stato prima della misurazione $|\psi\rangle$ la risposta al test è “sì” con certezza se e solo se la proprietà E è attuale (ovvero $|\psi\rangle \in E$). Se la risposta è “sì” allora, dopo la misurazione, la proprietà E è attuale e $|\psi'\rangle \in E$, dove $|\psi'\rangle$ è lo stato dopo la misurazione.

Si prende in considerazione ora la transizione dallo stato $|\psi\rangle$ allo stato $|\varphi\rangle$:

Regola 3a

La *probabilità* di trovare lo stato $|\varphi\rangle$ nella misurazione dell'osservabile $P_{|\varphi\rangle}$ dato lo stato $|\psi\rangle$ del sistema è

$$\text{Prob}\{|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle\} = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \quad . \quad (1.12)$$

$\text{Prob}\{|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle\}$ è la probabilità di osservare il valore 1 nella misurazione dell'osservabile $P_{|\varphi\rangle}$ dato lo stato $|\psi\rangle$, questa probabilità è anche notata $\text{Prob}_{|\psi\rangle}\{P_{|\varphi\rangle} = 1\}$.

Si può allargare il risultato ottenuto per i test anche a tutte le altre esperienze. Per farlo si considera un'osservabile $A = \sum_i \lambda_i P_{E_i}$ nella quale ogni proiettore è associato ad una proprietà \mathcal{P}_i . Si considera dunque ognuna di queste proprietà in modo singolo e si interpreta l'esperienza come un test per ogni proprietà. In questo modo le considerazioni per le misurazioni ideali vengono allargate a tutte le misurazioni, nella fattispecie si osserva che immediatamente dopo la misurazione dell'osservabile A , in cui è stato osservato il valore λ_i , lo stato del sistema è uno stato di conoscenza assoluta (si veda la sezione 1.6) per A , ossia uno stato tale che

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{|\psi\rangle}\{A = \lambda_i\} &= \text{Prob}\{|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle\} \\ &= |\langle\varphi, \psi\rangle|^2 = \|P_{E_i}|\psi\rangle\|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in E_i \text{ }^4. \end{aligned}$$

La **Regola 3a** viene generalizzata in quella che è conosciuta come *regola di BORN*:

Regola 3b

La *probabilità* di osservare il valore λ_i di A nella misurazione di questa osservabile, dato lo stato del sistema $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, è

$$\text{Prob}_{|\psi\rangle}\{A = \lambda_i\} = \|P_{E_i}|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|P_{E_i}|\psi\rangle \quad (1.13)$$

dove P_{E_i} è il proiettore associato all'autovalore λ_i .

Questa regola si presta ad un'interessante osservazione.

L'equazione (1.13) è la legge fondamentale che traduce il carattere aleatorio della fisica quantistica. Essa mostra che la *probabilità oggettiva* di osservare il valore λ_i in una misurazione dell'osservabile A , dato lo stato $|\psi\rangle$, dipende unicamente dall'osservabile A e dallo stato $|\psi\rangle$. La probabilità cercata dipende unicamente dall'osservabile preso in considerazione dallo stato del sistema, ma non dalla specifica esperienza di misurazione.

Le probabilità oggettive non hanno nulla a che fare con una mancanza di informazioni da parte dell'osservatore nella descrizione dello stato, esse sono intrinseche alla situazione fisica stessa e indipendenti dall'osservatore. Viene specificata l'oggettività per differenziarle da quelle della fisica statistica, utilizzate per descrizioni statistiche di stati che non corrispondono a stati di informazione massimale (stati misti): *la Natura a livello microscopico è oggettivamente aleatoria* indipendentemente dall'osservatore. A livello microscopico il risultato di una misurazione dipende oggettivamente dal caso, la probabilità interviene però soltanto a livello di misurazione e non a livello dello stato.

La conoscenza dello stato dopo la misurazione, considerando una misurazione λ_i , è possibile grazie a un complemento delle **Regole 3**.

⁴Si noti che viene usata la proprietà $|\langle\varphi, \psi\rangle|^2 = \|P_{E_i}|\psi\rangle\|^2$ dove $P_{E_i} = P_{\varphi}$. Questo vale solo per proiettori associati a sottospazi vettoriali di dimensione 1.

Regola 4

Se lo stato prima della misurazione è $|\psi\rangle$, allora immediatamente dopo la misurazione dell'osservabile A , in cui è stato osservato il valore λ_i associato al sottospazio vettoriale E_i , lo stato del sistema è dato da

$$|\psi'\rangle = \frac{P_{E_i}|\psi\rangle}{\|P_{E_i}|\psi\rangle\|} \quad . \quad (1.14)$$

Questo risultato è anche conosciuto come *postulato della riduzione dello stato*.

Misurazione della polarizzazione di un fotone

Gli strumenti di misurazione della polarizzazione sono il polarizzatore o il polarizing beam splitter (descritti alla sezione 1.2).

Si vuole misurare l'osservabile della polarizzazione a $+45^\circ$ che è descritta dalla matrice σ_x , di un fotone preparato di stato iniziale $|H\rangle$. Si utilizza l'equazione (1.13) per calcolare la probabilità di misurare gli autovalori associati agli autovettori descritti sopra. Per esempio per $\lambda = +1$:

$$\text{Prob}_{|H\rangle}\{\sigma_x = +1\} = \langle H|P_{|+}\rangle H\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

Si nota che il risultato ottenuto coincide con quello che si otterrebbe considerando una grande quantità di fotoni (un fascio di luce) e usando la legge di MALUS. Infatti, vale che

$$I = I_0 \cos^2 \theta \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = \cos^2 \theta, \quad (1.15)$$

dunque, considerando l'intensità come prodotto di energia di una particella per numero di particelle, il valore del rapporto tra le intensità $\frac{I}{I_0}$ è pari al rapporto tra fotoni trasmessi e fotoni assorbiti dal polarizzatore. La legge di MALUS è dunque l'equivalente macroscopico della misurazione della polarizzazione di un fotone.

Considerando la situazione descritta precedentemente con un osservabile di polarizzazione a $+45^\circ$ si calcola il fattore $\frac{I}{I_0}$ con l'equazione (1.15) ottenendo lo stesso risultato:

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2} \quad .$$

1.6 Valore medio e fluttuazioni

Si inizia ora a fare un po' di statistica sui risultati ottenuti dalle esperienze test. Avendo uno stato $|\psi\rangle$, ed un'osservabile A , ripetendo un'esperienza test per un numero di volte quanto meno rappresentativo è possibile individuare il valore

medio dell'osservabile A , notato $\langle A \rangle$. Usando la definizione probabilistica di valore medio si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i \lambda_i \text{Prob}_{|\psi\rangle} \{A = \lambda_i\} = \sum_i \lambda_i \langle \psi | P_{E_i} \psi \rangle \\ &= \left\langle \psi \left| \sum_i \lambda_i P_{E_i} \right. \right\rangle = \langle \psi | A \psi \rangle \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Qualora vi fossero delle fluttuazioni attorno al valore medio si definisce lo scarto quadratico medio ΔA definito, sempre secondo la teoria delle probabilità, come

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad . \quad (1.17)$$

Considerando il caso speciale quando $\Delta A = 0$ si possono trarre delle importanti conclusioni. Considerando una situazione tale, infatti, vale che

$$0 = \Delta A = (\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle \quad (1.18)$$

$$\stackrel{5}{=} \langle (A - \langle A \rangle) \psi | (A - \langle A \rangle) \psi \rangle = \|(A - \langle A \rangle) \psi\|^2 \Leftrightarrow (A - \langle A \rangle) \psi = 0. \quad (1.19)$$

L'equazione (1.19) porta alla conclusione che nei casi in cui $|\psi\rangle$ è un autovettore di A (il cui autovalore è necessariamente $\langle A \rangle$), lo scarto quadratico medio ΔA è 0, poiché

$$\Delta A = 0 \Leftrightarrow (A - \langle A \rangle) \psi = 0 \Leftrightarrow A \psi = \langle A \rangle \psi.$$

Sistemi in questi stati particolari sono chiamati di *conoscenza assoluta* per questa osservabile.

Valore medio e fluttuazione dei fotoni polarizzati

Si può proporre un esempio pratico nel quale si usano le formule appena spiegate. Sia un sistema composto da una sorgente che emette fotoni polarizzati con un angolo $+45^\circ$ su un polarizzatore orizzontale. Supponendo uno stato iniziale del sistema descritto dal vettore $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si vuole calcolare il valore medio per l'osservabile σ_z . Applicando l'equazione (1.16) si ottiene il valore medio:

$$\langle \sigma_z \rangle = \langle + | \sigma_z + \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

oppure:

$$\langle \sigma_z \rangle = 1 \text{ Prob}\{\sigma_z = +1\} - 1 \text{ Prob}\{\sigma_z = -1\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad .$$

Si può ora calcolare lo scarto quadratico medio:

$$\Delta \sigma_z = \sqrt{\langle \sigma_z^2 \rangle - \langle \sigma_z \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - 0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad . \quad (1.20)$$

L'equazione (1.20) mostra che il sistema analizzato non è di conoscenza assoluta.

⁵Passaggio possibile poiché le matrici A sono autoaggiunte e vale la proprietà $(A - \langle A \rangle)^* = (A - \langle A \rangle)$.

1.7 Osservabili incompatibili

Si dice che due osservabili A e B sono incompatibili se misurando B si perturba lo stato precedente di A . Matematicamente si definisce l'incompatibilità-compatibilità in questo modo:

- se $[A, B] \neq 0$ allora A e B sono incompatibili, esiste infatti un $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ per il quale il risultato di B perturba la precedente misurazione di A ;
- se $[A, B] = 0$ allora A e B sono compatibili, non esiste infatti un $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ per il quale il risultato di B perturba la precedente misurazione di A .

Osservabili incompatibili dei fotoni polarizzati

Sia dato un sistema avente una sorgente che emette dei fotoni su due PBS posti uno di fronte all'altro; il primo ha un angolo di polarizzazione $\alpha = +45^\circ$ ed il secondo è caratterizzato da $\alpha = 0^\circ$. Si calcola allora $[\sigma_x, \sigma_z]$, poiché, come visto alla sezione 1.3.2, queste matrici di Pauli sono associate alle osservabili dei polarizzatori:

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_z] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad . \end{aligned}$$

σ_x e σ_z sono quindi due osservabili incompatibili.

1.8 Evoluzione temporale

Nelle sezioni precedenti si è considerato il sistema fisico a un istante ben determinato oppure in un processo di misurazione. Si prende ora in considerazione l'evoluzione temporale dello stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, notando con l'indice t la dipendenza temporale dello stato $|\psi_t\rangle$.

Si considera un'esperienza test (associata alla proprietà \mathcal{P}_t) definita all'istante finale t . Si suppone che la risposta del test \mathcal{T}_t sia "sì" con certezza, allora $|\psi_t\rangle \in E_t$ e il vettore $|\varphi_t\rangle \in E_t^\perp$ è ortogonale a $|\psi_t\rangle$. Nel caso in cui l'evoluzione è *deterministica* si può associare a \mathcal{T}_t un'esperienza test \mathcal{T}_0 (associata alla proprietà E_0) definita all'istante iniziale $t_0 = 0$ in modo tale che la risposta di \mathcal{T}_0 è "sì" con certezza. Allora $|\psi_0\rangle \in E_0$ e $|\varphi_0\rangle \in E_0^\perp$, e la loro evoluzione deterministica è data da $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_t\rangle$ e $|\varphi_0\rangle \rightarrow |\varphi_t\rangle$. Si può anche ragionare con la negazione, infatti se l'esperienza test $\neg\mathcal{T}_t$ dà la risposta "sì" con certezza allora lo stato è dato da $|\varphi_t\rangle \in E_t^\perp$; poiché $\neg\mathcal{T}_0$ darà la risposta "sì" con certezza, essa è l'esperienza test associata a $\neg\mathcal{T}_t$ e quindi $|\varphi_0\rangle \in E_0^\perp$.

Per capire meglio si osservi lo schema alla figura 1.8.

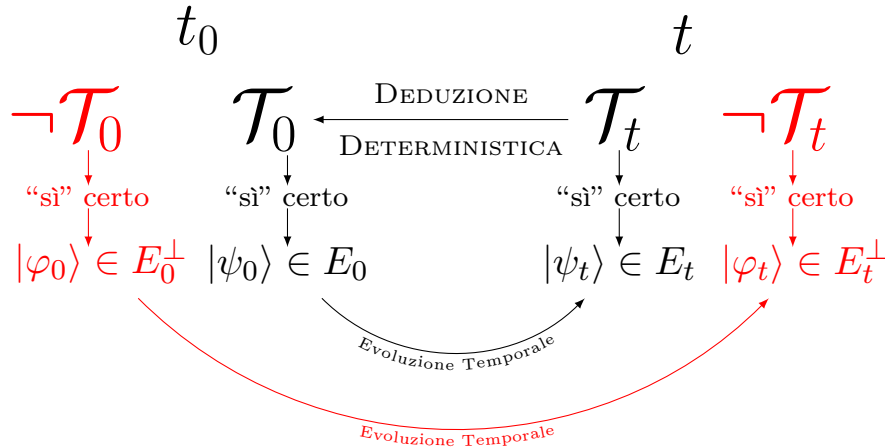


Figura 1.8: L'evoluzione temporale schematizzata.

Dato che

$$\langle \varphi_t | \psi_t \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \varphi_0 | \psi_0 \rangle = 0 \quad (1.21)$$

si può concludere che due stati iniziali ortogonali devono restare ortogonali nell'evoluzione temporale deterministica. Matematicamente l'evoluzione temporale sarà data da una matrice U_t tale che la conclusione precedente sia verificata. Un approfondimento dell'equazione (1.21) porta a

$$\langle \psi_t | \varphi_t \rangle = \langle U_t \psi_0 | U_t \varphi_0 \rangle = \langle U_t^* U_t \psi_0 | \varphi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \varphi_0 \rangle \quad (1.22)$$

da cui si deduce che le matrici U_t devono rispettare la condizione $U_t^* U_t^{-1} = I \Leftrightarrow U_t^* = U_t^{-1}$, caratteristica delle matrici unitarie. La caratterizzazione di unitarietà delle matrici che identificano l'evoluzione temporale è dunque fondamentale, solo così infatti il prodotto scalare degli stati rimane invariato.

Regola 6

L'evoluzione temporale degli stati è data da

$$|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$$

dove $|\psi_t\rangle$ è lo stato al tempo t , $|\psi_0\rangle$ lo stato iniziale ($t_0 = 0$) e $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ è un insieme di operatori unitari.

Osservazioni

- L'evoluzione temporale è rappresentata da una matrice unitaria, ma il tempo non è sempre esplicito, ciò significa che dato lo stato $|\psi\rangle$ prima dell'apparato sperimentale, lo stato dopo di esso sarà dato da $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ dove U è una matrice unitaria.

- Conoscendo lo stato ad un istante t_0 è possibile determinare in modo univoco quale sarà lo stato all'istante $t > t_0$, dunque l'evoluzione di uno stato in un sistema quantistico è un *processo deterministico*.

Capitolo 2

Interferenze quantistiche ad una particella

DOPO aver stabilito le basi necessarie per muoversi nel campo della fisica quantistica, si passa all'analisi dei fenomeni più strabilianti e controintuitivi di questa teoria.

Questo capitolo tratta il fenomeno delle interferenze quantistiche ad una particella. L'importanza della sottolineatura della presenza di una sola particella durante l'esperimento apparirà più chiara nel capitolo 3. Si tratta di un fenomeno, per così dire, introduttivo a quello che seguirà nei prossimi capitoli.

2.1 Motivazioni sperimentali

Già nei primi anni dell'avvento della fisica quantistica, si osservò un comportamento poco usuale delle particelle subatomiche. Nel 1927 DAVISSON e GERMER eseguirono degli esperimenti [15] nei quali venivano inviati degli elettroni verso una fenditura. Le aspettative derivanti dalla fisica classica – ovvero che l'elettrone, poiché di natura corpuscolare, attraversi la fenditura senza avvenimenti particolari e percorrendo traiettorie rettilinee dalla fonte allo schermo – non vennero confermate, si osservarono infatti comportamenti simili a quelli della diffrazione delle onde. Più tardi nel 1961 si svolsero anche esperimenti con due o più fenditure, ottenendo risultati analoghi [36].

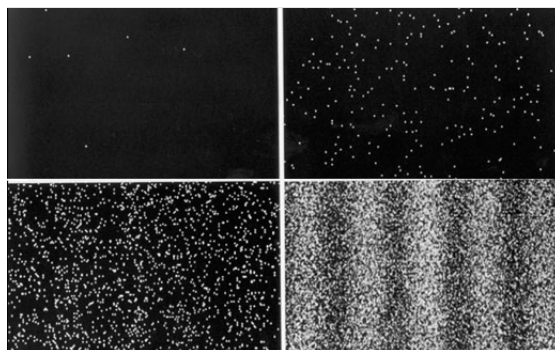


Figura 2.1: Risultati di un esperimento di interferenza a doppia fenditura con 8, 270, 2'000, 160'000 elettroni [34].

2.1.1 Dualismo onda-particella

Il fenomeno descritto sopra, apparentemente controintuitivo, potrebbe venir interpretato col *dualismo onda-particella*.

Con l'articolo sull'effetto fotoelettrico [18]¹, nel 1905 EINSTEIN associa ad ogni onda elettromagnetica di frequenza ν e vettore d'onda \vec{k} una particella (il fotone) di energia $E = h\nu$ e quantità di moto $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Nel 1924, DE BROGLIE approfondì l'argomento con la sua tesi di dottorato [16] postulando che ad ogni particella libera di energia E e quantità di moto \vec{p} è possibile associare un'onda di frequenza $\nu = \frac{E}{h}$ e di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{\|\vec{p}\|}$.

Se ne potrebbe dedurre che il comportamento d'interferenza osservato negli esperimenti con gli elettroni è interpretabile sulla base delle caratteristiche tipicamente ondulatorie associabili ad essi dalla teoria di DE BROGLIE² chiamata appunto "dualismo onda-particella".

È però importante notare che il dualismo onda-particella non è la causa delle interferenze bensì solo un modello interpretativo applicabile dopo l'esperimento che non ne chiarisce le cause.

Nel modello classico la figura d'interferenza è osservata in ogni singolo istante dell'esperienza, questo poiché l'onda si divide in due nella fenditura e si ricombina creando queste figure di diffrazione.

A livello microscopico però la particella non può dividersi in due e di principio nell'esperimento è presente sempre solo una particella; la figura di interferenza è ricostruita solo a esperienza terminata, risulta dunque chiaro che l'origine del fenomeno è sicuramente diverso. Il dualismo onda-particella rimane un "modo" classico di interpretare la Natura. A tale proposito è interessante la seguente citazione di LÉVY-LEBLOND.

«[...] Vous comprenez aussi pourquoi on a pendant longtemps caractérisé les choses suivant une terminologie qui se révèle aujourd'hui inadaptée, mais que j'explique pour la critiquer, qui a été une façon de parler au début du XX^e siècle (mais ça a persisté et ça persiste encore dans pas mal de livres de vulgarisation, voire d'enseignement) de parler de la dualité ondes-corpuscules dans le cadre de la théorie quantique. Ça s'explique historiquement, puisque historiquement on découvre effectivement que ce qu'on croyait être un corpuscule: l'électron, ah! Présente des aspects ondulateurs, que ce que l'on croyait être une onde: les ondes électromagnétiques, ah! Présente un aspect corpusculaire. On s'est dit: "Tiens, c'est tantôt l'un, tantôt l'autre, c'est bizarre quand même, il y a une dualité tout de même, tantôt l'un, tantôt l'autre." Ceci n'est pas une bonne façon de penser, d'abord c'est contradictoire, un objet ne peut pas être tantôt un type d'objet, tantôt un autre type d'objet. Et il faut bien se rendre à l'évidence, après quelques décennies, la réalité c'est que les objets quantiques, les quantons, ce ne sont ni des ondes ni des corpuscules, mais que, dans certaines conditions, ils peuvent ressembler à des ondes et dans certaines autres conditions, ils peuvent ressembler à

¹Ricerca che gli valse il premio Nobel per la fisica nel 1921 [42].

²In linea di principio anche il disegno di diffrazione della luce (considerando esperimenti con intensità sufficientemente bassa da consentire la presenza di un solo fotone nell'esperimento) è attribuibile a questo fenomeno, tuttavia la natura ondulatoria delle luce era già stata dimostrata [35], risulta dunque meno curioso.

des corpuscules.

Quand on était au début de la théorie quantique les conditions de types classiques prévalaient, c'est-à-dire que la plupart des objets apparaissaient soit comme corpuscules soit comme ondes, mais depuis que notre connaissance du monde quantique s'est approfondie et que la sophistication des expérimentateurs s'est donnée libre cours, la plupart des quantons que nous manipulons se présentent d'une façon qui n'est ni ondulatoire ni corpusculaire et ils révèlent leur nature propre en plein. [...] Nous avons exactement la même chose ici, si j'ose dire, les quantons sont les ornithorynques, en ce sens que ce ne sont que des aspects très particuliers qui peuvent nous les faire prendre soit pour des particules, soit pour des ondes et que leur nature propre est d'un autre genre.» [39]

2.1.2 Interferenze e informazione “which-way”

Un altro fenomeno strano si accosta alle interferenze ad una particella. In tutti i casi in cui si è cercato di stabilire da quale delle due fenditure passasse la particella (da qui la denominazione “*which-way*” experiments), la figura di interferenza scompariva. Nel 1991 è stato ideato un *Gedanken Experiment*³ che permettesse di osservare le interferenze e avere l'informazione “which-way” eliminando la possibilità che la scomparsa della figura d'interferenza non fosse intrinseca bensì legata a problemi di tecnologia [47].

L'esperimento è concepito come segue. Una sorgente emette atomi che incidendo sull'interferometro a doppia fenditura danno luogo ad interferenze quantistiche misurate sullo schermo. Per determinare da che fenditura passa l'atomo si procede nel modo seguente: prima della doppia fenditura si posizionano due cavità precedute da un congegno laser. Quando gli atomi vengono inviati, vengono eccitati dal laser e passando in una delle due cavità si diseccitano emettendo un fotone. Per determinare da che parte passa l'atomo è allora sufficiente rilevare in che cavità è stato emesso il fotone. La schematizzazione originale è proposta alla figura 2.2.

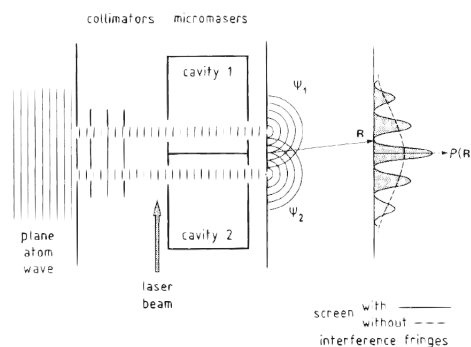


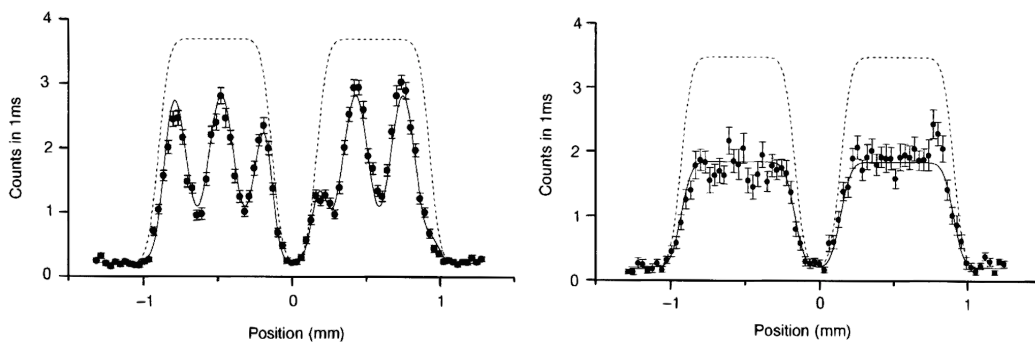
Figura 2.2: Schematizzazione del *Gedanken Experiment* [47].

³«Esperimento volto a testare, corroborare o confutare un'ipotesi o teoria, che ha un carattere immaginario e non empirico perché limitazioni pratiche lo rendono irrealizzabile» [50].

La cosa fondamentale da osservare è che in questo esperimento il fatto di poter determinare la traiettoria dell'atomo non influenza in modo determinante lo stesso.

Nel 1998 un esperimento [17] cercò dunque di determinare da quale delle due fenditure passasse la particella in un esperimento a doppia fenditura in laboratorio come proposto in [47]. Ciò che caratterizza questa ricerca è la determinazione che la scomparsa del disegno d'interferenza non è attribuibile a un'interazione con gli strumenti dell'esperimento che ne modificerebbe lo stato.

I risultati sperimentali (riassunti nelle immagini 2.3) mostrarono che le interferenze quantistiche spariscono quando è possibile determinare da che parte passa la particella, anche se essa non viene perturbata.



(a) Figura d'interferenza senza informazione “wich-way”. (b) Figura d'interferenza distrutta a causa dell'informazione “wich-way”.

Figura 2.3: Risultati degli esperimenti con e senza informazione “wich-way”[17].

2.2 L'interferometro di Mach-Zehnder⁴

I risultati discussi nel paragrafo precedente sono sorprendenti e non vengono spiegati da nessuna teoria classica. La teoria quantistica fornisce una spiegazione più che esaustiva di questi fenomeni, essa esige però una matematizzazione del processo. Si costruirà dunque un modello semplice – che permette di analizzare le interferenze ad una particella e che faccia apparire gli stessi fenomeni descritti nel paragrafo precedente – che si identifica con l'*interferometro di Mach-Zehnder*.

2.2.1 L'apparecchio

Come illustra la figura 2.4, l'apparecchio è costituito da una fonte che invia ad esempio fotoni nell'interferometro che è composto da due separatori di fascio (beam splitter BS_1 e BS_2) e da due specchi (S_A e S_B). Alla fine dell'apparecchio sono posti due detettori di particelle (D_X e D_Y) che contano le particelle che vi giungono. È possibile aggiungere un elemento ϕ che permette di differenziare i due cammini A e B che può prendere la particella.

⁴Le informazioni sono tratte e in parte ritrattate da [22].

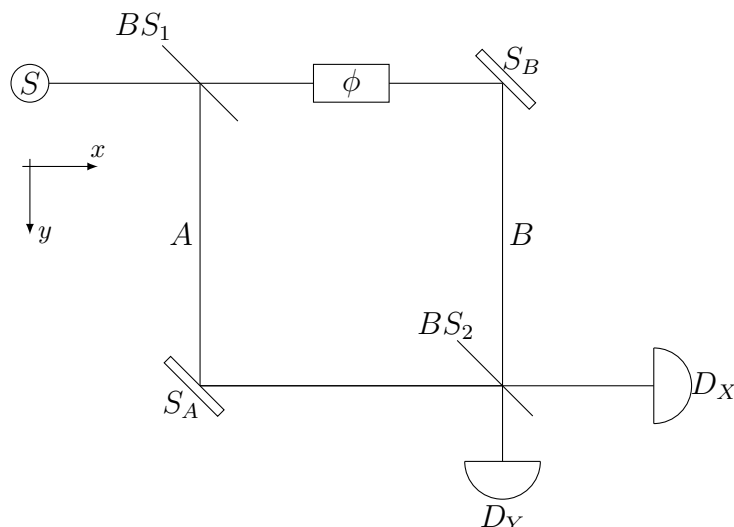


Figura 2.4: L'interferometro di Mach-Zehnder.

2.2.2 Modello, stati e osservabili

L'*interferometro di Mach-Zehnder* permette di fare astrazione da tutte le caratteristiche della particella in essa inviato fuorché la sua direzione di propagazione, che può essere – secondo il sistema di coordinate dell'immagine 2.4 – in x o in y . Si tratta dunque di un sistema a due livelli il quale spazio di Hilbert è

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \quad . \quad (2.1)$$

Gli stati puri caratterizzanti le due possibili direzioni di propagazione, che sono in relazione a proprietà ortogonali, sono semplicemente i due vettori ortogonali

$$|\psi_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

I proiettori che corrispondono ai sottospazi vettoriali generati da $|\psi_x\rangle$ e $|\psi_y\rangle$

$$X = P_{|\psi_x\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = P_{|\psi_y\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono associati rispettivamente alle proprietà “propagazione in direzione x ” e “propagazione in direzione y ”.

Le osservabili associate ai detettori D_X e D_Y misurano la direzione di propagazione delle particelle. In essi una particella può soltanto essere rilevata o non rilevata, si associa dunque a questi due esiti i valori 1 e 0.

Si costruiscono dunque le matrici rappresentanti gli osservabili associati ai detettori D_X e D_Y

$$1X + 0Y = X \quad \text{e} \quad 0X + 1Y = Y$$

che risultano essere le stesse X e Y .

Riassumendo gli stati sono rappresentati dai vettori

$$|\psi_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

e le osservabili dalle matrici

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.3)$$

2.2.3 Evoluzione temporale dello stato

Il completamento della modellizzazione richiede la descrizione dell'effetto dei separatori di fascio, degli specchi e dell'eventuale "fattore ϕ " sullo stato delle particelle. Questi elementi modificano lo stato iniziale $|\psi_{in}\rangle$ nello stato $|\psi_{out}\rangle$ dopo l'elemento. La modifica avviene, come visto alla sezione 1.8, attraverso una matrice unitaria U .

Beam splitter

La matrice, poiché unitaria e dunque per la quale vale che

$$U_{BS}^* = U_{BS}^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det U_{BS}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

è del tipo

$$U_{BS} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad .$$

considerando che $\det U_{BS} = 1$, questa condizione non porta una perdita di generalità in quanto quando la matrice sarà applicata ad uno stato, quest'ultimo sarà linearmente dipendente tramite un fattore $\frac{1}{\det U_{BS}}$ dallo stato considerando $\det U_{BS} = 1$.

Una particella di stato iniziale $|\psi_{in}\rangle = |\psi_x\rangle^5$ dopo il beam splitter sarà caratterizzata dallo stato di sovrapposizione

$$|\psi_{out}\rangle = \alpha|\psi_x\rangle + \beta|\psi_y\rangle \quad \text{con} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

dove:

$$t = |\alpha|^2 = |\langle\psi_x|\psi_{out}\rangle|^2 = \text{Prob}\{X = 1\}$$

è la probabilità che la particella continui orizzontalmente e

$$r = |\beta|^2 = |\langle\psi_y|\psi_{out}\rangle|^2 = \text{Prob}\{Y = 1\}$$

è la probabilità che la particella continui verticalmente. Si ha chiaramente che $t + r = 1$ poiché la particella può solo essere trasmessa o riflessa.

⁵Il ragionamento è identico – e conclude con una matrice identica – per una particella con $|\psi_{in}\rangle = |\psi_y\rangle$.

Si possono scrivere i fattori α e β dello stato di superposizione in funzione dei valori di t e r come segue⁶

$$\alpha = |\alpha|e^{i\varphi_1} = \sqrt{t} e^{i\varphi_1} \quad \text{e} \quad \beta = |\beta|e^{i\varphi_2} = \sqrt{r} e^{i\varphi_2}$$

con $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$. Fattori che inseriti nell'equazione dello stato danno:

$$|\psi_{out}\rangle = \sqrt{t} e^{i\varphi_1} |\psi_x\rangle + \sqrt{r} e^{i\varphi_2} |\psi_y\rangle \quad .$$

Poiché $|\psi\rangle$ e $e^{-i\varphi_1}|\psi\rangle$ descrivono lo stesso stato (essendo linearmente dipendenti ed entrambi normati), moltiplicando per $e^{-i\varphi_1}$ si ottiene

$$e^{-i\varphi_1} |\psi_{out}\rangle = \sqrt{t} |\psi_x\rangle + \sqrt{r} e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} |\psi_y\rangle$$

e ponendo $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$ si ottiene

$$|\psi_{out}\rangle = \sqrt{t} |\psi_x\rangle + \sqrt{r} e^{i\varphi} |\psi_y\rangle$$

In questa equazione il valore φ identifica la fase relativa tra lo stato “riflesso” e “trasmesso”.

Dunque, lo stato iniziale $|\psi_{in}\rangle = |\psi_x\rangle$ evolve nello stato $|\psi_{out}\rangle = \sqrt{t} |\psi_x\rangle + \sqrt{r} e^{i\varphi} |\psi_y\rangle$ dopo il beam splitter. Si ottiene quindi che

$$U_{BS}\psi_{in} = \psi_{out} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{r} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ -\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ \sqrt{r} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a = \sqrt{t} \\ b = -\sqrt{r} e^{-i\varphi} \end{cases} \quad .$$

La matrice unitaria che identifica l'evoluzione temporale di un beam splitter è dunque:

$$U_{BS}(r, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & -\sqrt{r} e^{-i\varphi} \\ \sqrt{r} e^{i\varphi} & \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad .$$

È importante che l'apparecchio sia simmetrico (ovvero che la fase relativa tra lo stato “riflesso” e “trasmesso” è uguale indipendentemente dal fatto che $|\psi_{in}\rangle$ è $|\psi_x\rangle$ o $|\psi_y\rangle$). Si pone dunque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ così che $e^{i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ e $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$. Si può scrivere la matrice in funzione del solo valore di r ottenendo:

$$U_{BS}(r) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-r} & i\sqrt{r} \\ i\sqrt{r} & \sqrt{1-r} \end{pmatrix} \quad .$$

Si sta creando un sistema nel quale le probabilità $\text{Prob}\{X = 1\}$ e $\text{Prob}\{Y = 1\}$ sono uguali, ovvero un beam splitter equilibrato. A $t + r = 1$ si aggiunge dunque il parametro $t = r$, da cui $t = r = \frac{1}{2}$. La matrice che rappresenta l'evoluzione temporale dei beam splitter usati in questo sistema è perciò:

$$U_{BS}(r = \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.4)$$

⁶L'aggiunta di $e^{i\varphi}$ porta α e β nell'usuale forma polare dei numeri complessi, dove $|\alpha|$ il modulo e φ l'argomento.

Specchi

Gli specchi S_A e S_B possono essere concepiti come beam splitter non equilibrati per i quali vale (sempre ipotizzando uno stato iniziale $|\psi_{in}\rangle = |\psi_x\rangle$) $r = 1$ e $t = 0$. Le matrici rappresentanti gli specchi sono quindi:

$$U_S = U_{BS}(r = 1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.5)$$

Modifica di un cammino ϕ

La modifica del cammino non ha un influsso sulla direzione di propagazione della particella, lo stato di essa rimarrà dunque invariato. La modifica che questo elemento appone allo stato è dunque tale da rendere $|\psi_{out}\rangle$ linearmente dipendente da $|\psi_{in}\rangle$:

$$|\psi_{out}\rangle = e^{i\phi}|\psi_{in}\rangle .$$

Su questa considerazione si calcola la matrice $U(\phi)$: ipotizzando uno stato iniziale $|\psi_{in}\rangle = |\psi_x\rangle$, $U(\phi)$ deve essere tale che

$$|\psi_{out}\rangle = U|\psi_{in}\rangle \Leftrightarrow e^{i\phi}|\psi_x\rangle = U|\psi_x\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = e^{i\phi} \\ c = 0 \end{cases} .$$

Su una particella di stato iniziale $|\psi_{in}\rangle = |\psi_y\rangle$ esso non deve avere nessun effetto, dunque

$$|\psi_y\rangle = U|\psi_y\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases} .$$

La matrice (unitaria) che descrive la modifica del cammino lungo la direzione x è quindi

$$U(\phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.6)$$

La matrice (2.6) modifica lo stato del sistema lasciandolo linearmente dipendente a quello iniziale (e due stati linearmente dipendenti identificano lo stesso stato). Ma prima della modifica apportata da ϕ , lo stato è di tipo di superposizione e ϕ agisce solo sull'elemento dipendente da $|\psi_x\rangle$:

$$U(\phi)|\psi_{in}\rangle = U(\phi) [\alpha|\psi_x\rangle + \beta|\psi_y\rangle] = U(\phi)\alpha|\psi_x\rangle + \beta|\psi_y\rangle$$

Dunque lo stato finale dopo ϕ è diverso da quello iniziale.

2.2.4 Studio delle interferenze

Dalla moltiplicazione matriciale delle matrici unitarie (2.4), (2.5) e (2.6) si ottiene la matrice unitaria U_{MZ} che descrive l'evoluzione temporale dell'intero

interferometro:

$$\begin{aligned}
 U_{MZ} &= U_{BS}U_SU(\phi)U_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\phi} & -i(1 - e^{i\phi}) \\ i(1 - e^{i\phi}) & 1 + e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

La matrice (2.7) permette di studiare a fondo il principio di funzionamento di questo interferometro e trarne importanti conclusioni. Qui di seguito si trova l'analisi dei casi più significativi.

Caso più semplice: $\phi = 0$

Lo stato iniziale del sistema è $|\psi_x\rangle$ e il fattore ϕ è appunto nullo. Lo stato finale allora corrisponde a

$$\begin{aligned}
 |\psi_{out}\rangle &= U_{MZ}|\psi_{in}\rangle = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^0 & -i(1 - e^0) \\ i(1 - e^0) & 1 + e^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{7}{\iff} |\psi_{out}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

e conseguentemente le probabilità di osservare la particella in D_X e D_Y sono

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}\{X = 1\} &= |\langle\psi_x|\psi_{out}\rangle|^2 = 1 \\
 \text{Prob}\{Y = 1\} &= |\langle\psi_y|\psi_{out}\rangle|^2 = 0 \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Il 100% delle particelle arriva al detettore D_X . Questo risultato è sorprendente e controintuitivo, infatti una supposizione normale direbbe che la distribuzione è divisa a metà tra i due detettori.

Caso $\phi \neq 0$

Nella situazione in cui il fattore ϕ non è nullo e lo stato iniziale è $|\psi_{in}\rangle = |\psi_x\rangle$, lo stato finale è

$$\begin{aligned}
 |\psi_{out}\rangle &= U_{MZ}|\psi_{in}\rangle = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\phi} & -i(1 - e^{i\phi}) \\ i(1 - e^{i\phi}) & 1 + e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{8}{=} \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\phi}{2}} \cos(\frac{\phi}{2}) \\ -e^{i\frac{\phi}{2}} \sin(\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix} \\
 &= -e^{i\frac{\phi}{2}} \cos(\frac{\phi}{2})|\psi_x\rangle - e^{i\frac{\phi}{2}} \sin(\frac{\phi}{2})|\psi_y\rangle \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

e conseguentemente le probabilità di osservare la particella in D_X e D_Y sono

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}\{X = 1\} &= |\langle\psi_x|\psi_{out}\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\
 \text{Prob}\{Y = 1\} &= |\langle\psi_y|\psi_{out}\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

⁷Questo passaggio è possibile poiché due vettori linearmente dipendenti identificano lo stesso stato, si può dunque eliminare il fattore -1 .

⁸Si utilizza qua la relazione $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ e $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$.

Si nota che introducendo questa modifica del cammino i risultati dipendono ϕ . In particolare si ha una probabilità – di osservare la particella in D_Y o D_X – periodica. La situazione è opposta, a quella senza modifica del cammino, per $\phi = \pi$ e torna uguale per $\phi = 2\pi$.

2.2.5 “Which-way”

Si pensi ora di introdurre un detettore \tilde{D}_X in uno dei cammini, per esempio quello B , tra il primo beam splitter e lo specchio. Si prenda anche $\phi = 0$. Il detettore rileva le particelle che lo attraversano, ma non le ferma lasciandole proseguire verso i due detettori D_X e D_Y . La situazione è illustrata nella figura 2.5.

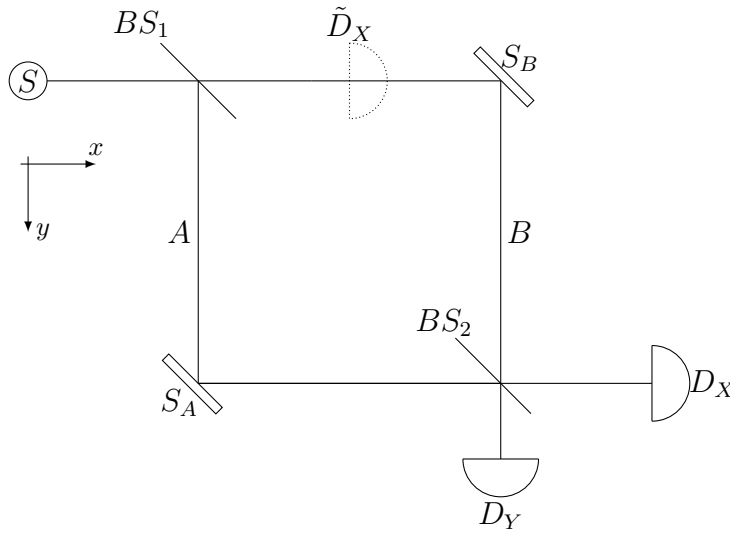


Figura 2.5: L’interferometro di Mach-Zehnder con detettore \tilde{D}_X su B .

La misura avvenuta con questo detettore \tilde{D}_X genera una modifica dello stato. Subito dopo il beam splitter BS_1 , lo stato è rappresentato da una superposizione come illustra l’applicazione della matrice rappresentante l’evoluzione temporale del beam splitter (2.4) allo stato iniziale $|\psi_{in}\rangle = |\psi_x\rangle$:

$$|\psi_{out}\rangle = U_{BS}|\psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x\rangle + i|\psi_y\rangle) \quad .$$

Ma dopo la misurazione lo stato è di conoscenza assoluta per X (e Y). Infatti lo stato è $|\psi\rangle = |\psi_x\rangle$ se il detettore ha rilevato la particella, mentre $|\psi\rangle = |\psi_y\rangle$ in caso contrario.

Si può rimodellizzare questa situazione in un modo nuovo. Dato che lo stato è di conoscenza assoluta – se si introduce questo detettore \tilde{D}_X – si può ridisegnare l’interferometro cancellando tutto ciò che si trova prima del detettore. Si crea dunque una situazione come quella rappresentata dalla figura 2.6, dove la situazione 2.6(a) si realizza quando la particella viene rilevata mentre la situazione 2.6(b) quando questo non succede.

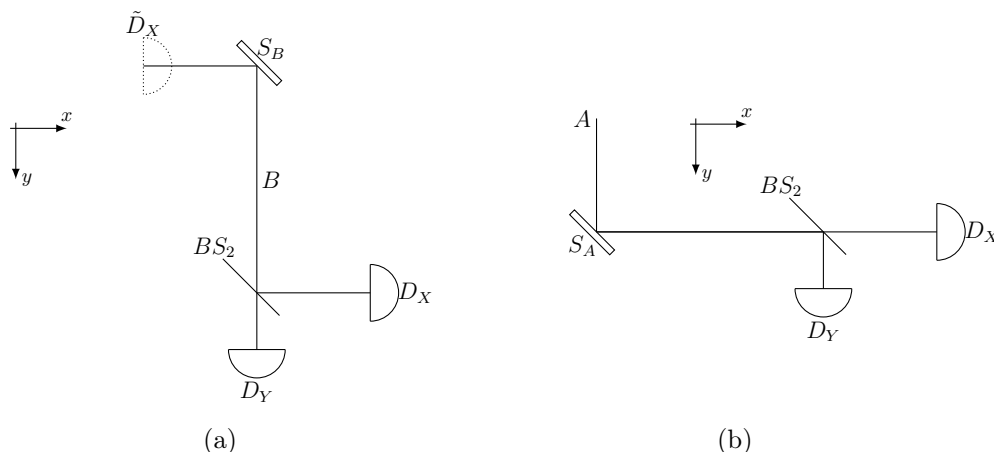


Figura 2.6: Le due possibili situazioni nell'interferometro di Mach-Zehnder con detettore \tilde{D}_X .

Calcolare le probabilità di rilevare la particella in D_X o D_Y diventa, con questa nuova modellizzazione, semplice. L'evoluzione temporale dello stato dopo la detezione in \tilde{D}_X o meno porta a

$$|\psi_{x,out}\rangle = U_{BS}U_S|\psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$|\psi_{y,out}\rangle = U_{BS}U_S|\psi_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Dagli stati (2.12), che identifica l'evoluzione temporale della particella se è stata detettata in \tilde{D}_X , e (2.13), che identifica l'evoluzione temporale della particella se non è stata detettata in \tilde{D}_X , si calcolano le probabilità di detezione in X e Y sia per detezione avvenuta che no

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{X = 1\}_{|\psi_{x,out}\rangle} &= |\langle\psi_x|\psi_{x,out}\rangle|^2 = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \right. \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}\{Y = 1\}_{|\psi_{x,out}\rangle} &= |\langle\psi_y|\psi_{x,out}\rangle|^2 = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \right. \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}\{X = 1\}_{|\psi_{y,out}\rangle} &= |\langle\psi_x|\psi_{y,out}\rangle|^2 = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right. \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}\{Y = 1\}_{|\psi_{y,out}\rangle} &= |\langle\psi_y|\psi_{y,out}\rangle|^2 = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right. \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il risultato ottenuto in (2.14) è – come si è visto nella figura 2.5 – uguale al caso nel quale è presente un solo beam splitter e, dunque, le probabilità sono equi-distribuite.

Questo risultato è però totalmente diverso da quello ottenuto per l'interferometro senza conoscenza del cammino (2.9). Si può dunque concludere che se si vuole conoscere quale cammino prende la particella per arrivare a un determinato detettore, si perdono gli effetti delle interferenze quantistiche ad una particella.

2.3 Interpretazione e considerazioni conclusive⁹

La modellizzazione attraverso l'interferometro di Mach-Zehnder permette di trarre tre importanti conclusioni inerenti le interferenze quantistiche ad una particella.

Delocalizzazione

La differenziazione del cammino (fattore ϕ) determina la proporzione delle particelle rilevate in D_X e D_Y . Se questo fattore è posizionato nel cammino B e ha un valore $\phi = \pi$ tutte le particelle vengono rilevate in D_Y , quindi la modifica di uno dei due cammini influenza il risultato di tutte le particelle, nonostante essa si trovi solo su una dei due possibili cammini. Visto che nell'interferometro passa una sola particella alla volta si possono escludere effetti di urti o altro, si deve perciò constatare che la modifica su uno dei due cammini influisce anche sull'altro. Si parla dunque di particella delocalizzata nei due cammini: è come se potenzialmente esplorasse tutti i cammini (ma non significa però che la particella si divide).

Complementarietà

La conoscenza del cammino preso e gli effetti di interferenza sono due aspetti complementari, non possono dunque manifestarsi contemporaneamente. Si parla di complementarietà, in linea con il principio di complementarietà [12, p.590] presentato da BOHR, il quale enuncia che

«Degli elementi possono apparentemente avere proprietà mutualmente esclusive [...] a dipendenza del quadro sperimentale».¹⁰

Indiscernibilità

Si può prevedere se in un'esperienza appariranno degli effetti di interferenza quantistica grazie al principio di indiscernibilità, il quale enuncia che

«Le interferenze appaiono quando una particella può percorrere più cammini per arrivare allo stesso detettore, e quando questi cammini non sono distinguibili l'uno dall'altro.»¹¹

⁹Le informazioni sono tratte e in parte ritrattate da [22].

¹⁰Libera traduzione da [28, p.112–113].

¹¹Libera traduzione da [46, p.13].

Capitolo 3

Entanglement

IN questo capitolo si passa all'analisi dei sistemi a due particelle. Ci si confronterà con l'entanglement e le correlazioni quantistiche, fenomeni al cuore della fisica quantistica, i quali saranno l'oggetto d'approfondimento nei capitoli successivi.

Le informazioni teoriche¹ e la struttura per questo capitolo sono tratte (se non esplicitato diversamente) da [22].

3.1 Formalismo: Lo spazio prodotto tensoriale

Tutti i risultati ottenuti nelle sezioni da 1.3 a 1.8 sono validi anche in questo contesto, nonostante lo spazio di Hilbert sia un po' differente.

Lo spazio di Hilbert \mathcal{H} che modella lo stato puro di un sistema $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ è dato dallo spazio prodotto tensoriale degli stati che descrivono i singoli sistemi² notato

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Un risultato importante di matematica afferma che: date due basi $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_1} = \{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_m\rangle\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_2} = \{|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$ di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , allora una base di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è data da

$$\mathcal{B} = \{|\psi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle, |\psi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle \otimes |\varphi_n\rangle\} \Rightarrow \dim \mathcal{H} = m \cdot n$$

Stati

Il vettore più generale elemento di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} |\psi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle . \quad (3.1)$$

¹È stata operata una trasposizione dallo spin alla polarizzazione.

²La natura teorica matematica del prodotto tensoriale esula dagli scopi di questo testo, esso verrà solo utilizzato in modo formale per descrivere i sistemi a due particelle (basta sapere che gode delle usuali proprietà della moltiplicazione, ma non è commutativo [24]). Nonostante ciò, a scopo di completezza, nell'appendice A è presente il formalismo matematico elementare per i calcoli di fisica quantistica.

La forma

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (3.2)$$

non è infatti una forma esaustiva, poiché si può sempre scrivere uno stato puro $|\Psi\rangle$ come combinazione lineare di stati del tipo $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ come già visto alla sezione 1.3.1. Dunque non tutti gli stati si possono scrivere in questa forma fattorizzata. Per esempio, dati gli stati $|\psi_i\rangle, |\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ ($i = 1, 2$), supponendo che essi siano ortogonali, il vettore

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle) \quad (3.3)$$

non ammette una scrittura del tipo $|\chi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$ con $|\chi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$. Tutti³ gli stati di \mathcal{H} che non possono essere scritti nella forma dell'equazione (3.2) sono chiamati *stati intrecciati o di entanglement*, essi sono gli stati di \mathcal{H} non fattorizzabili.

Applicazione alla polarizzazione

Sia lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ che descrive le proprietà di polarizzazione di due fotoni.

Sia data la base

$$\mathcal{B} = \{|V^a\rangle \otimes |V^b\rangle, |V^a\rangle \otimes |H^b\rangle, |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle, |H^a\rangle \otimes |H^b\rangle\}$$

e sia $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ lo stato combinazione lineare (o di sovrapposizione) dato da

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \quad (3.4)$$

allora lo stato (3.4) è uno stato intrecciato che non può esser fattorizzato nella forma dell'equazione (3.2).

Infatti supponendo di poter scrivere lo stato (3.4) come $|\psi^a\rangle \otimes |\psi^b\rangle$ e sia ($\alpha = a, b$)

$$|\psi^\alpha\rangle = \sum_{i=H,V} \lambda_i^\alpha |i^\alpha\rangle \quad \lambda_i^\alpha \in \mathbb{C},$$

allora lo sviluppo dell'espressione $|\psi^a\rangle \otimes |\psi^b\rangle$ da

$$\begin{aligned} |\psi^a\rangle \otimes |\psi^b\rangle &= \sum_{i=H,V} \lambda_i^a |i^a\rangle \otimes \sum_{j=H,V} \lambda_j^b |j^b\rangle \\ &= \sum_{i=H,V} \sum_{j=H,V} \lambda_i^a \lambda_j^b |i^a\rangle \otimes |j^b\rangle \\ &= \lambda_V^a \lambda_V^b |V^a\rangle \otimes |V^b\rangle + \lambda_V^a \lambda_H^b |V^a\rangle \otimes |H^b\rangle \\ &\quad + \lambda_H^a \lambda_V^b |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle + \lambda_H^a \lambda_H^b |H^a\rangle \otimes |H^b\rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.5)$$

³La condizione di ortogonalità sopraindicata non è necessaria.

Comparando le equazioni (3.4) e (3.5) otteniamo il seguente sistema di equazioni per i coefficienti λ^α :

$$\begin{cases} \lambda_V^a \lambda_V^b = 0 \\ \lambda_V^a \lambda_H^b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_H^a \lambda_V^b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_H^a \lambda_H^b = 0 \end{cases} . \quad (3.6)$$

Evidentemente il sistema dell'equazione (3.6) non ha nessuna soluzione. Non si può dunque esprimere lo stato (3.4) nella forma fattorizzata $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ ovvero:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \neq |\psi^a\rangle \otimes |\psi^b\rangle. \quad (3.7)$$

3.2 Polarizzazioni intrecciate e correlazioni⁴

Analogamente agli stati di superposizione in un sistema a una particella, gli stati intrecciati in un sistema a due particelle, che sono pure stati di superposizione, manifestano proprietà interessanti. Questa sezione è dedicata allo studio di queste proprietà in un sistema composto da due fotoni.

Lo spazio di Hilbert associato al sistema studiato è

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

mentre lo stato intrecciato studiato è

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) . \quad (3.8)$$

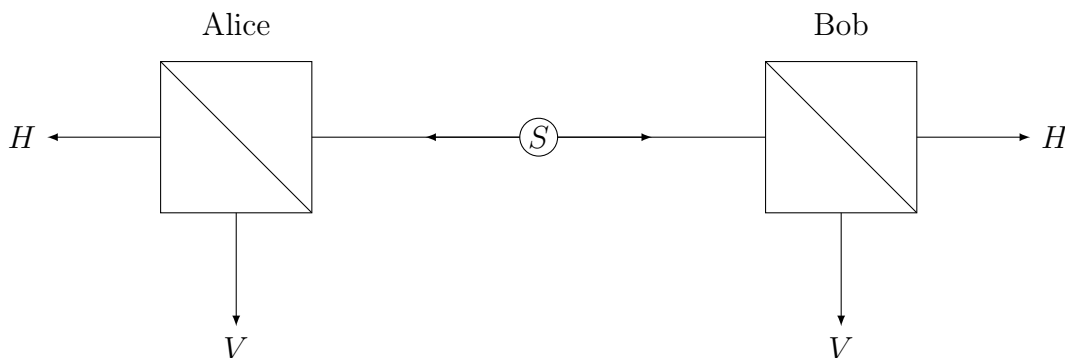


Figura 3.1: Esperimento con due fotoni di stato intrecciato.

⁴La trasposizione dallo spin alla polarizzazione è effettuata con l'aiuto di [24].

Lo stato (3.8) non rappresenta uno stato di conoscenza assoluta né per l'osservabile σ_z associata allo strumento di misura del fotone a (notato $\sigma_z \otimes I$) né per l'osservabile σ_z associata allo strumento di misura del fotone b (notato $I \otimes \sigma_z$). Per rappresentare uno stato di questo tipo dovrebbe essere un autovettore di questa osservabile, ovvero:

$$\sigma_z \otimes I |\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle$$

ma per lo stato (3.8) questa uguaglianza non è possibile. Infatti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sigma_z \otimes I \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z |V^a\rangle \otimes I |H^b\rangle - \sigma_z |H^a\rangle \otimes I |V^b\rangle) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle + |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \neq \lambda \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

e analogamente per l'osservabile $I \otimes \sigma_z$.

Lo stato (3.8) è però uno stato di conoscenza assoluta per l'osservabile $\sigma_z \otimes \sigma_z$ in quanto

$$\begin{aligned} \sigma_z \otimes \sigma_z \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \right] \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) = \lambda \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \end{aligned} \quad (3.10)$$

per $\lambda = -1$.

Si nota quindi che non vi è una conoscenza assoluta per la singola polarizzazione. Negli stati intrecciati non sono dunque definite le proprietà di ogni singolo sottosistema, è però definita una proprietà del sistema complessivo.

I valori $+1$ e -1 delle osservabili σ_z sono dunque entrambi associati a delle proprietà potenziali per il sistema nello stato $|\Psi\rangle$.

Si supponga che Alice (che effettua la misurazione per il fotone a) e Bob (che effettua la misurazione per il fotone b) effettuano una serie di N misurazioni su una serie di particelle nello stato (3.8), nei quali entrambi analizzano la polarizzazione σ_z .

I risultati ottenuti sono comparati nella tabella 3.1.

Si constata che per ogni coppia di risultati è presente una perfetta anti-correlazione: se in una misurazione Alice osserva il valore $+1$ per la prima polarizzazione, allora Bob osserva il valore -1 per la seconda. Le proprietà sono, dunque, potenziali in modo correlato.

Queste coppie di valori correlati sono aleatorie (è impossibile predirne il risultato a priori) e si manifestano con la seguente probabilità:

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = \pm 1 ; I \otimes \sigma_z = \mp 1 \} = \frac{1}{2} .$$

Misurazione	Risultato Alice	Risultato Bob
I	-1	1
II	-1	1
III	1	-1
VI	-1	1
V	1	-1
...
$N-1$	1	-1
N	-1	1

Tabella 3.1: Tabella di confronto dei risultati di Alice e Bob.

L'anti-correlazione risulta chiaramente dal calcolo delle probabilità oggettive legate alle misurazioni delle polarizzazioni:

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = +1 ; I \otimes \sigma_z = -1 \} &= \| P_{|H^a\rangle} \otimes P_{|V^b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] \right\|^2 \\
 &= \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] \right\|^2 = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = -1 ; I \otimes \sigma_z = +1 \} = \| P_{|V^a\rangle} \otimes P_{|H^b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = +1 ; I \otimes \sigma_z = +1 \} = \| P_{|H^a\rangle} \otimes P_{|H^b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = -1 ; I \otimes \sigma_z = -1 \} = \| P_{|V^a\rangle} \otimes P_{|V^b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = 0 \quad (3.14)$$

Dalle equazioni (3.13) e (3.14) risulta chiaro che è impossibile che Alice e Bob osservino lo stesso valore nella misurazione. Le equazioni (3.11) e (3.12) mostrano inoltre che la suddivisione è divisa solo tra le possibilità $(+1, -1)$ e $(-1, +1)$.

Riduzione dello stato

Le (anti-)correlazioni mostrate sopra possono essere intese sulla base della *riduzione dello stato*. Lo stato iniziale (3.8) viene "ridotto" su uno degli stati (3.15) o (3.16) a dipendenza del valore misurato da Alice o Bob. La misurazione $+1$ per l'osservabile $\sigma_z \otimes I$ porta alla seguente modifica dello stato

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \xrightarrow{\sigma_z \otimes I = +1} |\Psi'\rangle = |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle \quad (3.15)$$

mantenendo solo la parte dello stato (3.8) coerente con la misura.

Analogamente per una misura $+1$ per $I \otimes \sigma_z$ si opera una riduzione sullo stato

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \xrightarrow{I \otimes \sigma_z = +1} |\Psi'\rangle = |V^a\rangle \otimes |H^b\rangle . \quad (3.16)$$

Si noti che, come viene eseguita una misurazione, lo stato si modifica in una forma di conoscenza assoluta per entrambe le particelle.

3.3 L'interferometro di Franson modificato

Analogamente a quanto fatto alla sezione 2.2 con l'interferometro di Mach-Zehnder, in questa sezione si studierà un modello semplificato che permette di giungere a delle importanti conclusioni sperimentali a proposito dei sistemi a due particelle.

Il modello, chiamato *interferometro di Franson modificato* illustrato alla figura 3.2, è costruito in modo tale che ognuna delle particelle della coppia emessa si propaga in un interferometro di Mach-Zehnder (si noti infatti che il montaggio è l'unione di due di questi interferometri). La sorgente di particelle accoppiate, notata *EPR*, emette due particelle che partono in direzioni opposte, ma senza che sia possibile sapere quale direzione una particella prende. È emessa sempre solo una coppia di particelle alla volta e in modo che ce ne sia sempre solo una coppia all'interno dell'apparecchio.

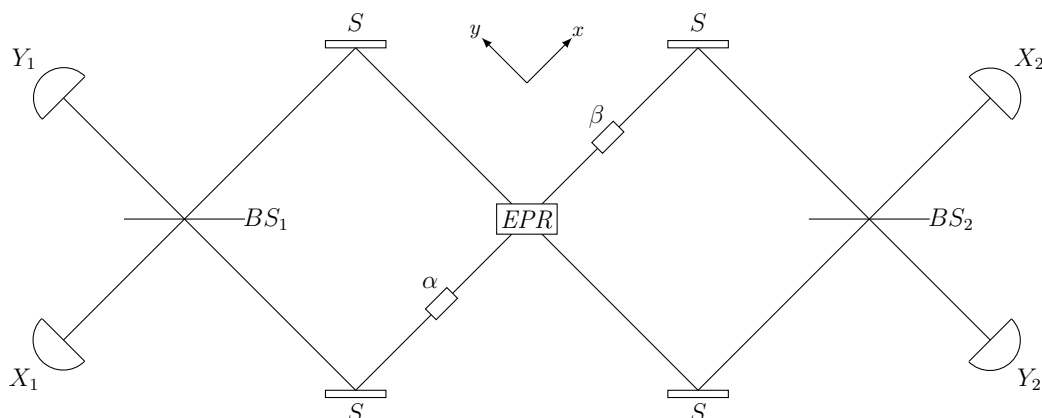


Figura 3.2: L'interferometro di Franson modificato.

3.3.1 Modello, stati e osservabili

Ognuna delle particelle è descritta da uno spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ dove i vettori di stato $|\psi_x\rangle, |\psi_y\rangle$ e $|\varphi_x\rangle, |\varphi_y\rangle$ descrivono la direzione di propagazione. Il modello per le due particelle è dunque lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad .$$

Lo stato iniziale $|\Psi\rangle_{in}$ è lo stato intrecciato per il quale la direzione di propagazione della coppia è definita ma non quella di ogni singola particella:

$$|\Psi\rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_x\rangle \otimes |\varphi_x\rangle + |\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle) \quad . \quad (3.17)$$

Analizzando (3.17) si nota che $|\psi_x\rangle \otimes |\varphi_x\rangle$ rappresenta lo stato del sistema in cui le particelle si propagano nella direzione x , mentre $|\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle$ rappresenta quello in cui si propagano in direzione y . Si può dunque riscrivere l'equazione (3.17) nel modo seguente

$$|\Psi\rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi\rangle_x + |\Psi\rangle_y) \quad (3.18)$$

dove $|\Psi\rangle_x = |\psi_x\rangle \otimes |\varphi_x\rangle$ e $|\Psi\rangle_y = |\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle$. In questo formalismo è evidente che si tratta di uno stato di superposizione.

Le osservabili associate ai detettori sono analoghe a quelle ottenute alla sezione 2.2.2.

3.3.2 Evoluzione temporale dello stato

Le matrici associate agli specchi, beam splitter e differenziatori di cammino sono analoghe a quelle ottenute alla sezione 2.2.3.

L'evoluzione temporale dello stato $|\Psi\rangle_{in}$ è per linearità la somma delle singole evoluzioni degli stati $|\Psi\rangle_x$ e $|\Psi\rangle_y$, infatti:

$$U \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi\rangle_x + |\Psi\rangle_y) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (U|\Psi\rangle_x + U|\Psi\rangle_y) \quad .$$

Anche l'evoluzione temporale agisce sulla coppia di particelle: l'operatore unitario U che agisce su $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è composto dal prodotto tensoriale $U = U_1 \otimes U_2$, dove U_1 agisce sullo spazio \mathcal{H}_1 mentre U_2 agisce sullo spazio \mathcal{H}_2 .

La matrice unitaria che identifica l'evoluzione dell'interferometro di Franson modificato è dunque:

$$U = [U_{BS}U_SU_\alpha] \otimes [U_{BS}U_SU_\beta] = [U_{BS} \otimes U_{BS}] [U_S \otimes U_S] [U_\alpha \otimes U_\beta] \quad . \quad (3.19)$$

L'evoluzione temporale dello stato per $|\Psi\rangle_x$ è dunque:

$$\begin{aligned} U|\Psi\rangle_{x,in} &= U(|\psi_x\rangle \otimes |\varphi_x\rangle) = [U_{BS}U_SU_\alpha] \otimes [U_{BS}U_SU_\beta] (|\psi_x\rangle \otimes |\varphi_x\rangle) \\ &= [U_{BS}U_S] \otimes [U_{BS}U_S] (e^{i\alpha}|\psi_x\rangle \otimes e^{i\beta}|\varphi_x\rangle) = [U_{BS}] \otimes [U_{BS}] (ie^{i\alpha}|\psi_y\rangle \otimes ie^{i\beta}|\varphi_y\rangle) \\ &= \left[ie^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_y\rangle + i|\psi_x\rangle) \right] \otimes \left[ie^{i\beta} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_y\rangle + i|\varphi_x\rangle) \right] = |\Psi\rangle_{x,out} \quad (3.20) \end{aligned}$$

mentre per $|\Psi\rangle_y$ è:

$$\begin{aligned} U|\Psi\rangle_{y,in} &= U(|\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle) = [U_{BS}U_SU_\alpha] \otimes [U_{BS}U_SU_\beta] (|\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle) \\ &= [U_{BS}U_S] \otimes [U_{BS}U_S] (|\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle) = [U_{BS}] \otimes [U_{BS}] (i|\psi_x\rangle \otimes i|\varphi_x\rangle) \\ &= \left[i \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x\rangle + i|\psi_y\rangle) \right] \otimes \left[i \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_x\rangle + i|\varphi_y\rangle) \right] = |\Psi\rangle_{y,out} \quad (3.21) \end{aligned}$$

Come scritto in (3.18) si sommano le equazioni degli stati finali (3.20) e (3.21), per ottenere $|\Psi\rangle_{out}$:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ie^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_y\rangle + i|\psi_x\rangle) \right] \otimes \left[ie^{i\beta} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_y\rangle + i|\varphi_x\rangle) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x\rangle + i|\psi_y\rangle) \right] \otimes \left[i \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_x\rangle + i|\varphi_y\rangle) \right] \\ &= \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}} [\sin \theta (|\psi_x\rangle \otimes |\varphi_x\rangle - |\psi_y\rangle \otimes |\varphi_y\rangle) + \cos \theta (|\psi_x\rangle \otimes |\varphi_y\rangle + |\psi_y\rangle \otimes |\varphi_x\rangle)] \quad (3.22) \end{aligned}$$

dove $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

3.3.3 Studio delle correlazioni

Dallo stato (3.22) possiamo calcolare le probabilità di osservare le particelle nei diversi detettori X e Y e conseguentemente analizzare alcuni casi emblematici.

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle_{out}}\{X_1 = 1; X_2 = 1\} = \|P_{|\psi_x\rangle} \otimes P_{|\varphi_x\rangle} |\Psi\rangle_{out}\|^2 = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.23)$$

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle_{out}}\{Y_1 = 1; Y_2 = 1\} = \|P_{|\psi_y\rangle} \otimes P_{|\varphi_y\rangle} |\Psi\rangle_{out}\|^2 = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.24)$$

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle_{out}}\{X_1 = 1; Y_2 = 1\} = \|P_{|\psi_x\rangle} \otimes P_{|\varphi_y\rangle} |\Psi\rangle_{out}\|^2 = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.25)$$

$$\text{Prob}_{|\Psi\rangle_{out}}\{Y_1 = 1; X_2 = 1\} = \|P_{|\psi_y\rangle} \otimes P_{|\varphi_x\rangle} |\Psi\rangle_{out}\|^2 = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.26)$$

Caso $\alpha = \beta = 0$

In questa situazione le equazioni (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) mostrano che le particelle vengono sempre osservate in due detettori opposti (X_1 e Y_2 o Y_1 e X_2) con distribuzione di probabilità 50%. Si tratta di una anticorrelazione perfetta.

Caso $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

In quest'altra situazione invece le equazioni (3.25), (3.26), (3.23) e (3.24) mostrano che le particelle sono sempre osservate in detettori simili (X_1 e X_2 o Y_1 e Y_2) con distribuzione di probabilità 50%. Si tratta dunque di una correlazione perfetta. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ permette la scelta di $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = 0$. Questa condizione consente di lasciare inalterato uno dei due cammini.

Questo fenomeno è chiamato *interferenza a due particelle*, analogo a quello ad una particella. In questo caso però il fenomeno si manifesta solo se si considerano le due particelle come un solo sistema. Infatti osservandole separatamente si ottiene una normale distribuzione aleatoria

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{|\Psi\rangle_{out}}\{X_1 = 1\} &= \|P_{|\psi_x\rangle} \otimes I |\Psi\rangle_{out}\|^2 = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}_{|\Psi\rangle_{out}}\{Y_2 = 1\} &= \|I \otimes P_{|\varphi_y\rangle} |\Psi\rangle_{out}\|^2 = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

indipendente dai valori di θ ⁵ e dunque esente da fenomeni di interferenza.

3.4 Interpretazione e considerazioni conclusive⁶

Gli stati intrecciati sono meramente quantistici, senza precedenti nella fisica classica [46]. La loro esistenza ha un paio di importanti conseguenze.

⁵In modo analogo si ottiene lo stesso risultato per gli altri due casi.

⁶Le informazioni sono tratte e in parte ritrattate da [24].

Intreccio

Emerge sia dal punto puramente matematico – equazione (3.3) – che dal punto fisico – con l’interferometro di Franson modificato, nelle equazioni (3.23-3.26) e (3.27) – che le due particelle devono essere considerate come un’unica entità, poiché, come mostra la modellizzazione, intervenendo solo su un cammino dell’interferometro di Franson modificato si modifica l’esito globale dell’esperienza.

Strumento di comunicazione

Come detto alla sezione 3.2, i valori osservati durante degli esperimenti con stati intrecciati sono aleatori, non c’è dunque nessun modo di prevederli.

Si potrebbe però pensare che le correlazioni, poiché producono appunto un risultato correlato, potrebbero venir usate per comunicare a velocità molto elevate.

Non è però così.

Come si legge in [46, p.73], il fenomeno delle correlazioni non può essere usato per comunicare poiché è comunque necessario l’ausilio di un sistema di comunicazione “tradizionale”.

«Cependant, ce phénomène ne peut pas être employé pour communiquer, c’est-à-dire pour envoyer un message. La raison en est la suivante: qu’on soit en situation de corrélation parfaite, d’anti-corrélation parfaite, ou en n’importe quelle situation intermédiaire en ce qui concerne les corrélations à deux particules, rien ne change aux résultats que on observe pour chaque particule séparément. En particulier, pour l’interféromètre de Franson que nous avons considéré, nous avons dit que de chaque côté, la moitié des particules est détectée dans un détecteur, et l’autre moitié dans l’autre. Alice, qui observe seulement les particules qui sont parties vers la gauche, voit des détections aléatoires; à droite, Bob a beau modifier son interféromètre, rien ne va changer chez Alice. C’est seulement lorsque Alice et Bob se parlent (par téléphone par exemple) et qu’ils comparent leurs résultats, qu’ils remarquent l’existence de corrélations entre les particules. Un moyen de communication ordinaire (téléphone, Internet, se rencontrer dans un bistrot) est donc absolument nécessaire pour connaître les corrélations quantiques; ces corrélations à elles seules ne permettent pas de communiquer.»

[46, p.73]

Poiché la misura è aleatoria, Bob una volta che ha osservato il suo risultato (se conosce i valori di α e β) può dedurre i risultati di Alice. Ma se vuole poter comunicare con questo sistema deve modificare i valori di α e/o β , ma in questo modo, per comunicare con Alice, dovrebbe poter eseguire la modifica a velocità superiori a quelle di propagazione delle particelle, cosa che non è possibile.

Parte II

Sinistre azioni a distanza

È su queste basi che si inserisce la critica di EINSTEIN, PODOLSKY e ROSEN dal titolo «Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?», che contesta la completezza del formalismo quantistico come valutato dall'Interpretazione di Copenhagen.

Come si può notare dal titolo della prima pagina del rinomato giornale *The New York Times* riportata nella figura 4.2, all'epoca questa critica alla teoria quantistica fece uno scalpore tale da essere riportato anche fuori dalle usuali riviste scientifiche specialistiche.

**EINSTEIN ATTACKS
QUANTUM THEORY**

**Scientist and Two Colleagues
Find It Is Not 'Complete'
Even Though 'Correct.'**

SEE FULLER ONE POSSIBLE

**Believe a Whole Description of
'the Physical Reality' Can Be
Provided Eventually.**

Figura 4.2: Titolo del articolo comparso sul NYT [37].

4.2 L'articolo EPR

4.2.1 Premesse

Nelle prime righe dell'articolo in questione², da ora EPR, si legge che «*nel tentativo di giudicare il successo di una teoria fisica, ci si bisogna porre due domande: 1. La teoria è corretta? 2. La descrizione della realtà fisica data dalla teoria è completa?*»³.

Nel ambito della fisica quantistica, interesse degli autori, la risposta alla prima domanda è chiaramente positiva. «*La correttezza della teoria è giudicata dal grado di accordo tra le conclusioni teoriche e l'esperienza umana*», si tratta quindi di stabilire se i risultati sperimentali confermano le previsioni teoriche, cosa che in questo ambito accade con grande precisione.

«*È la seconda domanda che si desidera approfondire con questo articolo, in relazione alla fisica quantistica*». EPR non discute dunque la correttezza della teoria quantistica bensì la sua completezza.

²EINSTEIN Albert et al., «Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?», in: *Physical review* 47.10 (1935), p. 777.

³La notazione «*testo*» indica da qui in poi una libera tradizione di [19].

Condizione di completezza in EPR

Secondo EPR «*il seguente criterio è necessario affinché una teoria sia completa: ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica. Si può chiamarlo condizione di completezza.*»

La condizione di completezza di EPR è strettamente legata al concetto di realtà fisica, che come si legge nell'articolo è tutt'altro che facile da definire. Gli autori decidono che una «*scrupolosa definizione di cosa sia la realtà fisica è inutile per lo scopo dell'articolo*», dando così una definizione semplificata, ma comunque «*in accordo con con l'idea classica e quantistica*», di realtà fisica: «*se, senza in alcun modo disturbare un sistema, si può predire con certezza (ovvero con probabilità uguale a uno) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale grandezza fisica*».

4.2.2 L'argomentazione di EPR

L'argomentazione di EPR parte dall'analisi di una particella avente un solo grado di libertà⁴ e la cui quantità di moto ha un valore determinato p_0 , giungendo alla conclusione che la quantità di moto e la posizione non possono essere simultaneamente reali poiché i loro operatori non commutano, deducendo da questa evidenza matematica una fondamentale alternativa logica. Sulla base di questa alternativa logica si sviluppa un ragionamento che analizzando «*due sistemi che dopo un periodo di interazione, vengono separati*» giunge alla conclusione che la teoria quantistica non è completa, poiché uno stato per il quale posizione e quantità di moto possono essere simultaneamente reali è ottenibile. Fondamentale è l'interazione che i due sistemi hanno avuto, ovvero la creazione di uno stato intrecciato.

4.3 Argomentazione

Qui di seguito è proposta l'argomentazione rielaborata con l'analisi di fotoni polarizzati⁵.

4.3.1 Alternativa logica

Si prenda un fotone polarizzato dello stato iniziale

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

del quale vogliono essere conosciuti i valori (sempre ± 1) associati alle osservabili

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

⁴Ovvero che la particella si può muovere soltanto lungo una direzione [21].

⁵Il procedimento è simile a quello proposto da BOHM e AHARONOV in [10] eseguito però con la polarizzazione.

Si inizia con la misurazione di σ_z :

$$\text{Prob}_{|H\rangle}\{\sigma_z = +1\} = \left\| P_{E_{|H\rangle}}|H\rangle \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 \quad . \quad (4.2)$$

L'equazione 4.2 permette di concludere che, per una particella di stato $|H\rangle$, il valore dell'osservabile σ_z è predicibile con certezza. Dunque per la definizione di realtà fisica «*esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale grandezza fisica*».

Della particella, il cui stato rimane inalterato dalla misurazione di σ_z ⁶, si vuole ora conoscere il valore associato all'osservabile σ_x . Questo valore non può essere conosciuto a priori poiché è necessaria una misurazione nella quale entrambi i valori appaiono con 50% di probabilità⁷. Il problema legato a questa misurazione necessaria per conoscere il valore dell'osservabile σ_x con certezza, e quindi associare un elemento di realtà fisica alla grandezza fisica, è che quale sia lo stato dopo la misurazione, $|+\rangle$ o $|-\rangle$, esso non soddisfa più il criterio necessario per associarvi un elemento di realtà per l'osservabile σ_z , ovvero il valore di σ_z non è predicibile con certezza:

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{|+\rangle}\{\sigma_z = +1\} &= \left\| P_{E_{|H\rangle}}|+\rangle \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \quad . \\ \text{Prob}_{|-\rangle}\{\sigma_z = +1\} &= \left\| P_{E_{|H\rangle}}|-\rangle \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che, per una particella nello stato (4.1), quando è conosciuto il valore dell'osservabile σ_z il valore dell'osservabile σ_x non ha una realtà fisica e viceversa.

EPR allarga il concetto appena dedotto dicendo che «*più generalmente nella fisica quantistica si osserva che se gli operatori corrispondenti a due quantità fisiche [due osservabili], A e B , non commutano, quindi $AB \neq BA$, allora la conoscenza precisa di uno dei due preclude una tale conoscenza sull'altro*».

Si giunge così all'alternativa logica centrale dell'articolo: «*da ciò si conclude che o*

(a) *la descrizione quantistica della realtà data dal vettore di stato $|\psi\rangle$ non è completa*

oppure

(b) *quando due operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano le due quantità non soddisfano simultaneamente il criterio di realtà*».

⁶ $|\psi\rangle' = \frac{P_{E_{|H\rangle}}|H\rangle}{\|P_{E_{|H\rangle}}|H\rangle\|} = |H\rangle$

⁷ $\text{Prob}_{|H\rangle}\{\sigma_x = +1\} = \|P_{E_{|H\rangle}}|H\rangle\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2}$

$\text{Prob}_{|H\rangle}\{\sigma_x = -1\} = \|P_{E_{|V\rangle}}|H\rangle\|^2 = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2}$

4.3.2 Realtà simultanea per due grandezze che non commutano

EPR esegue una dimostrazione generale su come si può associare simultaneamente una realtà fisica a due grandezze che non commutano. In questa sezione si presenta un'argomentazione simile, e che porta alla stessa conclusione, effettuata con due fotoni di stato intrecciato.

Si consideri due fotoni a e b nello stato intrecciato,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \quad . \quad (4.3)$$

Si suppone che la descrizione dello stato del sistema data da questo stato sia completa (questo equivale a negare l'alternativa a dell'alternativa logica).

Lo stato (4.3) è espresso con gli autostati $|V\rangle$ e $|H\rangle$ dell'osservabile σ_z . Esso è però esprimibile anche con gli autostati

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dell'osservabile $+/-$ usando le seguenti uguaglianze

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) \quad \text{e} \quad |H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \quad . \quad (4.4)$$

Dalle equivalenze (4.4) si riscrive lo stato (4.3) come segue

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|+^a\rangle - |-^a\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+^b\rangle + |-^b\rangle) \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|+^a\rangle + |-^a\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+^b\rangle - |-^b\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2} |-^a\rangle \otimes |+^b\rangle + \frac{1}{2} |+^a\rangle \otimes |-^b\rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} |-^a\rangle \otimes |+^b\rangle + \frac{1}{2} |+^a\rangle \otimes |-^b\rangle \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|-^a\rangle \otimes |+^b\rangle - |+^a\rangle \otimes |-^b\rangle) \quad . \quad (4.5) \end{aligned}$$

L'uguaglianza degli stati (4.5) si mostra particolarmente interessante analizzando il problema da punto di vista della riduzione dello stato come mostrato alla sezione 3.2. Appare infatti evidente sotto questa luce che sono presenti delle (anti-)correlazioni anche per l'osservabile $\sigma_x \otimes \sigma_x$. Misurando un valore $+1$ per l'osservabile $\sigma_x \otimes I$ il sistema si riduce nello stato

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+^a\rangle \otimes |-^b\rangle)$$

e viceversa con il fotone b .

Dalle misurazioni risulta che la frequenza delle anti-correlazioni è uguale per entrambe le coppie di osservabili⁸:

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = +1 ; I \otimes \sigma_z = -1 \} &= \| P_{|H^a\rangle} \otimes P_{|V^b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_x \otimes I = -1 ; I \otimes \sigma_x = +1 \} &= \| P_{|-a\rangle} \otimes P_{|+b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_z \otimes I = +1 ; I \otimes \sigma_z = +1 \} &= \| P_{|H^a\rangle} \otimes P_{|H^b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = 0 \\ \text{Prob}_{|\Psi\rangle} \{ \sigma_x \otimes I = -1 ; I \otimes \sigma_x = -1 \} &= \| P_{|-a\rangle} \otimes P_{|-b\rangle} |\Psi\rangle \|^2 = 0 \end{aligned}$$

Cause locali

È fondamentale a questo punto chiarire un principio dato per scontato in EPR. Nel testo si legge che «*in due sistemi che non interagiscono più, nessuna modifica può avere luogo in un sistema a conseguenza di qualcosa fatto nell'altro sistema*». Quello enunciato qui è conosciuto come principio delle cause locali, che formalmente espresso afferma che: eventi che occorrono in una regione spazio-temporale data, non possono essere influenzati da una modifica di parametri localizzati in una regione spazio-temporale separata da un intervallo di tipo spazio, cioè L entro un intervallo di tempo $\tau < \frac{L}{c}$ [21].

In questa prospettiva due fotoni di stato intrecciato possono dunque essere considerati come due entità separate⁹.

Seguendo il principio delle cause locali, dato lo stato intrecciato (4.1) la misurazione di Alice sul fotone a non perturba la polarizzazione del fotone b misurato da Bob, ma, a causa delle correlazioni, permette di conoscere con certezza i valori dell'osservabile associata a quest'ultimo. Infatti, come si è visto alla sezione 3.2, considerando una misura $+1$ da parte di Alice per la polarizzazione σ_z si osserva sempre, e dunque con probabilità 1, una misura -1 da parte di Bob. Lo stesso ragionamento vale per l'osservabile σ_x .

Effettuando due misurazioni separate l'una dall'altra per due osservabili diverse, come illustrato dalla figura 4.3, è possibile conoscere con certezza il valore associato ad entrambe. Considerando le misurazioni $+1$ per l'osservabile σ_z e -1 per l'osservabile σ_x da parte di Alice lo stato del sistema si riduce nel modo seguente

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \xrightarrow{\sigma_z \otimes I = +1} |\Psi'_{\sigma_z}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \\ |\Psi\rangle \xrightarrow{\sigma_x \otimes I = -1} |\Psi'_{\sigma_x}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-a\rangle \otimes |+b\rangle) \end{aligned} \quad (4.6)$$

permettendo di sapere con certezza che Bob osserverà valori opposti, ovvero -1 per l'osservabile σ_z e $+1$ per l'osservabile σ_x .

⁸I calcoli sono identici alle equazioni 3.11-3.14 della sezione 3.2, si tralasciano dunque i passaggi.

⁹Si noti che le correlazioni vengono osservate anche se questa ipotesi è soddisfatta, se

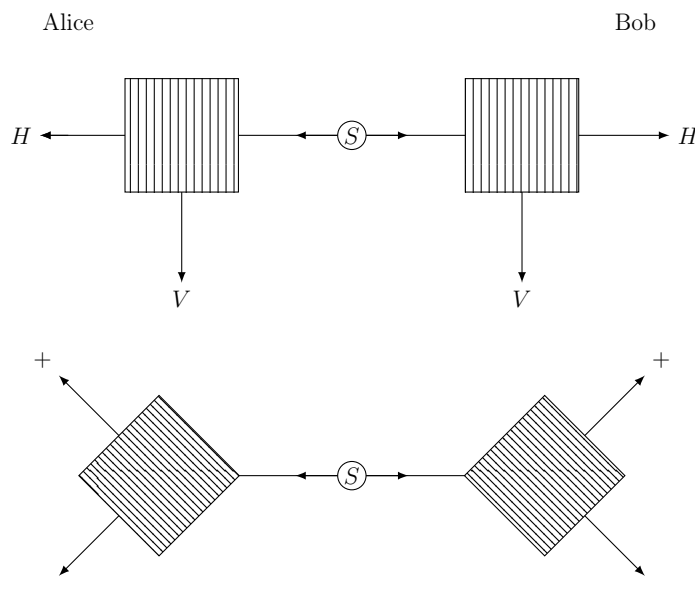


Figura 4.3: Schematizzazione dell'esperimento proposto da EPR.

Queste due osservabili possiedono dunque entrambe un elemento di realtà fisica – rispettando il criterio enunciato dall'articolo di poter predire con certezza il valore associativi – nonostante che i due operatori non commutano in quanto

$$[\sigma_x^{Bob}, \sigma_z^{Bob}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Si giunge quindi alla conclusione che l'alternativa b dell'alternativa logica è sbagliata.

4.3.3 Conclusione del ragionamento

Dal ragionamento appena esposti evince che «partendo da un formalismo supposto completo, [...] due grandezze fisiche con operatori non commutativi possono avere simultaneamente un elemento di realtà. Dunque la negazione di (a) porta alla negazione dell'unica altra alternativa (b). Si è perciò forzati a concludere che la descrizione quantistica data dal vettore di stato $|\psi\rangle$ non è completa».

4.4 Critica

EPR è strutturato logicamente in modo rigoroso corretto e ineccepibile. Nonostante ciò non è perfetto. Si possono porre, e sono state poste, critiche sulle basi su cui si fonda. Trattandosi però di un argomento che esula dai risultati sperimentali, la risposta della comunità scientifica non fu massiccia.

dunque gli strumenti di misurazione si trovano in una regione spazio-temporale separata da un intervallo di tipo spazio.

Nel suo articolo [11] pubblicato poco dopo EPR e avente lo stesso titolo, BOHR sferra un attacco alla tesi di EPR. La sua critica si basa principalmente sull'inadeguatezza del criterio di realtà, si legge infatti nel suo articolo che: «dal nostro punto di vista, si vede che la formulazione del sopracitato criterio di realtà proposto da Einstein, Podolsky e Rosen contiene un'ambiguità a proposito del significato dell'espressione “senza in alcun modo disturbare un sistema” [11].»

La critica di BOHR si muove però su più fronti come si può leggere qui di seguito

«Bohr concorda che la misurazione indiretta raggiunta sul sistema B quando viene effettuata una misurazione sul sistema A non comporta nessun “disturbo meccanico” sul sistema B . [...] Bohr sostiene però che una misurazione sul sistema A comporta “un'influenza sulle condizioni che definiscono i tipi di predizione riguardanti il comportamento del sistema B ”. Cosa Bohr forse avesse in mente è che quando, per esempio, si misura la posizione del sistema A e si ottiene un risultato, si può predire con certezza la posizione del sistema B ; tuttavia, la misurazione della posizione del sistema A non consente una simile certezza nel predire la quantità di moto del sistema B . Il contrario sarebbe stato corretto nel caso in cui si avesse misurato la quantità di moto del sistema A . Così a seconda di quale variabile si misura sul sistema A , si avrà concessioni diverse sulle predizioni future dei risultati del sistema B .»¹⁰

4.5 Commenti e conclusioni

La conclusione di quanto esposto in questo capitolo è chiara.

Assumendo come corretti due principi fondanti, principio di realtà e principio di località, si deve necessariamente concludere che la teoria quantistica è incompleta. Il ragionamento che porta a questa conclusione è inattaccabile in quanto logicamente corretto. Gli unici problemi possono dunque sussistere nella valutazione delle ipotesi di partenza, ovvero i due sopracitati principi, che però a detta degli autori di EPR sono inattaccabili, in quanto estremamente intrinseci alla realtà che percepiamo. La discussione su questi due principi, in quanto tali¹¹, rischierebbe infatti di dilagare su un piano filosofico piuttosto che fisico, perdendo così con i dati reali ottenuti nelle esperienze.

È dunque aperta la questione «*se o no una tale descrizione [completa della realtà fisica] esiste*».

Nel gruppo EPR, EINSTEIN è sicuramente il personaggio più conosciuto e stimato nella comunità scientifica. È perciò stata posta molta attenzione alla sua opinione personale su fenomeno delle correlazioni. In particolare si legge nella corrispondenza tra BORN e EINSTEIN la seguente considerazione di EINSTEIN

¹⁰Libera traduzione da [26].

¹¹Un principio è un «enunciato che costituisce la generalizzazione di una vasta evidenza sperimentale e che si assume come vero per ogni possibile ulteriore esperienza»[52], risulta quindi particolarmente difficile metterne in discussione i termini una volta che sono stati accettati.

«I cannot make a case for my attitude in physics which you would consider at all reasonable. I admit, of course, that there is a considerable amount of validity in the statistical approach which you were the first to recognise clearly as necessary given the framework of the existing formalism. *I cannot seriously believe in it because the theory cannot be reconciled with the idea that physics should represent a reality in time and space, free from spooky actions at a distance.* I am, however, not yet firmly convinced that it can really be achieved with a continuous field theory, although I have discovered a possible way of doing this which so far seems quite reasonable. The calculation difficulties are so great that I will be biting the dust long» [13].

che tradotta in italiano dà il titolo a questo lavoro e a questa parte specifica.

Quella descritta è la situazione del 1935. Nuove e stupefacenti scoperte posteriori riaccenderanno la discussione su se la descrizione quantistica della realtà sia completa.

Capitolo 5

Teorema di Bell

QUESTO capitolo parla di quello che è stato definito «uno dei lavori più importanti nella storia della fisica»¹. Si tratta della risposta definitiva e inequivocabile al quesito posto da EINSTEIN, PODOLSKY e ROSEN esposto nel capitolo precedente.

5.1 Premessa sulla natura classica delle correlazioni

La natura delle correlazioni quantistiche osservate in laboratorio è per la comunità scientifica della prima metà del secolo XX ancora una questione aperta. La ricerca di tale natura porta alla formulazione di due opzioni classiche.

5.1.1 Scambio di informazione

La prima opzione consiste nel procedimento secondo il quale la prima particella dopo essere misurata invia alla seconda particella l'informazione del risultato della sua misurazione affinché essa possa reagire di conseguenza e manifestare le correlazioni.

Secondo la teoria della relatività, la velocità massima per la propagazione dell'informazione ha un limite dato dalla velocità della luce c . Questo principio – poiché è possibile osservare correlazioni anche in eventi separati da un intervallo di tipo spaziale, come dimostrato in [49] con fotoni distanti 10.9 km – confuta la possibilità di uno scambio di informazioni tra le particelle.

Questa prima opzione è quindi smentita dagli esperimenti in accordo con la teoria della relatività.

5.1.2 Correlazioni stabilite alla sorgente

Questa seconda possibilità consiste nell'ipotesi che ogni particella della coppia quando viene emessa dalla sorgente “sa” già come deve reagire quando incontra un determinato tipo di apparecchio di misurazione e questo indipendentemente dalle possibili misurazioni effettuate sull'altra particella.

¹Citazione di Alain ASPECT, riferendosi all'articolo «On the Einstein Podolsky Rosen paradox» [8].

Questa possibilità corrisponde a quella che è chiamata una teoria locale, ossia che le due particelle della coppia sono indipendenti fra loro e considerate come entità separate. In particolare questo tipo di teoria è quella appoggiata da EPR.

5.2 Teoria delle variabili nascoste

La tesi di EPR sull'incompletezza della teoria quantistica diede nascita a quella che è conosciuta come "teoria delle variabili nascoste locali".

Secondo questa teoria l'elemento statistico presente nella teoria quantistica è dovuto, appunto, alla conoscenza non completa dello stato del sistema poiché il vettore dello spazio di Hilbert, come nella meccanica statistica, sarebbe una media di stati meglio definiti per i quali il risultato individuale sarebbe determinato. Questi ipotetici stati "senza dispersione" sarebbero definiti non solo dal vettore di stato quantistico bensì anche da ulteriori "variabili nascoste" – "nascoste" poiché se stati con valori assegnati di queste variabili fossero preparabili, i risultati della fisica quantistica sarebbero inadeguati [6, 9], poiché sparirebbe il carattere aleatorio della teoria.

Il modello [22]

Si consideri il montaggio schematico della figura 5.1 nel quale Alice e Bob analizzano una coppia di particelle di stato intrecciato sulle quali entrambi possono eseguire la misurazione di due osservabili.

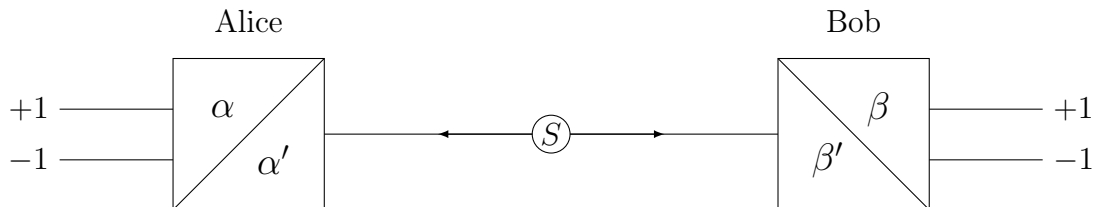


Figura 5.1: Schema di misurazione su due particelle e due osservabili a scelta.

Per entrambe le osservabili gli unici due risultati sono ± 1 . Nel caso di due fotoni polarizzati $+1$ corrisponde all'attraversamento del polarizzatore, mentre -1 alla sua deviazione.

I risultati della misurazione di Alice sono notati a, a' (a corrisponde al risultato ± 1 dopo aver scelto α come osservabile, e analogamente con a') mentre quelli di Bob b, b' .

Secondo la teoria, il principio di località² è valido. L'idea proposta è che i risultati di ogni misurazione sono già stabiliti alla sorgente, questo vuol dire che la particella lascia la sorgente con una lista

$$\lambda_A = \{a(\lambda), a'(\lambda)\} \quad \lambda_B = \{b(\lambda), b'(\lambda)\}$$

²In questo caso corrispondente al fatto che a, a' no vengono influiti dalla misurazione di Bob e viceversa.

in cui sono indicati i risultati delle possibili misurazioni. Tutti i valori dipendono da λ che varia in tutte le coppie di particelle.

È dunque importante la possibilità di eseguire due misurazioni diverse, poiché in caso contrario si potrebbe venir a creare un modello in cui le liste di partenza non dipendono dalle misurazioni (nel caso della polarizzazione dagli angoli).

Per esempio, nel caso di due fotoni di stato intrecciato, se la particella diretta verso Alice incontra una misurazione di tipo $\alpha = H/V$, allora all'origine si stabilisce che $a = +1$ e, indipendentemente dalla misurazione di Alice, si stabilisce sempre all'origine che per la particella diretta verso Bob, incontrando una misurazione di tipo $\beta = H/V$ risulterà $b = -1$ e analogamente possono essere stabiliti valori invertiti. In questo modo si vede che le correlazioni osservate sullo stato intrecciato $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle)$ sono stabilite all'origine.

L'unione di queste due liste

$$\Lambda = \{\lambda_A, \lambda_B\}$$

è la variabile nascosta (locale, per come è stata costruita) per questo sistema, che completa la descrizione dello stato, creando uno stato "senza dispersione". Si osservi che per ogni coppia di particelle Λ è diversa.

5.3 Teorema di Bell³

5.3.1 Disuguaglianza di Bell

Quello esposto in questa sezione è il risultato ottenuto da John Stewart BELL nei due fondamentali articoli «On the problem of hidden variables in quantum mechanics» e «On the Einstein Podolsky Rosen paradox» [8, 9]. Per quanto riguarda il formalismo, quella esposta è la variante **CHSH** (dagli autori che la proposero CLAUSER, HORNE, SHIMONY e HOLT) delle disuguaglianze, esposta in [14], più semplice poiché direttamente rivolta alla verifica sperimentale⁴ e riguardante solo una coppia di particelle.

Si considera la seguente grandezza

$$S(\Lambda) = (a + a')b + (a - a')b' = ab + a'b + ab' - a'b' \quad . \quad (5.1)$$

Poiché sono possibili solo i casi

$$\begin{cases} (a + a') = 0 \\ (a - a') = \pm 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} (a + a') = \pm 2 \\ (a - a') = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow S = \pm 2 \quad . \quad (5.2)$$

Per ogni copia di particelle Alice può misurare soltanto α o α' e lo stesso vale per Bob con β e β' , il valore di $S(\Lambda)$ non può dunque essere ottenuto dalle misurazioni. Su tante misurazioni si può però calcolare il valore medio $\langle S(\Lambda) \rangle$:

$$|\langle S(\Lambda) \rangle| = |\langle ab + a'b + ab' - a'b' \rangle| = |\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle| \quad . \quad (5.3)$$

³Rielaborato da [23].

⁴Come si può facilmente capire dal titolo «Proposed experiment to test local hidden-variable theories».

Dalle equazioni (5.2) e (5.3) si ottiene *la variante CHSH della Disuguaglianza di Bell*:

$$|\langle S(\Lambda) \rangle| \leq 2 \quad . \quad (5.4)$$

È fondamentale osservare il fatto che nello stabilire l'equazione (5.4) non è stata fatta nessuna supposizione di tipo quantistica, essa ha quindi valenza generale: ogni teoria di tipo locale⁵ deve rispettare questa disuguaglianza.

In conclusione, per ogni teoria locale, e in particolare se le correlazioni sono stabilite alla sorgente, deve valere $|\langle S(\Lambda) \rangle| \leq 2$. Questo risultato è confrontabile con le previsioni della fisica quantistica e con i risultati sperimentali.

Considerando invece una teoria non locale – dove quindi a, a' possono dipendere dalla misurazione di Bob e b, b' da quella di Alice – allora la grandezza

$$S = a_{(\beta)}b_{(\alpha)} + a'_{(\beta)}b_{(\alpha')} + a_{(\beta')}b'_{(\alpha)} - a'_{(\beta')}b'_{(\alpha')} \quad (5.5)$$

può assumere i valori $S = 0, \pm 2, \pm 4$. Da questi valori si ottiene evidentemente la disuguaglianza

$$|\langle S(\Lambda) \rangle| \leq 4 \quad (5.6)$$

che deve rispettare ogni teoria non locale.

5.3.2 Disuguaglianza di Bell nella fisica quantistica⁶

Le disuguaglianze (5.4) e (5.6) per come sono state ottenute possono essere applicate a qualsivoglia teoria fisica. Anche all'interno della fisica quantistica le applicazioni sono molteplici, in questa sezione verranno applicate a un sistema di due fotoni polarizzati di stato intrecciato.

Come descritto alla sezione 1.6, il valore medio associato ad un'osservabile A dato lo stato

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V^a\rangle \otimes |H^b\rangle - |H^a\rangle \otimes |V^b\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|VH\rangle - |HV\rangle) \quad (5.7)$$

è

$$\langle A \rangle_{|\Psi\rangle} = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \quad . \quad (5.8)$$

L'osservabile associato a due polarizzazioni qualsiasi correlate, dove θ e λ indicano l'orientazione dell'asse dello strumento di misurazione, è ottenuto tramite il

⁵Poiché ci si è basati sulla scelta che la variabile nascosta Λ rispetta il principio delle cause locali e quindi λ_A e λ_B sono indipendenti dalla misura.

⁶Questa sezione si basa a pezzi sulle fonti [22, 25, 38] e in modo particolare per la parte sulle variabili aleatorie su [32, p.418-420].

⁷Per motivi tipografici che saranno evidenti più avanti non si esplicherà più il simbolo del prodotto tensoriale \otimes negli stati.

teorema spettrale:

$$\begin{aligned} A_{\theta \otimes \lambda} &= \left(P_{|\psi_\theta\rangle} - P_{|\psi_{\theta\perp}\rangle} \right) \otimes \left(P_{|\psi_\lambda\rangle} - P_{|\psi_{\lambda\perp}\rangle} \right) = A_\theta \otimes A_\lambda \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos 2\lambda & \sin 2\lambda \\ \sin 2\lambda & -\cos 2\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dalle equazioni (5.8) e (5.9) segue che il valore medio per lo stato (5.7) è:

$$\begin{aligned} \langle A_{\theta \otimes \lambda} \rangle &= \langle \Psi | A_{\theta \otimes \lambda} | \Psi \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} (VH - HV) \left| A_\theta \otimes A_\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (VH - HV) \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} VH - \frac{1}{\sqrt{2}} HV \left| \frac{1}{\sqrt{2}} A_\theta V A_\lambda H - \frac{1}{\sqrt{2}} A_\theta H A_\lambda V \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} VH \left| \frac{1}{\sqrt{2}} A_\theta V A_\lambda H \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} VH \left| \frac{1}{\sqrt{2}} A_\theta H A_\lambda V \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} HV \left| \frac{1}{\sqrt{2}} A_\theta V A_\lambda H \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} HV \left| \frac{1}{\sqrt{2}} A_\theta H A_\lambda V \right\rangle \right. \right. \\ &= \frac{1}{2} (\langle V | A_\theta V \rangle \langle H | A_\lambda H \rangle - \langle V | A_\theta H \rangle \langle H | A_\lambda V \rangle \\ &\quad - \langle H | A_\theta V \rangle \langle V | A_\lambda H \rangle + \langle H | A_\theta H \rangle \langle V | A_\lambda V \rangle) \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\theta \cos 2\lambda - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\lambda - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\lambda - \frac{1}{2} \cos 2\theta \cos 2\lambda \\ &= -\cos 2\theta \cos 2\lambda - \sin 2\theta \sin 2\lambda = -\cos(2\theta - 2\lambda) = -\cos 2(\theta - \lambda). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Il valore $-\cos 2(\theta - \lambda)$ ottenuto nell'equazione (5.10) è confermato dal calcolo fatto considerando le misurazioni di Alice e Bob come variabili aleatorie. Il percorso è analogo a quello proposto sopra con il calcolo del valore medio secondo la regola quantistica, vengono infatti prese in considerazione due misurazioni secondo gli angoli θ e λ e lo stesso stato dell'equazione (5.7). Date le notazioni

$$\begin{aligned} |\Psi_{out,++}\rangle &= |\psi_\theta\rangle \otimes |\psi_\lambda\rangle \equiv |\psi_\theta\psi_\lambda\rangle \quad |\Psi_{out,+ -}\rangle = |\psi_\theta\rangle \otimes |\psi_{\lambda\perp}\rangle \equiv |\psi_\theta\psi_{\lambda\perp}\rangle \\ |\psi_\theta\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad |\psi_\lambda\rangle = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \quad |\psi_{\lambda\perp}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

e tramite le probabilità di osservare una misurazione $(+1, +1)$ o $(-1, -1)$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{A_\theta \otimes I = +1, I \otimes A_\lambda = +1\} &= |\langle \Psi_{out,++} | \Psi \rangle|^2 \\ &= \left| \langle \psi_\theta\psi_\lambda | \frac{1}{\sqrt{2}} (VH - HV) \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_\theta | H \rangle \langle \psi_\lambda | V \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_\theta | V \rangle \langle \psi_\lambda | H \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \sin \lambda - \sin \theta \cos \lambda) \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(\theta - \lambda) \end{aligned}$$

e le probabilità di osservare una misurazione $(+1, -1)$ o $(-1, +1)$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{A_\theta \otimes I = +1, I \otimes A_\lambda = -1\} &= |\langle \Psi_{out,+} | \Psi \rangle|^2 \\ &= \left| \langle \psi_\theta \psi_{\lambda\perp} | \frac{1}{\sqrt{2}} (VH - HV) \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_\theta | H \rangle \langle \psi_{\lambda\perp} | V \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_\theta | V \rangle \langle \psi_{\lambda\perp} | H \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda) \right|^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\theta - \lambda) \end{aligned}$$

è possibile calcolare la probabilità di osservare una misurazione $+1$ per il fotone a come la somma di tutti i possibili risultati osservanti questa misurazione:

$$\text{Prob}\{A_\theta = +1\} = \frac{1}{2} \cos^2(\theta - \lambda) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta - \lambda) = \frac{1}{2} \quad . \quad (5.12)$$

Evidentemente lo stesso ragionamento porta a un identico risultato anche per la misurazione del fotone b .

Dall'equazione (5.12) segue dunque che la misura di una singola polarizzazione è aleatoria, essa può dunque essere considerata come *variabile aleatoria*. Sono quindi notate $\mathcal{A}(\theta)$ e $\mathcal{B}(\lambda)$ le variabili aleatorie associate alle misurazioni per le quali valgono le probabilità

$$\begin{aligned} \text{Prob}[\mathcal{A}(\theta) = +1] &= \text{Prob}[\mathcal{A}(\theta) = -1] = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}[\mathcal{B}(\lambda) = +1] &= \text{Prob}[\mathcal{B}(\lambda) = -1] = \frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

Date due variabili aleatorie è possibile studiare la *correlazione tra* $\mathcal{A}(\theta)$ e $\mathcal{B}(\lambda)$ definita come

$$\text{Corr}(\mathcal{A}(\theta), \mathcal{B}(\lambda)) = \frac{E[(\mathcal{A}(\theta) - E[\mathcal{A}(\theta)])(\mathcal{B}(\lambda) - E[\mathcal{B}(\lambda)])]}{\sqrt{E[(\mathcal{A}(\theta) - E[\mathcal{A}(\theta)])^2]} \sqrt{E[(\mathcal{B}(\lambda) - E[\mathcal{B}(\lambda)])^2]}} \quad (5.13)$$

dove la notazione $E[\mathcal{A}(\theta)]$ indica il valore atteso per la variabile aleatoria $\mathcal{A}(\theta)$ definito come

$$E[\mathcal{A}(\theta)] = \sum_i x_i \text{Prob}\{\mathcal{A}(\theta) = x_i\} \quad (5.14)$$

nel quale x_i è un possibile risultato di $\mathcal{A}(\theta)$.

Attraverso l'equazione (5.14) si calcola il risultato numerico del valore atteso per le variabili aleatorie interessate:

$$E[\mathcal{A}(\theta)] = E[\mathcal{B}(\lambda)] = 1 \frac{1}{2} + (-1) \frac{1}{2} = 0 \quad . \quad (5.15)$$

Dalle equazioni (5.13), (5.14), (5.15) e dalla proprietà

$$E[(\mathcal{A}(\theta) - E[\mathcal{A}(\theta)])(\mathcal{B}(\lambda) - E[\mathcal{B}(\lambda)])] = E[\mathcal{A}(\theta)\mathcal{B}(\lambda)] - E[\mathcal{A}(\theta)]E[\mathcal{B}(\lambda)]$$

si ottiene il valore numerico della correlazione tra $\mathcal{A}(\theta)$ e $\mathcal{B}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(\mathcal{A}(\theta), \mathcal{B}(\lambda)) &= \frac{E[\mathcal{A}(\theta)\mathcal{B}(\lambda)] - E[\mathcal{A}(\theta)]E[\mathcal{B}(\lambda)]}{\sqrt{E[(\mathcal{A}(\theta) - E[\mathcal{A}(\theta)])^2]} \sqrt{E[(\mathcal{B}(\lambda) - E[\mathcal{B}(\lambda)])^2]}} \\ &= E[\mathcal{A}(\theta)\mathcal{B}(\lambda)] = \text{Prob}\{(+1, +1)\} + \text{Prob}\{(-1, -1)\} \\ &\quad - \text{Prob}\{(+1, -1)\} - \text{Prob}\{(-1, +1)\} = \sin^2(\theta - \lambda) \cos^2(\theta - \lambda) \\ &= -\cos 2(\theta - \lambda); \end{aligned} \quad (5.16)$$

risultato identico al valore medio calcolato nell'equazione (5.10) che ne confera quindi la validità.

Con il risultato appena ottenuto, che è da interpretare come uno dei quattro elementi dell'equazione (5.1), si può dunque calcolare il valore medio della grandezza $S(\Lambda)$ come

$$|\langle S(\Lambda) \rangle| = |-\cos 2(\theta - \lambda) - \cos 2(\theta' - \lambda) - \cos 2(\theta - \lambda') + \cos 2(\theta' - \lambda')|. \quad (5.17)$$

Data la grandezza S se ne può calcolare un massimo come segue.

Si consideri la funzione

$$f(\theta, \lambda, \theta', \lambda') = -\cos 2(\theta - \lambda) - \cos 2(\theta' - \lambda) - \cos 2(\theta - \lambda') + \cos 2(\theta' - \lambda'). \quad (5.18)$$

Si tratta di una funzione di classe C^1 , dunque i suoi punti stazionari sono i punti $a \in \mathbb{R}^4$ per i quali vale

$$\nabla f(a) = 0$$

per la funzione (5.18) i punti stazionari sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$2 \sin 2(\theta - \lambda) + 2 \sin 2(\theta - \lambda') = 0 \quad (5.19a)$$

$$-2 \sin 2(\theta - \lambda) - 2 \sin 2(\theta' - \lambda) = 0 \quad (5.19b)$$

$$2 \sin 2(\theta' - \lambda) - 2 \sin 2(\theta' - \lambda') = 0 \quad (5.19c)$$

$$-2 \sin 2(\theta - \lambda') - 2 \sin 2(\theta' - \lambda') = 0 \quad (5.19d)$$

Si assume per semplicità che $\theta = 0$.

Dall'equazione (5.19a) si ottiene che

$$2 \sin 2(\theta - \lambda) + 2 \sin 2(\theta - \lambda') = 0 \Leftrightarrow \sin 2\lambda = -\sin 2\lambda' \Leftrightarrow \lambda = -\lambda' \quad (5.20)$$

Inserendo il risultato di (5.20) nell'equazione (5.19b) si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(2\theta' - 2\lambda) - \sin(2\theta' - 2\lambda') = \sin(2\theta' + 2\lambda') - \sin(2\theta' - 2\lambda') \\ &= \cos(2\theta') \sin(2\lambda') + \cos(2\theta') \sin(2\lambda') \Leftrightarrow 0 = \cos(2\theta') \sin(2\lambda') \end{aligned} \quad (5.21)$$

considerando nel risultato dell'equazione (5.21) “determinate” il fattore $\cos(2\theta')$ si ottiene

$$\cos(2\theta') = 0 \Leftrightarrow \theta' = \frac{\pi}{4}. \quad (5.22)$$

Inserendo il risultato dell'equazione (5.22) nella (5.19d) si ottiene l'ultimo valore

$$-\sin 2(\theta - \lambda') - \sin 2(\theta' - \lambda') \quad (5.23)$$

$$= \sin 2\lambda' - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\lambda'\right) = \sin 2\lambda' - \cos(2\lambda') \Leftrightarrow \lambda' = -\frac{\pi}{8} \quad (5.24)$$

Si noti che l'equazione (5.24) dà come risultati $\pm\frac{\pi}{8}$. La scelta per $-\frac{\pi}{8}$ è motivata dai passaggi successivi⁸. Il punto

$$\alpha = \left(0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8}\right)$$

è dunque un punto stazionario per la funzione f ⁹.

Per essere identificata la categoria di questo punto stazionario è necessario analizzare la matrice hessiana di f , ovvero la matrice con componenti $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

La funzione $f(x)$ è periodica, ovvero tale che

$$f(x + \lambda) = f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

non esistono dunque massimi per questa funzione. È però possibile ottenere il valore massimo¹⁰ eliminando dalla matrice hessiana una riga e rispettiva colonna che corrisponde all'eliminazione della dimensione nella quale la funzione è costante.

La matrice risultante è

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta'} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \theta} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \theta'} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta' \partial \theta} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta' \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta'^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cos(2(\theta - \lambda)) + 4 \cos(2(\theta - \lambda')) & -4 \cos(2(\theta - \lambda)) & 0 \\ -4 \cos(2(\theta - \lambda)) & 4 \cos(2(\theta' - \lambda)) + 4 \cos(2(\theta - \lambda)) & -4 \cos(2(\theta' - \lambda)) \\ 0 & -4 \cos(2(\theta' - \lambda)) & 4 \cos(2(\theta' - \lambda)) - 4 \cos(2(\theta' - \lambda')) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H(f)(\alpha) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

⁸In particolare, considerando $+\frac{\pi}{8}$, il punto ottenuto non sarebbe un estremo.

⁹Affinché questo si verifichi, bisogna anche inserire questi valore nell'equazione (5.19b) che non è stata usata per l'ottenimento di questo valore e controllare che l'uguaglianza è rispettata.

¹⁰La cui interpretazione geometrica è la cresta dell'onda cinque dimensionale creata dalla funzione.

Questa matrice è definita positiva, in quanto tutti gli autovalori μ

$$\mu \in \left\{ 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2} + 2 \right), 4\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \left(2 - \sqrt{2} \right) \right\}$$

sono positivi, il punto

$$\alpha = \left(0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8} \right)$$

è dunque il valore massimo che la funzione assume. La grandezza $|\langle S(\Lambda) \rangle|$ per la configurazione di angoli α assume il valore

$$|\langle S(\Lambda) \rangle| = 2\sqrt{2} \quad . \quad (5.25)$$

Un confronto con le equazioni (5.4) e (5.6) porta a

$$2 < |\langle S(\Lambda) \rangle| \leq 4 \quad .$$

Il risultato ottenuto con l'equazione (5.25) mostra come una scelta adeguata delle direzioni di misurazione portano alla violazione dell'equazione (5.4) decretando che la teoria quantistica non è una teoria che può essere completata con variabili nascoste di tipo locale. A conferma di questa conclusione, l'equazione (5.25) non viola l'equazione (5.6) rispettando così valore per una teoria non locale.

5.3.3 Enunciato del Teorema di Bell

Lo stesso BELL formula così il suo teorema:

Teorema di Bell

«But if [a hidden variable theory] is local it will not agree with quantum mechanics, and if it agrees with quantum mechanics it will not be local. This is what the theorem says.» [7, p.9]

Ma se la sua [della teoria quantistica] estensione è di tipo locale non potrà essere in accordo con la [fisica] quantistica, e se in accordo con la [fisica] quantistica non potrà essere locale. Questo è quanto afferma il teorema. [6]

5.4 Disuguaglianze di Bell negli esperimenti

La costruzione della Disuguaglianza di Bell segue un percorso logico-deduttivo; per accertare la sua validità o meno è dunque ancora necessario mostrare delle evidenze sperimentali.

5.4.1 Prime esperienze: FREEDMAN et al. e ASPECT et al.

Il primo esperimento [27] legato al Teorema di Bell è datato 1972 e attribuito a FREEDMAN et al. L'esperimento, il cui apparato sperimentale è raffigurato nella figura 5.2(a), è eseguito con coppie di fotoni di stato intrecciato emessi da una

sorgente di atomi di calcio e si basa su una disuguaglianza leggermente diversa da quella CHSH:

$$-1 \leq \langle S \rangle \leq 0 \quad .$$

I valori medi ottenuti (che secondo gli autori «non mostrano prova di deviazione dalle predizioni della fisica quantistica») associati agli angoli per i quali la grandezza S è massima sono

$$\begin{aligned} \langle S_1 \rangle &= 0.104 \pm 0.026 \\ \langle S_2 \rangle &= -1.097 \pm 0.018 \end{aligned}$$

in chiara violazione con la disuguaglianza proposta. Si osserva con questo risultato la prima conferma sperimentale della violazione delle Disuguaglianze di Bell.

Nel 1982 ASPECT et al. propongono un nuovo esperimento, anch'esso eseguito con una coppia di fotoni di stato intrecciato emessi da una sorgente di calcio, che si basa sulla disuguaglianza (5.4) ottenuta nella sezione 5.3:

$$|\langle S \rangle| \leq 2 \quad .$$

Il valore medio atteso per l'esperimento è

$$\langle S_{QM} \rangle = 2.70 \pm 0.05 \quad .$$

Il risultato sperimentale ottenuto dalle 5 misurazioni effettuate con la configurazione $\beta - \alpha = \alpha' - \beta = \beta' - \alpha' = 22.5^\circ$ e $\beta' - \alpha = 67.5^\circ$ è

$$\langle S_{Exp} \rangle = 2.697$$

con un margine di errore sperimentale ± 0.015 .

Sempre ASPECT et al. nello stesso 1982 propongono un secondo esperimento, schematizzato nella figura 5.2(b) dove si nota particolarmente bene la possibilità di eseguire due misurazioni per ogni fotone (notati ν_1 e ν_2). Diversamente dal-

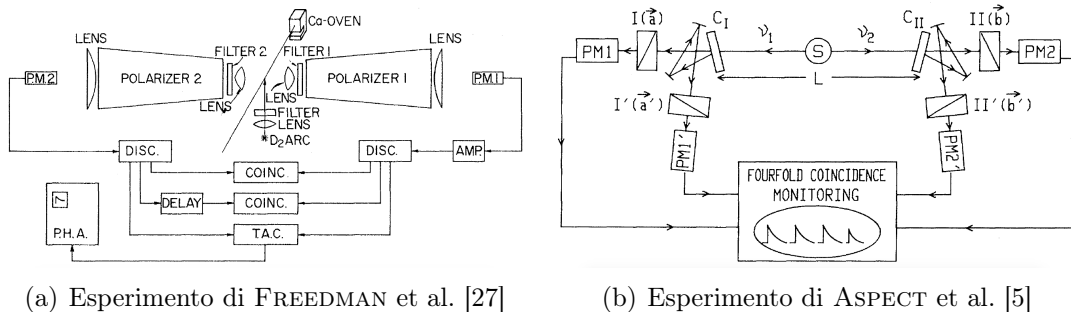


Figura 5.2: Schematizzazioni dei primi esperimenti sul teorema di Bell.

l'esperimento precedente, in questo esperimento i tipi di misurazione a cui sono soggette le particelle (in particolare si tratta della rotazione del polarizzatore)

non sono statici ma in continuo mutamento (quasi¹¹)casuale e indipendente fra l'apparecchio di Alice e quello di Bob. Il tempo di "switch" tra una direzione di misura e l'altra è di 10 ns che, rapportata al valore $c/L = 40$ ns, permette di affermare l'impossibilità di scambio di segnale tra le particelle¹².

La disuguaglianza da rispettare è:

$$-1 \leq \langle S \rangle \leq 0$$

che per la configurazione di angoli $\beta - \alpha = \alpha' - \beta = \beta' - \alpha' = 22.5^\circ$ e $\beta' - \alpha = 67.5^\circ$ porta a una predizione teorica per il valore medio di:

$$\langle S_{QM} \rangle = 0.101 \pm 0.020$$

che è in perfetto accordo con il valore ottenuto dall'esperimento

$$\langle S_{Exp} \rangle = 0.112 \quad .$$

5.4.2 Problematica "Loopholes"

Nonostante il Teorema di Bell sia stato confermato da tre esperimenti diversi la sua validità non è ancora provata in modo assoluto. Soprattutto gli esperimenti di ASPECT mostrano infatti sì una chiara e evidente violazione delle disuguaglianze, ma gli assetti sperimentali non sono ottimali. In particolare si sono levate alcune voci critiche a proposito delle seguenti problematiche:

Locality loophole

Le scelte di quale misurazione effettuare devono essere separate da un intervallo di tipo spazio. Ovvero, la scelta tra la misura α e α' e β e β' della figura 5.1 deve avvenire in modo che sia spazio-temporalmente separata dall'altra e casuale in modo che non possa influire sul comportamento delle particelle. Per fare ciò è necessario l'uso di rapidi RNGs (generatori casuali di numeri, dal inglese "random number generators").

Detection loophole

I detettori devono essere efficienti al punto da misurare una parte rappresentativa delle particelle.¹³

Gli esperimenti esposti nella sezione 5.4.1 non rispettano in modo esaustivo entrambe le loopholes.

¹¹«The ideal scheme has not been completed since the change is not truly random, but rather quasiperiodic. Nevertheless, the two switches on the two sides are driven by different generators at different frequencies. It is then very natural to assume that they function in an uncorrelated way.» [5]

¹²«In this experiment, switching between the two channels occurs about each 10 ns. Since this delay, as well as the lifetime of the intermediate level of the cascade (5 ns), is small compared to L/c (40 ns), a detection event on one side and the corresponding change of orientation on the other side are separated by a spacelike interval.»[5]

¹³In particolare, come esposto in [30], «for the conventional experiment with particles in the singlet state (or its photon analogue), the data predicted by the quantum theory do not violate this condition unless the quantum efficiency of the detectors exceeds 83%».

5.4.3 Dimostrazione definitiva: HENSEN et al.

La Locality loophole è colmata da un esperimento [53] del 1998 con detettori lontati 400 m uno dall'altro. Mentre un esperimento [45] del 2001 colma la Detection loophole con detettori ad alta efficienza.

Gli esperimenti appena citati colmano però solo una delle loopholes alla volta, perciò la dimostrazione definitiva della violazione delle Disugualianze di Bell arriva solo nel 2015 quando entrambe le loopholes sono chiuse assieme per la prima volta con l'esperimento di HENSEN et al. [33]. Questo risultato è confermato da altri due esperimenti [31, 48], anch'essi del 2015, che con apparati sperimentali leggermente diversi giungono agli stessi risultati.

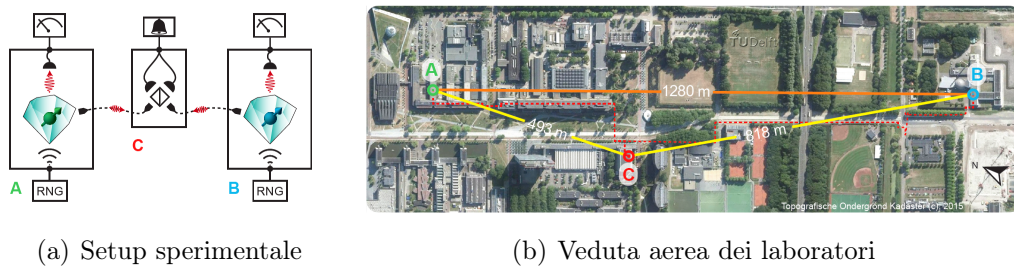


Figura 5.3: Illustrazioni del primo esperimento definitivo sul teorema di Bell [33].

L'esperimento [33] si basa sulla versione CHSH delle Disuguaglianze di Bell.

Il setup sperimentale usa detettori di spin ad alta efficienza basati su detezione tramite microonde colmando la detection loophole. Questo tipo di misurazione avviene tramite il cambiamento dello stato dell'elettrone che è portato, in caso di determinati spin, a emettere impulsi rossi o gialli in base ai quali è analizzabile lo stato iniziale dell'elettrone.

I selezionatori di percorso si basano su RNGs, costruiti con dispositivi laser, grazie ai quali è possibile la creazione di numeri casuali, con margine di predittibilità trascurabile nell'ordine di 10^{-5} , in un tempo utile per l'esperimento, ovvero 36 ns [1].

I detettori posti a una distanza di 1.3 km aprono un intervallo temporale di $\frac{L}{c} = 4.27 \mu\text{s}$ nel quale devono essere eseguite le misurazioni. Il completo processo lascia una finestra di 90 ns assicurando la soddisfazione dei criteri di località colmando la Locality loophole.

I risultati di 245 misurazioni portano ad un valore medio di S di

$$\langle S_{Expe} \rangle = 2.42 \pm 0.20$$

in accordo con il calcolo teorico di

$$\langle S_{QM} \rangle = 2.30$$

con un margine di errore sperimentale di ± 0.07 .

Gli esperimenti [31, 48] invece si basano su delle disuguaglianze leggermente diverse da quella CHSH utilizzando però degli apparati sperimentali più simile a quelli presentati nella figura 5.1. I setup sperimentali che hanno permesso di eseguire questi esperimenti sono concisamente descritti in modo simile dai due articoli: per SHALM et al. «Using a well-optimized source of entangled photons, rapid setting generation, and highly efficient superconducting detectors, we observe a violation of a Bell inequality with high statistical significance» e per GIUSTINA et al. «A high-quality polarization entangled source of photons, combined with high-efficiency, low-noise, single-photon detectors, allows us to make measurements without requiring any fair-sampling assumptions».

Un'importante considerazione sugli esperimenti privi di loopholes è fatta da HENSEN et al. alla fine dell'articolo: «*Our experiment realizes the first Bell test that simultaneously addresses both the detection loophole and the locality loophole. Being free of the experimental loopholes, the setup can test local realist theories of nature without introducing extra assumptions [...]. This result places the strongest restrictions on local realistic theories of nature to date.*»

Questo risultato è da interpretare come la dimostrazione sperimentale definitiva del Teorema di Bell.

5.5 Considerazioni finali e conclusioni

La conclusione espressa nel capitolo 4 ha aperto, nel panorama della fisica quantistica, la necessità di dimostrare la correttezza della visione classica della Natura proposta da EPR o di constatarne la fallacia.

Tramite la disuguaglianza di Bell presentata nell'articolo «On the Einstein Podolsky Rosen paradox» [8] si risponde al quesito presentato da EPR affermando che la fisica quantistica non è compatibile con un completamento tramite variabili nascoste in quanto non rispetta il criterio imposto dalla disuguaglianza di Bell.

Le recenti ricerche, in particolare quelle presentate nella sezione 5.4.3, portano anche la definitiva conferma sperimentale dell'aspetto appena citato. Si noti l'interessante considerazione fatta da HENSEN et al. a proposito dell'importanza dello sviluppo di un loophole-free Bell test: «*Because of unclosed loopholes, Bell's inequality could not be tested in previous experiments without introducing additional assumptions. Therefore, a Bell test that closes all experimental loopholes at the same time – commonly referred to as a loophole-free Bell test – is of foundational importance to the understanding of nature. In addition, a loophole-free Bell test is a critical component for device-independent quantum security protocols and randomness certification. In such adversarial scenarios all loopholes must be closed, since they allow for security breaches in the system.*».

Nonostante ciò la discussione non è del tutto conclusa infatti, come argomenta ASPECT in [3], «*can we say that the debate over local realism is resolved? There is no doubt that these are the most ideal experimental tests of Bell's inequalities to date. Yet no experiment, as ideal as it is, can be said to be totally loophole-free. In the experiments with entangled photons, for example, one could imagine*

that the photons' properties are determined in the crystal before their emission, in contradiction with [a] reasonable hypothesis. [...] The random number generators could then be influenced by the properties of the photons, without violating relativistic causality. Far fetched as it is, this residual loophole cannot be ignored. [...] Should experimentalists decide they want to close this far-fetched loophole, they could base the polarizers' orientations on cosmologic radiation received from opposite parts of the Universe [29]».

Ci sarebbero dunque ancora delle inverosimili loopholes da colmare.

Dal teorema di Bell non si può dedurre che la teoria quantistica è una teoria non locale in quanto potrebbe esistere una teoria, non considerata nella sezione 5.1 e tuttora assente in tutta la letteratura, che spiega in modo locale le correlazioni. Una tale teoria è però (per l'autore) difficile da immaginare, l'opzione di un'azione non locale sembra infatti più probabile.

La comunità scientifica è divisa su questo punto. Contrariamente alle considerazioni proposte fino a qui nel testo, una parte della comunità scientifica considera la stessa teoria quantistica la teoria locale che spiega le correlazioni quantistiche. La teoria quantistica sarebbe perciò una teoria non classica, quindi non del tipo proposto nella sezione 5.1, che spiega in modo locale le correlazioni.

Capitolo 6

Conclusioni

L'argomento EPR porta nel panorama della fisica quantistica l'affermazione che – assumendo come corretti due principi fondanti, principio di realtà e principio di località – si conclude necessariamente che la teoria quantistica è incompleta, supponendo così un completamento tramite variabili nascoste locali.

Le disuguaglianze proposte da BELL permettono di analizzare matematicamente quanto affermato da EPR giungendo alla conclusione che un completamento della teoria quantistica tramite variabili nascoste locali è impossibile.

Tale risultato è confermato sperimentalmente in modo da considerarsi definitivo¹ tramite le esperienze eseguite di recente. È forse la prima volta nel mondo contemporaneo che un problema filosofico può essere risolto in modo matematico e sperimentale. Una spiegazione tramite un modello classico e locale non può essere tuttavia esclusa, nonostante un modello di questo tipo sia assente in tutta la letteratura. L'unica spiegazione ad oggi esistente e non confutata sperimentalmente è quella di un'azione non locale tra le particelle. La discussione sulla natura delle correlazioni quantistiche a due particelle rimane dunque aperta. Rimane aperta pure la questione se la teoria quantistica stessa possa essere considerata la teoria locale non classica che chiarisce come queste correlazioni siano possibili. La comunità scientifica è infatti ancora divisa su questo punto.

Partendo da quanto proposto da EPR si giunge quindi ad una conclusione: la teoria quantistica è valida e un completamento tramite variabili nascoste locali è fondamentalmente da escludere, si conserva dunque l'indeterminismo legato alle probabilità oggettive della misurazione.

La teoria quantistica è quindi **completa** e **incompatibile con variabili nascoste di tipo locale** e la Natura a livello microscopico è **oggettivamente indeterministica** a livello di misurazione.

¹Le “inverosimili loopholes” proposte da ASPECT in [3] sono da considerare importanti da un punto di vista di tecnologia quantistica come la crittografia quantistica, probabilmente il discorso della non località è però da definirsi dimostrato.

L'incompatibilità della teoria quantistica con tutti modelli locali finora proposti si ripercuote in un'*incompatibilità tra i due pilastri fondamentali della teoria contemporanea*.

Sarà quindi presumibilmente necessaria un'altra rivoluzione nel mondo della scienza moderna, sulla cui necessità riflette lo stesso BELL:

«Le conseguenze degli eventi in un dato luogo si propagano in altri luoghi più velocemente della luce. Questo accade, è vero, in un modo che non può essere utilizzato per propagare i segnali, ma costituisce una grossolana violazione della casualità relativistica. [...] Per me, quindi, il vero problema della teoria quantistica è questo: il conflitto manifestamente essenziale tra una qualsiasi formulazione precisa della teoria e i fondamenti della relatività. Il che significa che esiste un'evidente incompatibilità, a livello più profondo, tra i due pilastri fondamentali della teoria contemporanea. [...] Può darsi che una reale sintesi della teoria quantistica e della teoria della relatività richieda non semplicemente sviluppi tecnici, bensì un radicale rinnovamento concettuale [6, p.228]».

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione dello spettro della luce e di tutte le onde elettromagnetiche.	4
1.2	Schematizzazione dei campi \vec{E} e \vec{B} nelle onde elettromagnetiche. .	4
1.3	Alcune immagini sulla polarizzazione delle onde elettromagnetiche.	5
1.4	Strumenti per la misurazione della polarizzazione.	6
1.5	Accessori per la misurazione della polarizzazione.	6
1.6	Tre polarizzatori in serie: $Z \mapsto X \mapsto Z$	8
1.7	Le tre direzioni di polarizzazione più usuali: H/V , $+/-$ e R/L . . .	12
1.8	L'evoluzione temporale schematizzata.	18
2.1	Risultati di un esperimento di interferenza a doppia fenditura con elettroni.	21
2.2	Schematizzazione del <i>Gedanken Experiment</i> fondamentale per le interferenze quantistiche.	23
2.3	Risultati degli esperimenti con e senza informazione "which-way". . .	24
2.4	L'interferometro di Mach-Zehnder.	25
2.5	L'interferometro di Mach-Zehnder con detettore \tilde{D}_X su B	30
2.6	Le due possibili situazioni nell'interferometro di Mach-Zehnder con detettore \tilde{D}_X	31
3.1	Esperimento con due fotoni di stato intrecciato.	35
3.2	L'interferometro di Franson modificato.	38
4.1	Versione originale dell'articolo comparso su <i>Physical review</i>	45
4.2	Titolo del articolo comparso sul NYT il 4 maggio 1935.	46
4.3	Schematizzazione dell'esperimento proposto da EPR.	51
5.1	Schema di misurazione su due particelle e due osservabili a scelta.	56
5.2	Schematizzazioni dei primi esperimenti sul teorema di Bell.	64
5.3	Illustrazioni del primo esperimento definitivo sul Teorema di Bell .	66

Appendice A

Basi matematiche

Per costruire i fondamenti della teoria quantistica sono necessari dei concetti matematici precisi, in particolare quello di spazio di Hilbert. A seguire si trovano i più importanti. Tutte le informazioni sono tratte da [22].

Lo spazio vettoriale \mathbb{C}^n

L'insieme \mathbb{C}^n , composto dalle n -uple di elementi $x \in \mathbb{C}$ notate (x_1, \dots, x_n) , munito delle operazioni di addizione

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$
$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

e di moltiplicazione per uno scalare

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(\alpha, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

è un \mathbb{C} -spazio vettoriale.

Una base \mathcal{B} di \mathbb{C}^n è un insieme di elementi di \mathbb{C}^n i quali sono linearmente indipendenti e con i quali per mezzo di una combinazione lineare si può scrivere (in modo univoco) ogni vettore elemento di \mathbb{C}^n . Ogni base possiede lo stesso numero di elementi e questo numero è chiamato dimensione di \mathbb{C}^n , notato $\dim \mathbb{C}^n$.

L'insieme degli $x_i \in \mathbb{C}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\{x_1 = (1, 0, \dots, 0), x_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, x_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

è chiamato *base canonica di \mathbb{C}^n* . La dimensione di \mathbb{C}^n è dunque $\dim \mathbb{C}^n = n$.

Sottospazi vettoriali di \mathbb{C}^n

Un sottoinsieme di \mathbb{C}^n , $W \subset \mathbb{C}^n$, che rispetta le condizioni

- $x + y \in W, \forall x, y \in W$;
- $\alpha x \in W, \forall x \in W$ e $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $0_{\mathbb{C}^n} \in W$

è chiamato *sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^n* .

Prodotto scalare in \mathbb{C}^n

Siano $\psi, \varphi \in \mathbb{C}^n$, allora l'applicazione sesquilineare

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\psi, \varphi) \longmapsto \langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\psi_i} \varphi_i$$

è chiamata *prodotto scalare standard*.

Norma

Sia $\psi \in \mathbb{C}^n$ allora l'applicazione

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\psi \longmapsto \|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$$

Vettore normalizzato

Sia $\psi \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$\|\psi\| = 1$$

allora ψ è detto *normalizzato*.

Ortogonalità

Siano $\psi, \varphi \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$\langle \psi, \varphi \rangle = 0$$

allora ψ, φ sono detti *ortogonali*.

Complemento ortogonale

Sia W un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^n . Con W^\perp si indica l'insieme di tutti i vettori di \mathbb{C}^n ortogonali a ogni vettore di W , dunque:

$$W^\perp = \{\psi \in \mathbb{C}^n : \langle \psi, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in W\}.$$

W^\perp è chiamato *complemento ortogonale* di W ed è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^n .

Ogni vettore $\psi \in \mathbb{C}^n$ può essere scritto in modo unico come

$$\psi = \psi_W + \psi_{W^\perp}$$

dove $\psi_W \in W$ e $\psi_{W^\perp} \in W^\perp$. Segue che \mathbb{C}^n può essere scritto come somma diretta di W e W^\perp , ovvero:

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp.$$

Spazio di Hilbert

$(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio di Hilbert, con \mathbb{C}^n inteso come \mathbb{C} -spazio vettoriale.

Prodotto matriciale

Siano $A \in \mathbb{M}_{pm}(\mathbb{C})$, $B \in \mathbb{M}_{mq}(\mathbb{C})$, allora la matrice $C = AB$ è definita come:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

Dove a_{ik} , b_{kj} , c_{ij} sono i termini delle rispettive matrici A , B , C .

Matrici aggiunte e autoaggiunte

Siano $A, B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ tale che

$$\langle B\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in \mathbb{C}^n$$

allora B è detta l'*aggiunta* di A ed è notata $B = A^*$.

Rispetto a un base ortonormata i coefficienti delle matrici soddisfano la condizione:

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \forall i, j$$

Se $A^* = A$ allora A è detta *autoaggiunta*.

Proiettori

Una matrice $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ tale che

$$P^2 = P \quad \text{e} \quad P = P^*$$

è detta *proiettore*.

P_ψ inteso come il proiettore ortogonale sulla direzione definita dal vettore normalizzato ψ è calcolato nel modo seguente:

$$P_\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi_1} & \overline{\psi_2} & \cdots & \overline{\psi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 & \psi_1 \overline{\psi_2} & \cdots & \psi_1 \overline{\psi_n} \\ \psi_2 \overline{\psi_1} & |\psi_2|^2 & \cdots & \psi_2 \overline{\psi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n \overline{\psi_1} & \psi_n \overline{\psi_2} & \cdots & |\psi_n|^2 \end{pmatrix}$$

Matrici unitarie

Una matrice $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ tale che

$$\langle U\psi, U\varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$$

è detta *unitaria*, si noti che U preserva il prodotto scalare. Vale che $U^{-1} = U^*$.

Autovettori e autovalori

Sia $\psi \in \mathbb{C}^n$ non nullo e $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tale che A e $A\psi$ siano linearmente dipendenti, ovvero

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : A\psi = \lambda\psi$$

allora ψ è detto *autovettore* di A . Lo scalare λ è detto *autovalore* associato all'autovettore ψ .

Per una determinata classe di matrici, tra le quali quelle autoaggiunte, autovettori associati ad autovalori differenti ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) sono ortogonali:

$$\begin{cases} A\psi_1 = \lambda_1\psi_1 \\ A\psi_2 = \lambda_2\psi_2 \end{cases} \Rightarrow \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$$

Teorema spettrale

Sia $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ autoaggiunta, allora vale che

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_{\lambda_i}$$

dove

λ_i : m autovalori distinti di A

P_{λ_i} : proiettore ortogonale con autovalore λ_i .

Spazio prodotto tensoriale [38]

Sia \mathcal{H}_1 uno spazio di Hilbert di dimensione n su \mathbb{C} e sia \mathcal{H}_2 uno spazio di Hilbert di dimensione m su \mathbb{C} . Un prodotto tensoriale di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 è uno spazio di Hilbert notato $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e un'applicazione

$$\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

tale che \otimes è bilineare.

Una base di \mathcal{H} è espressa secondo i termini delle basi $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_1} = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_2} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ come

$$\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \{\psi_i \otimes \varphi_j | i \leq n, j \leq m\} \quad .$$

Un vettore $\Phi \in \mathcal{H}$ costruito tramite i vettori $\psi \in \mathcal{H}_1$ e $\varphi \in \mathcal{H}_2$ come

$$\psi = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i \quad \varphi = \sum_{j=1}^m d_j \varphi_j$$

è notato $\Phi = \psi \otimes \varphi$ ed è espresso secondo la base $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ come

$$\Phi = \psi \otimes \varphi = \sum_{i,j} c_i d_j \psi_i \otimes \varphi_j \quad .$$

Più in generale ogni vettore $\Psi \in \mathcal{H}$ può essere scritto come combinazione lineare della base $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ come

$$\Psi = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \psi_i \otimes \varphi_j$$

dove $\alpha_{i,j}$ non è necessariamente fattorizzabile in $c_i d_j$.

Il prodotto scalare tra due elementi $\psi_1 \otimes \psi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è definito da

$$\langle \psi_1 \otimes \psi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} \quad .$$

Ne consegue che la norma di $\psi_1 \otimes \psi_2$ equivale a

$$\|\psi_1 \otimes \psi_2\|_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \|\psi_1\|_{\mathcal{H}_1} \|\psi_2\|_{\mathcal{H}_2} \quad .$$

Se A è un operatore lineare in \mathcal{H}_1 e B è un operatore lineare in \mathcal{H}_2 , allora nello spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ l'operatore $A \otimes B$ agisce su $\psi_1 \otimes \psi_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ come segue:

$$(A \otimes B)(\psi_1 \otimes \psi_2) = A\psi_1 \otimes B\psi_2 \quad .$$

Bibliografia

- [1] ABELLÁN Carlos et al., «Generation of fresh and pure random numbers for loophole-free Bell tests», in: *Physical review letters* 115.25 (2015) (cit. a p. 66).
- [2] AERTS Diederik et al., «Physical justification for using the tensor product to describe two quantum systems as one joint system», in: *Helv. Phys. Acta* 51.5-6 (1978).
- [3] ASPECT Alain, «Viewpoint: Closing the Door on Einstein and Bohr's Quantum Debate», in: *Physics* 8 (2015), p. 123 (cit. alle pp. 67, 69).
- [4] ASPECT Alain et al., «Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities», in: *Physical review letters* 49.2 (1982), p. 91 (cit. alle pp. 63, 64).
- [5] ASPECT Alain et al., «Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers», in: *Physical review letters* 49.25 (1982), p. 1804 (cit. alle pp. 64, 65).
- [6] BELL John Stewart, *Dicibile e indicibile in meccanica quantistica*, a cura di BRUNO Maurizio, trad. da LORENZONI Gabriele, Adelphi, 1987 (cit. alle pp. 56, 63, 70).
- [7] BELL John Stewart, «Locality in quantum mechanics: reply to critics», in: *Epistemological Letters* 7 (1975), pp. 2–6 (cit. a p. 63).
- [8] BELL John Stewart, «On the Einstein Podolsky Rosen paradox», in: (1964) (cit. alle pp. 55, 57, 67).
- [9] BELL John Stewart, «On the problem of hidden variables in quantum mechanics», in: *Reviews of Modern Physics* 38.3 (1966), p. 447 (cit. alle pp. 56, 57).
- [10] BOHM David et al., «Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky», in: *Physical Review* 108.4 (1957), p. 1070 (cit. a p. 47).
- [11] BOHR Niels, «Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?», in: *Physical review* 48.8 (1935), p. 696 (cit. a p. 52).
- [12] BOHR Niels, *The quantum postulate and the recent development of atomic theory*, vol. 3, Nature Publishing Group, 1928 (cit. alle pp. 32, 45).
- [13] BORN Max et al., *The Born-Einstein Letters, Correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955 with commentaries by Max Born*, trad. da BORN Irene, Basingstoke, Macmillan Press, 1971 (cit. alle pp. 52, 53).

-
- [14] CLAUSER John F et al., «Proposed experiment to test local hidden-variable theories», in: *Physical review letters* 23.15 (1969), p. 880 (cit. a p. 57).
- [15] DAVISSON C et al., «The scattering of electrons by a single crystal of nickel», in: (1927) (cit. a p. 21).
- [16] DE BROGLIE Louis, *Recherches sur la théorie des quanta*, Masson Paris, 1924 (cit. a p. 22).
- [17] DÜRR S et al., «Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a ‘which-way’ experiment in an atom interferometer», in: *Nature* 395.6697 (1998), pp. 33–37 (cit. a p. 24).
- [18] EINSTEIN Albert, «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt», in: *Annalen der Physik* 322 (1905), pp. 132–148 (cit. alle pp. 7, 22).
- [19] EINSTEIN Albert et al., «Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?», in: *Physical review* 47.10 (1935), p. 777 (cit. alle pp. 45, 46, 53, 55).
- [20] FAYE Jan, *Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics*, a cura di ZALTA Edward N., 2014, URL: <http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/qm-copenhagen/> (visitato il 28/07/2016) (cit. a p. 45).
- [21] FERRARI Christian, *Fisica*, Liceo Cantonale Locarno, 2014 (cit. alle pp. 4, 47, 50).
- [22] FERRARI Christian, *Fisica Quantistica, Una presentazione moderna*, Liceo Cantonale Locarno, 2014 (cit. alle pp. 3, 24, 32, 33, 56, 58, 73).
- [23] FERRARI Christian, *Fisica quantistica: Fondamenti, Il teorema di Bell e l’origine delle correlazioni quantistiche*, 2008 (cit. a p. 57).
- [24] FERRARI Christian, *Fisica quantistica - Introduzione alla polarizzazione e altri sistemi a due livelli*, 2014 (cit. alle pp. 33, 35, 40).
- [25] FERRARI Christian, *Probabilità*, Liceo Cantonale Locarno, 2012 (cit. a p. 58).
- [26] FINE Arthur, *The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory*, a cura di ZALTA Edward N., 2016, URL: <http://plato.stanford.edu/archives/fall2016/entries/qt-epr/> (visitato il 12/08/2016) (cit. a p. 52).
- [27] FREEDMAN Stuart J et al., «Experimental test of local hidden-variable theories», in: *Physical Review Letters* 28.14 (1972), p. 938 (cit. alle pp. 63, 64).
- [28] FRENCH Anthony Philip et al., *Niels Bohr: A centenary volume*, Harvard University Press, 1987 (cit. a p. 32).
- [29] GALLICCHIO Jason et al., «Testing Bell’s inequality with cosmic photons: Closing the setting-independence loophole», in: *Physical review letters* 112.11 (2014), p. 110405 (cit. a p. 68).
- [30] GARG Anupam et al., «Detector inefficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment», in: *Physical Review D* 35.12 (1987), p. 3831 (cit. a p. 65).

-
- [31] GIUSTINA Marissa et al., «Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons», in: *Physical review letters* 115.25 (2015), p. 250401 (cit. alle pp. 66, 67).
- [32] GRYNBERG Gilbert et al., *Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light*, Cambridge university press, 2010 (cit. a p. 58).
- [33] HENSEN Bernien et al., «Experimental loophole-free violation of a Bell inequality using entangled electron spins separated by 1.3 km», in: *arXiv preprint arXiv:1508.05949* (2015) (cit. alle pp. 66, 67).
- [34] HITACHI LTD, *Quantum Measurement*, URL: <http://www.hitachi.com/rd/portal/highlight/quantum/> (visitato il 20/05/2016) (cit. a p. 21).
- [35] HUYGENS Christiaan, *Traité de la lumière*, 1690 (cit. a p. 22).
- [36] JÖNSSON Claus, «Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten», in: *Zeitschrift für Physik* 161.4 (1961), pp. 454–474 (cit. a p. 21).
- [37] KELLY DEVINE Thomas, *The Advent and Fallout of EPR, An IAS teatime conversation in 1935 introduces an ongoing debate over quantum physics*, 2013, URL: <https://www.ias.edu/ideas/2013/epr-fallout> (visitato il 05/10/2016) (cit. a p. 46).
- [38] LE BELLAC Michel, *Physique quantique*, CNRS Editions, 2003 (cit. alle pp. 3, 8, 58, 76).
- [39] LÉVY-LEBLOND Jean-Marc, «La révolution quantique: une matière qui défie l'intuition», in: *Les révolutions du XXe siècle*, 8 gen. 2004 (cit. alle pp. 22, 23).
- [40] LEWIS Gilbert N, «The conservation of photons», in: *Nature* 118 (1926), pp. 874–875 (cit. a p. 7).
- [41] MOCHI ONORI Guglielmo, *Fisica quantistica e filosofia*, a cura di TRECCANI Enciclopedia, 2007-04-03, URL: http://www.treccani.it/scuola/tesine/meccanica_quantistica/5.html (visitato il 28/07/2016) (cit. a p. 45).
- [42] NOBEL MEDIA AB - NOBELPRIZE.ORG, *The Nobel Prize in Physics 1921*, 2014, URL: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1921/ (visitato il 22/05/2016) (cit. a p. 22).
- [43] PIRON Constantin, *Mécanique quantique: Bases et applications*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1990 (cit. a p. 3).
- [44] PLANCK Max, «Ueber die Elementarquanten der Materie und der Elektrizität», in: *Annalen der Physik* 2 (1900) (cit. a p. 7).
- [45] ROWE Mary A et al., «Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection», in: *Nature* 409.6822 (2001), pp. 791–794 (cit. a p. 66).
- [46] SCARANI Valerio, *Initiation à la physique quantique: la matière et ses phénomènes*, Vuibert, 2007 (cit. alle pp. 32, 40, 41).

- [47] SCULLY Marlan O et al., «Quantum optical tests of complementarity», in: *Nature* 351 (1991), pp. 111–116 (cit. alle pp. 23, 24).
- [48] SHALM Lynden K et al., «Strong loophole-free test of local realism», in: *Physical review letters* 115.25 (2015), p. 250402 (cit. alle pp. 66, 67).
- [49] TITTEL Wolfgang et al., «Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart», in: *Physical Review Letters* 81.17 (1998), p. 3563 (cit. a p. 55).
- [50] TRECCANI Enciclopedia, *Esperimento mentale (trad. del ted. Gedankenexperiment)*, a cura di TRECCANI Enciclopedia, 2016, URL: http://www.treccani.it/enciclopedia/esperimento-mentale_%5C%28Dizionario-di-filosofia%5C%29/ (visitato il 02/06/2016) (cit. a p. 23).
- [51] TRECCANI Enciclopedia, *Luce*, 2016, URL: <http://www.treccani.it/enciclopedia/luce/> (visitato il 14/09/2016) (cit. a p. 3).
- [52] TRECCANI Enciclopedia, *Principio*, 2016, URL: <http://www.treccani.it/vocabolario/principio/> (visitato il 14/08/2016) (cit. a p. 52).
- [53] WEIHS Gregor et al., «Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions», in: *Physical Review Letters* 81.23 (1998), p. 5039 (cit. a p. 66).