Cohomologie endlicher Gruppen und Darstellungstheorie

U. Stammbach

Professor an der ETH-Zürich

Inhaltsverzeichnis

Die Vögel singen nicht egal;
Der singet laut, der andere leise,
Kauz nicht wie ich, ich nicht wie Nachtigall,
Ein jeder hat so seine Weise.

Matthias Claudius

Einleitung

Der vorliegende Text beschäftigt sich mit dem Zusammenspiel zwischen der Cohomologie und der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Es ist eine endliche Gruppe G gegeben und ein Körper k der Charakteristik p, wo p die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Wir betrachten die Gruppenalgebra kG und die endlich-dimensionalen Moduln über kG. Diese entsprechen den modularen Darstellungen von G über k.

Die homologische Algebra hat im Laufe ihrer Entwicklung viele nützliche Techniken entwickelt, um Modulkategorien zu untersuchen. Es liegt auf der Hand, dass diese Techniken auch einen Beitrag zur modularen Darstellungstheorie liefern können. Interessanterweise zeigt die Entwicklungsgeschichte, dass die Beziehung zwischen diesen beiden Gebieten historisch erst spät fruchtbar gemacht worden ist: Es dauerte bis in die 70er Jahre, bis in der modularen Darstellungstheorie explizit die Begriffswelt und die Techniken der homologischen Algebra benutzt worden sind.

Der vorliegende Text stellt einige der Resultate aus den 70er und 80er Jahre zusammenhängend dar und verfolgt einzelne der damals aufgenommenen Fäden bis in die letzten Jahre. Die angesprochenen Themen kreisen um Gedanken, die sich wie folgt skizzieren lassen.

Die Darstellungstheorie beschäftigt sich mit dem Problem, eine Übersicht über alle Darstellungen einer Gruppe G zu gewinnen. Der *erste* Schritt wird dabei immer in einer Aufzählung der irreduziblen Darstellungen, also der einfachen Moduln bestehen. Im Falle der klassischen Darstellungstheorie endlicher Gruppen über $\mathbb{C}$ ist damit das Problem im wesentlichen gelöst, denn in diesem Fall ist jeder (endlich-dimensionale) Modul eine direkte Summe von einfachen. In der *modularen* Darstellungstheorie ist dies bekanntlich anders: hier gibt es neben der Bildung der direkten Summe weitere Arten, um Modulerweiterungen zu bilden. Es schliesst sich hier an den ersten Schritt ein *zweiter* an, der darin besteht, die verschiedenen Modulerweiterungen zu studieren. Der vorliegende Text beschäftigt sich nur mit diesem zweiten Schritt. In der homologischen Algebra werden die Erweiterungen bekannlich mit Hilfe der Funktoren $\mathrm{Ext}^*_{kG}(-,-)$ beschrieben, welche in dem Fall, den wir im Auge haben, immer mit Hilfe der Cohmologiegruppe $H^*(G,-)$ ausgedrückt werden können. Damit werden – und dies ist das Thema des vorliegenden Textes – in natürlicher Weise Eigenschaften der Cohomologie der Gruppe mit Eigenschaften der modularen Darstellungen verknüpft.

Wir geben im Folgenden einen kurzen Überblick über den Inhalt. Im einleitenden ersten Abschnitt stellen wir die wesentlichsten Grundlagen der Cohomologietheorie der Gruppen zusammen. Im zweiten Abschnitt definieren wir den in der Darstellungstheorie zentralen Begriff des Blocks einer Gruppenalgebra ganz im Rahmen der homologischen Algebra. Im dritten Abschnitt geben wir eine cohomologische Charakterisierung der p-auflösbaren Gruppen an; die eine Richtung ergibt sich dabei aus dem wohlbekannten Satz von Gaschütz, der besagt, dass über einer p-auflösbaren Gruppe die treuen einfachen Moduln triviale Cohomologie besitzen. Anschliessend kommen wir im vierten und fünften Abschnitt auf Fragen zurück, die sich aus unserer Definition des Begriffes des Blocks ergeben: Aussagen über die Kompositionsfaktoren der ersten beiden Loewyschichten der projektiven unzerlegbaren Moduln werden erhalten und die Zentralisatoren dieser Kompositionsfaktoren werden untersucht. Im sechsten und siebten Abschnitt formulieren wir verschiedene cohomologische Charakterisierungen von Formationen von Gruppen; dabei wird klar, dass dieser Begriff eng mit der Cohomologie der Gruppen verbunden ist. Im nachfolgenden achten Abschnitt leiten wir Resultate über den Zentralisator des aus zwei Loewyschichten bestehenden Quotienten der projektiven unzerlegbaren Moduln her. Dies führt insbesondere auf eine darstellungstheoretische Charakterisierung der Frattini Untergruppe. Im neunten Abschnitt richten wir unser Augenmerk auf die Frage nach der Cohmologie von treuen einfachen Moduln; es ist dies eine Frage, die wegen des oben erwähnten Resultates von Gaschütz nur für *nicht* p-auflösbare Gruppen von Belang ist. Im zehnten Abschnitt untersuchen wir, wie die in der Darstellungstheorie bekannten Fongreduktionen bei p-auflösbaren Gruppen die Cohomologie beeinflussen.

Die ersten zehn Abschnitte des vorliegenden Textes machen ganz wesentlichen Gebrauch von der 5-Term-Sequenz in der Cohomologie einer Gruppenerweiterung. Diese Sequenz ist in der homologischen Algebra als Korollar der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe wohlbekannt. Wegen ihrer zentralen Stellung ist aber ein elementarer Beweis durchaus erwünscht; wir beschreiben aus diesem Grunde einen einfachen Zugang dazu in einem Anhang zu diesem Text.

Im Unterschied zu den ersten zehn Abschnitten setzen die Abschnitte elf bis dreizehn des Textes ein grösseres Vorwissen in homologischer Algebra voraus. Der elfte Abschnitt enthält einen Beweis eines Satzes von Leonard Scott über die Cohomologie von p-auflösbaren Gruppen. Hier wird die Tatsache benützt, dass sich einfache Moduln über p-auflösbare Gruppen immer hochheben lassen. Schliesslich stellen wir im zwölften und dreizehnten Abschnitt Resultate zusammen, welche die Frage betreffen, ob $\mathrm{Ext}^*_{kG}(A,B)$ nichttrivial sei, wenn A und B einfache Moduln im *gleichen Block* von kG sind. Hier werden fortgeschrittene Hilfsmittel der Cohomologietheorie – wie Spektralreihen und die Norm Abbildung von Evens – verwendet; deren Bereitstellung im Rahmen eines kurzen Textes ist nicht möglich, und wir müssen in diesem Zusammenhang vollständig auf die entsprechende Lehrbuchliteratur verweisen.

Der vorliegende Text erscheint auf Einladung von Professor Michler in der Skripten-Reihe der Universität Essen. Ich ergreife hier mit Freuden die Gelegenheit, um Gerhard Michler für viele Jahre des Miteinander-Denkens und der persönlichen Freundschaft ganz herzlich zu danken. Viele der hier dargestellten Gedankengänge können auf Kontakte zurückgeführt werden, die anlässlich von Forschungsaufenthalten am Institut für Experimentelle Mathematik zustande gekommen sind. Die angenehme und der ernsthaften Tätigkeit so förderliche Atmosphäre dieses Institutes hat auch viel zur Endfassung dieses Textes beigetragen: Die Zuhörer einer Vorlesungsreihe im Juni 2000 und Oktober 2001 haben mich in verdankenswerter Weise auf viele kleinere und auch grössere Fehler aufmerksam gemacht. Ein ganz spezieller Dank gehört Conchita Martínez Pérez und Gerhard Michler: beide haben Korrekturen, Anmerkungen und Anregungen beigesteuert, die zu vielen wesentlichen Verbesserungen in der Endfassung geführt haben.

Zürich, im März 2002 Urs Stammbach

1. Cohomologie endlicher Gruppen

Es sei G eine endliche Gruppe, und k ein Körper der Charakteristik p, wo p die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Wir betrachten die Gruppenalgebra kG. Die endlich-dimensionalen Moduln über kG entsprechen den Darstellungen von G über k.

Der endlichen Gruppe G und dem kG-Modul M werden in der homologische Algebra die Cohomologiegruppen $H^n(G, M)$, $n \geq 0$ zugeordnet. Das Verfahren besteht darin, dass man sich zum trivialen kG-Modul k eine kG-projektive Auflösung $\mathbb{P} \to k \to 0$ konstruiert, d.h. eine exakte Sequenz

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to k \to 0 \ ,$$

wo P_n projektive kG-Moduln sind, dann den Komplex $\mathrm{Hom}_{kG}(\mathbb{P}, M)$ bildet und davon die Cohomologie berechnet. Es soll nicht verschwiegen werden, dass diese einfach zu beschreibende Vorschrift im konkreten Fall sehr kompliziert ist und nur in Einzelfällen zur Berechnung aller Cohomologiegruppen führt. Da helfen auch Computer nur bedingt, indem die Glieder der projektiven Auflösung mit wachsendem n i.a. sehr rasch an Grösse zunehmen (siehe aber die Computerprogramme von Jon Carlson [C1] und David Green [Gre]).

Anzumerken ist hier, dass der Körper k durch irgend einen (kommutativen) Ring ersetzt werden kann. Üblicherweise wird in Texten über die Cohomologie der Gruppen als Grundring der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen verwendet; demgegenüber beschränken wir uns hier im Hinblick auf die modulare Darstellungstheorie auf den Körper k und auf kG-Moduln.

Wir werden hier kaum von der Berechnung dieser Cohomologiegruppen sprechen, sondern uns auf deren Eigenschaften konzentrieren und auf Beziehungen zwischen der Gruppe G und deren Cohomologie. Wichtig für unsere Zwecke sind dabei insbesondere Aussagen über die explizite *Bedeutung* der Cohomologiegruppen in niedrigen Dimensionen. Für eine Einführung in die Cohomologie der Gruppen verweisen wir auf [HSt, Chapter VI]; hier begnügen wir uns, einige der für unseren Text grundlegenden Tatsachen in Erinnerung zu rufen. Wie überall in diesem Text bezeichnen wir mit A, B, C, etc. jeweils kG-Moduln.

(1) Es gilt $H^0(G, A) = A^G = \{a \in A \mid xa = a \text{ für alle } x \in G\}$ (siehe [HSt], Chapter VI, Section 3).

(2) Es gilt $H^1(G, A) = \mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{Ider}(G, A)$ (siehe [HSt], Chapter VI, Section 4). Dabei bezeichnet $\mathrm{Der}(G, A)$ die abelsche Gruppe der Derivationen $d : G \to A$, $d(xy) = d(x) + xd(y)$, $x, y \in G$, und $\mathrm{Ider}(G, A)$ bezeichnet die Untergruppe der inneren Derivationen $d_a(x) = xa - a$, $a \in A$. Im Spezialfall, wo A ein trivialer kG-Modul

ist, ist eine Derivation nichts anderes als ein Homomorphismus der (multiplikativen) Gruppe G in die (additive) Gruppe A; wegen $\mathrm{Ider}(G, A) = 0$ gilt in diesem Fall also $\mathrm{Der}(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A) = \mathrm{Hom}(G/G', A)$.

(3) Die Gruppe $H^2(G, A)$ klassifiziert Erweiterungen $A \rightarrowtail \tilde{G} \twoheadrightarrow G$ (siehe [HSt], Chapter VI, Section 10). Dem Nullelement entspricht dabei die Äquivalenzklasse der zerfallenden Erweiterung $A \rightarrowtail A \rtimes G \twoheadrightarrow G$.

(4) Zu einer kurzen exakten Folge $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$ gehört eine natürliche lange exakte Cohomologiesequenz

$$\cdots \to H^n(G, A) \xrightarrow{\mu_*} H^n(G, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^n(G, C) \xrightarrow{\vartheta} H^{n+1}(G, A) \to \cdots .$$

(siehe [HSt], Chapter VI, p. 189). Dies ist eine elementare homologische Aussage, welche in ähnlicher Weise für jede Cohomologietheorie gilt.

Die lange exakte Cohomologiesequenz beinhaltet auch die Additivität der Cohomologie. Es gilt

$$H^n(G, A \oplus B) = H^n(G, A) \oplus H^n(G, B) .$$

(5) Zu einer Gruppenerweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ und einem kG-Modul A gehört eine natürliche exakte Sequenz von fünf Termen

$$0 \to H^1(Q, A^N) \to H^1(G, A) \to (H^1(N, A))^Q \to H^2(Q, A^N) \to H^2(G, A) .$$

Diese in der homologischen Algebra als Korollar der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe wohlbekannte Sequenz spielt in den nachfolgenden Abschnitten eine zentrale Rolle. Wir reproduzieren aus diesem Grunde im Anhang dieses Textes einen *elementaren Beweis* dieser Folge. Man beachte, dass A^N in offensichtlicher Weise ein kQ-Modul ist. Die Operation von Q in $H^1(N, A)$ setzt sich aus der Konjugation von G in N zusammen, $n \mapsto xnx^{-1}$, und der zugehörigen Abbildung $a \mapsto xa$ von A.

Im Fall, wo N in A trivial operiert, wo also A als ein kQ-Modul angesehen werden kann, spezialisiert sich die 5-Term-Sequenz zu (siehe [HSt], Chapter VI, Section 8)

$$0 \to H^1(Q, A) \to H^1(G, A) \to \mathrm{Hom}_Q(N, A) \to H^2(Q, A) \to H^2(G, A) .$$

(6) Diese letztere Sequenz kann dazu benützt werden, um den Zusammenhang (siehe (3)) zwischen $H^2(Q, A)$ und den Erweiterungen von Q durch A zu beschreiben. Ist $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ eine derartige Erweiterung, so ist ihr das Element $\xi \in H^2(Q, A)$ zugeordnet, das in der 5-Term-Sequenz

$$0 \to H^1(Q, A) \to H^1(G, A) \to \mathrm{Hom}_{kQ}(A, A) \xrightarrow{\Delta} H^2(Q, A) \to H^2(G, A) .$$

als Bild der Identität $1_A : A \to A$ unter Δ erhalten wird (siehe [HSt], Chapter VI, Section 10). Die Operation von Q in der Gruppe $H^1(A,A) = \mathrm{Hom}(A,A)$ ist dabei die "übliche", d.h. die Diagonaloperation. Die Fixelemente $(H^1(A,A))^Q$ sind dann offensichtlich gerade die kQ-Modulhomomorphismen.

(7) Für die zerfallende Erweiterung $A \rightarrowtail A \rtimes Q \twoheadrightarrow Q$ liefert die 5-Term-Sequenz die kurze exakte Folge

$$0 \to H^1(Q,A) \to H^1(A \rtimes Q, A) \to \mathrm{Hom}_{kQ}(A,A) \to 0 \ .$$

Die (Projektions-)Abbildung $d : A \rtimes Q \to A$ definiert durch $d(q,a) = a$ ist eine Derivation; sie wird unter $H^1(A \rtimes Q, A) \to \mathrm{Hom}_{kQ}(A,A)$ auf die Identität von A abgebildet (siehe [HSt], Chapter VI, Section 5). Wählt man ein zu Q konjugiertes Komplement in $A \rtimes Q$, so beschreibt die zugehörige (Projektions-)Abbildung das gleiche Element in $H^1(A \rtimes Q, A)$, während verschiedene Konjugationsklassen von Komplementen zu verschiedenen Elementen in $H^1(A \rtimes Q, A)$ Anlass geben. Es folgt, dass $H^1(Q,A)$ die Anzahl verschiedener Konjugationsklassen von Komplementen in $A \rtimes Q$ misst. Insbesondere ergibt sich aus $H^1(Q,A) = 0$, dass es nur *eine* Konjugationsklasse von Komplementen gibt.

Die 5-Term-Sequenz beschreibt den Einfluss der Cohomologiegruppen von Q und N auf die Cohomologie der Gruppenerweiterung G in niedrigen Dimensionen. Die entsprechenden Cohomologiegruppen von G werden dadurch natürlich nicht vollständig festlegt. Für höhere Dimensionen ist der Zusammenhang noch etwas weniger direkt. Es gibt eine sogenannte Spektralreihe (Lyndon-Hochschild-Serre, siehe [HSt])

$$H^l(Q, H^m(N,A)) \Rightarrow H^n(G,A) \ .$$

Diese erlaubt es, die Cohomologie von G durch die Cohomologien von Q und N – in einem genau umschriebenen Sinn – zu "approximieren". Wir gehen hier nicht näher auf die Theorie der Spektralreihen ein, denn sie ist technisch sehr involviert (siehe dazu [HSt], Chapter VIII oder [E], Chapter 7). Wir bemerken nur die folgenden Tatsachen, die sich ohne grössere Schwierigkeiten aus dieser Theorie ergeben und die wir in diesem Text frei benützen werden:

- Sind die Gruppen auf der linken Seite der Spektralreihe für alle Indizes $l, m \geq 0$ trivial, so folgt $H^n(G,A) = 0$ für alle $n \geq 0$.
- Gilt $H^m(N,A) = 0$ für $m \geq 1$, so "kollabiert" die Spektralreihe, und man erhält einen Isomorphismus

$$H^n(G,A) = H^n(G/N, H^0(N,A)) = H^n(G/N, A^N) \ .$$

In den Abschnitten 12 und 13 werden wir allerdings weitere, tiefliegende Eigenschaften der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe benutzen, wobei wir dort auf entsprechende Literaturstellen verweisen.

Die Cohomologiegruppen $H^n(G,A)$ lassen sich als spezielle Ext-Gruppen auffassen; es gilt
$$H^n(G,A) = \mathrm{Ext}^n_{kG}(k,A) \ .$$
Man beachte, dass kurze exakte Folgen, eingesetzt an die erste bzw. zweite Stelle des Bifunktors Ext, lange exakte Folgen der Ext-Gruppen induzieren. Die lange exakte Ext-Folge in der zweiten Variablen entspricht dabei der oben erwähnten langen exakten Cohomologiefolge (siehe (4)). Kann man die Cohomologiegruppen als Ext-Gruppen auffassen, so kann man andererseits über dem Körper k die Ext-Gruppen auch als spezielle Cohomologiegruppen auffassen. Es gilt

$$\mathrm{Ext}^n_{kG}(B,A) = H^n(G, \mathrm{Hom}_k(B,A)) = H^n(G, B^* \otimes_k A) \ .$$

Dabei bezeichnet B^* den zu B dualen Modul $\mathrm{Hom}_k(B,k)$, $\mathrm{Hom}_k(B,A)$ wie auch $B^* \otimes_k A$ tragen die diagonale kG-Modulstruktur.

Aus der Definition der Ext-Gruppen in der homologischen Algebra folgt unmittelbar $\mathrm{Ext}^n_{kG}(B,A) = 0$ für alle $n \geq 1$, falls A injektiv oder B projektiv ist. Nun ist kG eine Frobeniusalgebra, d.h. es gilt $kG^* \simeq kG$ (siehe [CR], p. 198). Daraus ergibt sich, dass die beiden Begriffe injektiv und projektiv gleichbedeutend sind (siehe [CR], p. 199). Damit gilt $\mathrm{Ext}^n_{kG}(B,A) = 0$ für $n \geq 1$, falls B *oder* A projektiv ist. Insbesondere verschwinden für projektive (oder injektive) kG-Koeffizientenmoduln A die Cohomologiegruppen $H^n(G,A)$ in allen positiven Dimensionen.

Falls die Charakteristik des Körpers k die Gruppenordung $|G|$ nicht teilt, so ist nach dem Satz von Maschke die Gruppenalgebra halbeinfach. In diesem Fall sind alle kG-Moduln projektiv, und es verschwinden alle Ext-Gruppen und damit auch alle Cohomologiegruppen in positiven Dimensionen. Es gilt demzufolge

Satz 1.1. *Es sei A ein kG-Modul, und* char k *sei kein Teiler der Gruppenordung $|G|$. Dann folgt $H^n(G,A) = 0$ für alle $n \geq 1$.*

Zwei aus der Darstellungstheorie wohlbekannte Operationen an Moduln, nämlich die Restriktion und die Induktion, spielen auch im Zusammenhang mit der homologischen Algebra eine wichtige Rolle. Es sei U eine Untergruppe von G und A ein kU-Modul. Dann ist der induzierte Modul $A{\uparrow}^G$ gegeben als $\mathrm{Hom}_{kU}(kG,A)$, wobei kG durch Multiplikation von rechts in kG operiert. In äquivalenter Weise lässt sich $A{\uparrow}^G$ als $kG \otimes_{kU} A$ beschreiben (siehe [E], p. 36 ff).

Bezüglich der Cohomologie von G bzw. U gilt das folgende berühmte Lemma von Eckmann-Shapiro (siehe [E], p. 36 ff)

Lemma 1.2. *Es sei U eine Untergruppe von G und A ein kU-Modul. Dann gilt*

$$H^n(U, A) = H^n(G, A{\uparrow}^G)\ .$$

Im Folgenden tritt oft der Fall auf, wo N ein Normalteiler von G ist. Betrachtet man einen kN-Modul A, induziert nach G und restringiert wieder auf kN, betrachtet man also $A{\uparrow}^G{\downarrow}_N$, so gilt

$$A{\uparrow}^G{\downarrow}_N = \bigoplus_{x \in G/N} x \otimes A\ .$$

Wir nennen $x \otimes A$ auch etwa den zu A konjugierten kN-Modul.

In diesen Zusammenhang gehört auch der sogenannte Satz von Clifford, den wir hier nur in einer abgeschwächten Form und ohne Beweis zitieren (siehe [H], p. 565).

Satz 1.3. *Es sei A ein einfacher kG-Modul, und N sei ein Normalteiler von G. Es sei B ein einfacher kN-Untermodul von $A{\downarrow}_N$. Dann ist $A{\downarrow}_N$ eine direkte Summe von zu B konjugierten Moduln $x \otimes B$. Insbesondere ist $A{\downarrow}_N$ halbeinfach.*

Schliesslich zitieren wir hier noch ein Resultat der Darstellungstheorie, welches das Verhalten von einfachen Moduln bei Körpererweiterungen betrifft (siehe [H], p. 18, die dort auftretende Voraussetzung über die Körpererweiterung ist überflüssig).

Satz 1.4. *Es sei V ein einfacher kG-Modul. Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter $\mathbb{F}_pG$-Modul U, so dass V ein direkter Summand von $k \otimes_{\mathbb{F}_p} U$ ist. Ferner ist $V_{\mathbb{F}_p}$ isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von U.*

Was die Cohomologie betrifft, so gilt bei Körpererweiterungen der einfache Satz

Satz 1.5. *Es sei $k \subseteq k'$ eine Körpererweiterung, und U sei ein beliebiger kG-Modul. Dann gilt $H^n(G, k' \otimes_k U) = k' \otimes_k H^n(G, U)$.*

2. Projektive unzerlegbare Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir die projektiven unzerlegbaren Moduln betrachten. Sie spielen in der modularen Darstellungstheorie eine zentrale Rolle. So führt z.B. die Frage nach den möglichen Modulerweiterungen von (einfachen) Moduln direkt auf Fragen über die Struktur der projektiven unzerlegbaren Moduln.

Es seien A und B zwei kG-Moduln. Die möglichen Äquivalenzklassen von Erweiterungen $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ werden in der homologischen Algebra durch $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B)$ beschrieben.

Es seien $S_1 = k, S_2, \ldots, S_m$ die (Isomorphieklassen der) einfachen kG-Moduln. Wir definieren einen Graphen $\Gamma = \Gamma(G)$:

- die Ecken entsprechen den einfachen Moduln S_i;
- zwischen S_i und S_j gibt es eine Kante, wenn $\mathrm{Ext}^1_{kG}(S_i, S_j)$ oder $\mathrm{Ext}^1_{kG}(S_j, S_i)$ nicht trivial ist.

Der Graph Γ liefert eine Aufteilung der einfachen kG-Moduln in Klassen. Wir sagen

- S_i gehört zum Hauptblock $\mathcal{B}_1$, wenn S_i und $S_1 = k$ zur selben Zusammenhangskomponenten des Graphen Γ gehören;
- S_i und S_j gehören zum selben Block $\mathcal{B}$, wenn S_i und S_j zur gleichen Zusammenhangskomponenten des Graphen Γ gehören.

Wir beweisen zuerst die beiden folgenden einfachen Resultate.

Lemma 2.1. *Es seien A und B zwei Moduln mit $\mathrm{Ext}^n_{kG}(A, B) \neq 0$. Dann existieren Kompositionsfaktoren M von A und N von B mit $\mathrm{Ext}^n_{kG}(M, N) \neq 0$.*

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach der Summe s der Kompositionslängen von A und B. Fur $s = 2$ ist nichts zu beweisen. Es sei $s \geq 3$. Dann enthält A oder B einen echten einfachen Untermodul. In den beiden Fällen verläuft der Beweis analog: die Rollen von A und B werden einfach vertauscht. Wir nehmen hier an, dass A einen derartigen Untermodul A' enthalte. Die lange exakte Ext-Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n_{kG}(A/A', B) \to \mathrm{Ext}^n_{kG}(A, B) \to \mathrm{Ext}^n_{kG}(A', B) \to \cdots$$

liefert dann $\mathrm{Ext}^n_{kG}(A/A', B) \neq 0$ oder $\mathrm{Ext}^n_{kG}(A', B) \neq 0$. In beiden Fällen ergibt sich die Aussage des Satzes dann aus der Induktionsvoraussetzung.

Lemma 2.2. *Es sei T ein kG-Modul. Bezeichnen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_l$ die verschiedenen Blöcke von kG. Dann lässt sich T schreiben als $T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_l$, wo für $i = 1, 2, \ldots, l$ der Modul T_i nur Kompositionsfaktoren aus dem Block $\mathcal{B}_i$ enthält.*

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach der Kompositionslänge von T. Es sei B ein minimaler Untermodul von T. Nach Induktion lässt sich dann T/B schreiben als $S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_l$, wo S_i nur Kompositionsfaktoren aus dem Block $\mathcal{B}_i$ enthält. Es bezeichne $\pi : T \to T/B$ die kanonische Projektion. Wenn B zu $\mathcal{B}_i$ gehört, so setzen wir $T_i = \pi^{-1}(S_i)$. Wir erhalten dann die exakte Sequenz $T_i \rightarrowtail T \twoheadrightarrow S'$, wobei wir $S' = S_1 \oplus \cdots \oplus S_{i-1} \oplus S_{i+1} \oplus \cdots \oplus S_l$ gesetzt haben. Wir zeigen, dass diese Sequenz zerfällt. Angenommen sie zerfalle nicht; dann folgt $\mathrm{Ext}^1_{kG}(S', T_i) \neq 0$. Gemäss dem vorhergehenden Lemma gibt es dann Kompositionsfaktoren N von T_i und M von S' mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(M, N) \neq 0$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass M und N gemäss der Definition von S' und T_i in verschiedenen Blöcken liegen.

Aus Lemma 2.2 ergibt sich sofort das Korollar, dass die Kompositionsfaktoren eines unzerlegbaren Moduls alle im gleichen Block liegen.

Betrachten wir einen Quotienten Q der Gruppe G, so bilden die einfachen kQ-Moduln eine Teilmenge der einfachen kG-Moduln. Sind A und B zwei einfache kQ-Moduln, so liefert die 5-Term-Sequenz den injektiven Homomorphismus

$$H^1(Q, A^* \otimes B) = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(A, B) \rightarrowtail \mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) = H^1(G, A^* \otimes B) \ .$$

Daraus folgt, dass der Graph $\Gamma(Q)$ ein Teilgraph von $\Gamma(G)$ ist. Insbesondere schliessen wir daraus, dass zwei einfache kQ-Moduln, die über Q im gleichen Block liegen, auch über G zum gleichen Block gehören.

Unter den unzerlegbaren kG-Moduln spielen die unzerlegbaren Summanden von kG (als Linksmodul) eine Sonderrolle. Es sind dies die sogenannten PIM's, die *projektiven unzerlegbaren Moduln*, $kG = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_m$. Es besteht ein natürliches Interesse daran, die Struktur der projektiven unzerlegbaren Moduln aufzuklären. Dazu bietet sich als erstes Hilfsmittel die *Loewy-Reihe* an. Diese Reihe wird mit Hilfe des Radikals J der Algebra kG definiert. Die (absteigende) Loewy-Reihe des Moduls A ist gegeben durch

$$A \supset JA \supset J^2 A \supset \cdots \supset J^{r-1} A \supset J^r A = 0 \ .$$

Sie lässt sich auch als die am schnellsten absteigende Reihe von Untermoduln von A definieren, deren sukzessive Quotienten halbeinfach sind.

Es gilt nun der folgende wohlbekannte und grundlegende Satz (siehe [HB], p. 156).

Satz 2.3. *Es sei P ein projektiver unzerlegbarer Modul von kG. Dann ist $P/JP = M$ einfach und P ist durch M (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.*

Damit entsprechen die Isomorphieklassen der einfachen kG-Moduln eineindeutig den Isomorphieklassen der projektiven unzerlegbaren Moduln. Für einen beliebigen Modul A heisst der Quotient A/JA der *Kopf* von A.

Satz 2.4. *Es seien A und B zwei einfache Moduln, und P sei der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Dann gilt*

$$\operatorname{Ext}^1_{kG}(A,B) = \operatorname{Hom}_{kG}(JP/J^2P, B)\ .$$

Beweis. Es sei P der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Dann erhalten wir eine kurze exakte Folge

$$JP \overset{\mu}{\rightarrowtail} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A\ .$$

Wendet man darauf den Funktor $\operatorname{Hom}_{kG}(-,B)$ an, so erhält man

$$0 \to \operatorname{Hom}_{kG}(A,B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \operatorname{Hom}_{kG}(P,B) \xrightarrow{\mu^*} \operatorname{Hom}_{kG}(JP,B) \to \operatorname{Ext}^1_{kG}(A,B) \to 0\ .$$

Da B einfach ist, gilt $\operatorname{Hom}_{kG}(P,B) = \operatorname{Hom}_{kG}(P/JP,B) = \operatorname{Hom}_{kG}(A,B)$, so dass ε^* ein Isomorphismus ist. Ferner gilt $\operatorname{Hom}_{kG}(JP,B) = \operatorname{Hom}_{kG}(JP/J^2P,B)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus Satz 2.4 folgt, dass die möglichen Erweiterungen von A durch B alle bereits in den oberen beiden Loewyschichten des projektiven unzerlegbaren Modul P mit Kopf A realisiert werden.

Liegen die einfachen Moduln A und B nicht im gleichen Block, so impliziert die Definition der Blöcke $\operatorname{Ext}^1_{kG}(A,B) = 0$. Von dieser Aussage gilt die folgende wohlbekannte Verallgemeinerung.

Satz 2.5. *Es seien A und B zwei einfache Moduln, die nicht im gleichen Block liegen. Dann ist* $\operatorname{Ext}^n_{kG}(A,B) = 0$ *für alle* $n = 0, 1, \ldots$.

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach n. Für $n = 0, 1$ ist die Aussage des Satzes trivialerweise richtig. Es sei $n \geq 2$. Dann betrachten wir die kurze exakte Folge

$$JP \overset{\mu}{\rightarrowtail} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A\ .$$

mit P der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Aus der langen exakten Ext-Sequenz folgt dann

$$\operatorname{Ext}^{n-1}_{kG}(JP,B) \equiv \operatorname{Ext}^n_{kG}(A,B)\ .$$

Wäre die linke Seite von Null verschieden, so würde ein Kompositionsfaktor M von JP existieren mit $\operatorname{Ext}^{n-1}_{kG}(M,B) \neq 0$. Als Kompositionsfaktor des unzerlegbaren Moduls P

liegt M aber im gleichen Block wie A. Dies wäre ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Es muss also die linke Seite der Gleichung verschwinden und folglich auch die rechte. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir merken hier an, dass die Umkehrung der Aussage des Satzes im allgemeinen falsch ist. Auf dieses Thema werden wir in den Abschnitten 12 und 13 zurückkommen.

Im Folgenden sagen wir, der einfache $\mathbb{F}_pG$-Modul A komme in der Gruppe G als p-Hauptfaktor vor, wenn Normalteiler $N_1 \supset N_2$ existieren mit $N_1/N_2 \simeq A$.

Satz 2.6. *Es sei G eine Gruppe, und der $\mathbb{F}_pG$-Modul A sei ein Hauptfaktor von G. Dann liegt A im Hauptblock.*

Beweis. Es seien $N_1 \supset N_2$ zwei aufeinanderfolgende Normalteiler in einer Hauptreihe von G mit $N_1/N_2 \cong A$. Die 5-Term-Sequenz zur Erweiterung

$$N_1/N_2 \rightarrowtail G/N_2 \twoheadrightarrow G/N_1$$

mit Koeffizienten A lautet

$$H^1(G/N_1, A) \rightarrowtail H^1(G/N_2, A) \to \mathrm{Hom}_G(N_1/N_2, A) \to H^2(G/N_1, A) \to H^2(G/N_2, A)\ .$$

Daraus folgt $H^1(G/N_2, A) \neq 0$ oder $H^2(G/N_1, A) \neq 0$. Interpretiert man die Cohomologiegruppen als Ext-Gruppen, so folgt nach dem vorhergehenden Satz in beiden Fällen, dass A im Hauptblock eines Quotienten von G liegt. Damit liegt aber A auch im Hauptblock von G selbst.

Das Resultat lässt sich ohne weiteres auch für kG-Moduln aussprechen. Wir sagen, der einfache kG-Modul A komme in der Gruppe G als k-Hauptfaktor vor, wenn Normalteiler $N_1 \supset N_2$ existieren, so dass A in $k \otimes_{\mathbb{F}_p} N_1/N_2$ als direkter Faktor vorkommt.

Bemerkung. Wir werden in Abschnitt 4 auf Verschärfungen von Satz 2.6. eingehen.

Wir fügen zum Schluss noch einiges zur dualen Situation an. Dual zur absteigenden Loewy-Reihe eines Moduls A gibt es die *aufsteigende* Loewy-Reihe oder *Sockelreihe*:

$$\mathrm{soc}_1 A = \mathrm{soc} A, \quad \mathrm{soc}_n A/\mathrm{soc}_{n-1} A = \mathrm{soc}(A/\mathrm{soc}_{n-1} A)\ .$$

Es gilt der Satz, den wir hier ohne Beweis erwähnen, dass der Sockel des projektiven unzerlegbaren Moduls P mit Kopf A isomorph zu A ist (für einen Beweis im Geiste dieses Textes verweisen wir auf [Se], p.122).

Wir bemerken ferner, dass durch Dualisieren die absteigende Loewy-Reihe eines Moduls A in die Sockelreihe des dualen Moduls A^* übergeht und umgekehrt. Wegen $kG^* \simeq kG$ ist der duale Modul eines unzerlegbaren projektiven Moduls P^* wieder (unzerlegbar) projektiv: es ist der unzerlegbare projektive Modul mit Kopf $(P/JP)^*$. Durch Dualisieren ergeben sich deshalb aus den Resultaten dieses Abschnittes auf offensichtliche Weise neue Resultate. Wir verzichten hier darauf, diese explizit aufzuführen.

3. Cohomologische Charakterisierung von p-auflösbaren Gruppen

Es geht in diesem Abschnitt um eine cohomologische Charakterisierung der auflösbaren Gruppen.

Definition. Die Gruppe G heisst *p-auflösbar*, wenn die Hauptfaktoren entweder p'- oder p-Gruppen sind.

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, bezeichnen in diesem Abschnitt A, B, M immer $\mathbb{F}_pG$-Moduln. Mit C_GM bezeichnen wir den *Zentralisator* von M in G, also den Normalteiler $\{x \in G \mid xm = m \text{ für alle } m \in M\}$. Wir werden dabei den Index G jeweils unterdrücken, wenn er aus dem Kontext klar ist. Ein Modul M mit $CM = G$ heisst *trivial*; ein Modul M mit $CM = e$ heisst *treu*.

Wir beginnen mit einer Reihe von einfachen Hilfssätzen.

Lemma 3.1. *Es sei P eine p-Gruppe, und M ein einfacher kP-Modul. Dann gilt $M = k$.*

Wir verzichten hier auf den Beweis dieses wohlbekannten Resultates, siehe [Se], p. 65.

Lemma 3.2. *Es sei M ein einfacher treuer kG-Modul. Dann folgt $O_pG = e$.*

Beweis. Setze $N = O_pG$. Nach dem Satz von Clifford (siehe Satz 1.3) ist $M\downarrow_N$ eine direkte Summe von einfachen kN-Moduln. Da N eine p-Gruppe ist, ist k der einzige einfache kN-Modul. Daraus folgt, dass N trivial in M operiert. Da M aber als treu vorausgesetzt wurde, folgt daraus $O_pG = N = e$.

Lemma 3.3. *Es sei $G \neq e$ p-auflösbar, und es sei M ein einfacher treuer kG-Modul. Dann gilt $H^i(G, M) = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots$.*

Beweis. Nach Lemma 3.2 besitzt G keinen nichttrivialen p-Normalteiler. Da G p-auflösbar ist, ist somit $N = O_{p'}G$ nichttrivial. Wir betrachten die zur Erweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N$ gehörige Hochschild-Serre-Spektralsequenz

$$H^r(G/N, H^s(N, M)) \Rightarrow H^n(G, M) \ .$$

Da N eine p'-Gruppe ist, folgt $H^s(N, M) = 0$ für $s \geq 1$. Es ergibt sich also der Isomorphismus

$$H^n(G, M) = H^n(G/N, H^0(N, M)) = H^n(G/N, M^N)$$

Da aber M einfach und treu ist, folgt $M^N = 0$, also $H^n(G, M) = 0$.

Anzumerken bleibt hier folgendes. Die Aussage von Lemmas 3.3 für die Dimensionen 1 und 2 geht auf Baer [Ba], Gaschütz und Lubeseder zurück (siehe [GaL]. Für diesen Fall lässt sich der Beweis auch rein gruppentheoretisch führen. Das Verschwinden der zweiten Cohomologiegruppe bedeutet, dass jede Erweiterung zerfällt (siehe Abschnitt 1, Aussage (3)). Das zusätzliche Verschwinden der ersten Cohomologiegruppe besagt, dass alle Komplemente der zerfallenden Erweiterung konjugiert sind.

Theorem 3.4. [Sta1] *Äquivalent sind:*

(i) *G ist p-auflösbar;*

(ii) *$H^1(G/CM, M) = 0$ für alle einfachen kG-Moduln M;*

(iii) *$H^n(G/CM, M) = 0$ für alle einfachen kG-Moduln M und alle $n \geq 1$.*

Beweis. Für die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) und (i) $\Rightarrow$ (iii) verweisen wir auf Lemma 3.3. Es ist damit lediglich die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu beweisen.

Es ist offensichtlich, dass es genügt, den Beweis für den Körper $\mathbb{F}_p$ zu führen. Ist nämlich M ein einfacher $\mathbb{F}_pG$-Modul, so ist $k \otimes_{\mathbb{F}_p} M$ eine direkte Summe von einfachen kG-Moduln $M_1, M_2, \ldots, M_l$, deren Zentralisatoren CM_i alle gleich CM sind. Die Bedingung $H^n(G/CM, M) = 0$ ist also gleichbedeutend mit $H^n(G/CM_i, M_i) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, l$. Für den Rest des Beweises genügt es also, k als $\mathbb{F}_p$ aufzufassen.

Dazu bemerken wir zuerst, dass sich die Eigenschaft (ii) auf Quotientengruppen vererbt. Wir betrachten demzufolge einen kleinsten Verbrecher, also eine Gruppe G, welche die Eigenschaft (ii) besitzt, aber *nicht* p-auflösbar ist.

Wir nehmen zuerst an, dass G einfach ist. Dann muss G nichtabelsch sein und zwar von einer Ordnung, die durch p geteilt wird; andernfalls wäre G p-auflösbar. Laut Voraussetzung verschwindet die 1-Cohomologie für alle einfachen nichttrivialen Moduln; da G einfach ist und damit perfekt, verschwindet die 1-Cohomologie auch für den trivialen Modul k. Daraus folgt dass die 1-Cohomologie *jedes* kG-Moduls trivial ist. Dies steht aber im Widerspruch zur Tatsache, dass der vom trivialen Modul über der p-Sylow-Untergruppe induzierten Modul nichttriviale 1-Cohomologie besitzt.

Es sei nun $e \neq N \subset G$ ein minimaler Normalteiler von G. Dann kann N nicht p-auflösbar sein, denn andernfalls wäre G/N ein echter *nicht* p-auflösbarer Quotient von G, der die Voraussetzung des Theorems erfüllt. Dies widerspricht der Minimalität von G.

Damit ist N nicht p-auflösbar. Da N von kleinerer Ordnung ist als G, existiert ein einfacher kN-Modul B mit $H^1(N/CB, B) \neq 0$. Insbesondere ist $B \neq k$. Aus der 5-Term-Sequenz zu $CB \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N/CB$ folgt $H^1(N/CB, B) \subseteq H^1(N, B)$. Damit ist $H^1(N, B) \neq 0$.

Wir betrachten nun $A = \mathrm{Hom}_{kN}(kG, B)$. Es gilt

$$H^1(G, A) = H^1(G, \mathrm{Hom}_{kN}(kG, B)) = H^1(N, B) \neq 0 \ .$$

Es gibt somit einen kG-Kompositionsfaktor A' von A mit $H^1(G, A') \neq 0$. Da G die Voraussetzungen des Theorems erfüllt, folgt $D = CA' \neq e$. Als kN-Modul ist A und damit auch A' halbeinfach und die direkten Summanden B_j sind zu B konjugierte kN-Moduln. Der Zentralisator in N von B_j ist G-konjugiert zu CB, also von N verschieden. Als Durchschnitt von Konjugierten von CB ist damit auch der Zentralisator $C_N(A') = D \cap N$ in N von N verschieden. Nun war aber N ein minimaler Normalteiler von G; also folgt $C_N(A') = e$. Es enthält also G/D eine Kopie von N, so dass G/D nicht p-auflösbar ist. Es erfüllt aber andererseits die Voraussetzungen des Theorems und ist von kleinerer Ordnung als G. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von G. Damit ist Theorem 3.4 bewiesen.

4. Die Kompositionsfaktoren von JP/J^2P

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Struktur von JP/J^2P und zwar vor allem im Falle, wo P der projektiv unzerlegbare Modul mit trivialem Kopf ist. Wir beschränken uns zuerst auf den Grundkörper $\mathbb{F}_p$ und erhalten das Resultat für einen beliebigen Grundkörper anschliessend als Korollar. Analoge Resultate wie für JP/J^2P lassen sich durch Dualisieren auch für $\mathrm{soc}_2 P$ erhalten; wir verzichten hier darauf, diese explizit zu formulieren.

Definition. Der $\mathbb{F}_pG$-Modul A heisst ein *split p-Hauptfaktor* von G, wenn Normalteiler N_1, N_2 von G existieren, mit $N_1/N_2 \simeq A$ als $\mathbb{F}_pG$-Modul und so, dass die Erweiterung

$$N_1/N_2 \rightarrowtail G/N_2 \twoheadrightarrow G/N_1$$

zerfällt.

Satz 4.1. *Es sei G eine Gruppe und A ein einfacher $\mathbb{F}_pG$-Modul mit Zentralisator CA und Endomorphismenring $D = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_pG}(A)$, der in einer Hauptreihe von G $s = s(G, A)$-mal als split p-Hauptfaktor vorkommt. Dann gilt*

$$\dim_D H^1(G, A) = \dim_D H^1(G/CA, A) + s\ .$$

Beweis. Ist A treu, $CA = e$, so ist nichts zu beweisen, denn A kann in diesem Fall nicht als Hauptfaktor von G vorkommen. Es sei also A nicht treu, $CA \neq e$. Wir führen in diesem Fall den Beweis mit Induktion nach der Gruppenordnung. Es sei N ein minimaler Normalteiler von G, der in CA enthalten ist. Wir betrachten die Erweiterung $N \rightarrowtail G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G/N$ und die zugehörige 5-Term-Sequenz

$$0 \to H^1(G/N, A) \overset{\pi^*}{\to} H^1(G, A) \to \mathrm{Hom}_G(N, A) \overset{\Delta}{\to} H^2(G/N, A)\ .$$

Wie aus der zu $CA \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/CA$ gehörigen 5-Term-Sequenz folgt, hat man ferner injektive Abbildungen $\alpha : H^1(G/CA, A) \to H^1(G, A)$ und $\beta : H^1(G/CA, A) \to H^1(G/N, A)$. Nach Induktion gilt $s(G/N, A) = \dim_D(\mathrm{coker}\ \beta)$.

(a) Es sei $N \not\simeq A$, also $\mathrm{Hom}_G(N, A) = 0$. Dann folgt $s(G/N, A) = s(G, A)$. Ferner ist π^* ein Isomorphismus und damit $\mathrm{coker}\ \alpha = \mathrm{coker}\ \beta$. Damit gilt $s(G, A) = \dim_D(\mathrm{coker}\ \alpha)$.

(b) Es sei $N \simeq A$ und die Erweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N$ zerfalle nicht. Dann folgt natürlich $s(G, A) = s(G/N, A)$. Andererseits ist $\Delta(1_A) \neq 0$, so dass die Abbildung $\Delta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_pG}(A, A) \to H^2(G/N, A)$ injektiv und damit π^* ein Isomorphismus ist. Wie in (a) folgt dann $\mathrm{coker}\ \alpha = \mathrm{coker}\ \beta$ und $s(G, A) = \dim_D(\mathrm{coker}\ \alpha)$.

(c) Es sei $N \simeq A$ und die Erweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N$ zerfalle. In diesem Fall folgt $s(G,A) = s(G/N,A) + 1$. Andererseits ist $\Delta(1_A) = 0$, so dass die Abbildung $\Delta : \mathrm{Hom}_k G(A,A) \to H^2(G/N,A)$ trivial ist. Es folgt $\dim_D(\mathrm{coker}\ \alpha) = \dim_D(\mathrm{coker}\ \beta)+1$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wir bemerken, dass der Satz 4.1 beinhaltet, dass die Zahl $s = s(G,A)$ von der gewählten Hauptreihe von G unabhängig ist. Das Resultat von Satz 4.1 lässt sich wegen Satz 1.5 ohne Schwierigkeiten auf die Situation eines beliebigen Grundkörpers k ausdehnen. Die Definition eines split-p-Hauptfaktors ist für diese Zwecke in offensichtlicher Weise zu verallgemeinern: Ist A ein split-p-Hauptfaktor von G, so sind die einfachen Summanden von $k \otimes_{\mathbb{F}_p} A$ die zugehörigen *split-k-Hauptfaktoren* von G. Es ergibt sich dann aus Satz 4.1 bzw. aus dessen Verallgemeinerung auf beliebige Körper, die folgende Charakterisierung p-auflösbarer Gruppen.

Korollar 4.2. *Genau dann ist die Gruppe G p-auflösbar, wenn für jeden einfachen kG-Modul A die Dimension von $H^1(G,A)$ über $D = \mathrm{End}_{kG}(A)$ gerade gleich der Vielfachheit ist, mit der A in einer Hauptreihe als split k-Hauptfaktor auftritt.*

Beweis. Gemäss Abschnitt 3 ist G genau dann p-auflösbar, wenn $H^1(G/CA,A) = 0$ gilt für jeden einfachen kG-Modul A. Die Behauptung ergibt sich dann sofort aus Satz 4.1.

Bemerkung. Die Richtung von links nach rechts ist ein frühes, berühmtes Resultat von Gaschütz. Die andere Richtung ist in dieser Form bei Willems [W2] zu finden.

Es sei P der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf k. Dann kann $\dim_D H^1(G,A)$ als Vielfachheit von A in JP/J^2P interpretiert werden (siehe Satz 2.4). Der Satz 4.1 besagt, dass diese Vielfachheit mindestens so gross ist wie die Vielfachheit, mit der A in einer Hauptreihe von G als split k-Hauptfaktor auftritt. Ferner ist nach Korollar 4.2 die Gruppe G genau dann p-auflösbar, wenn die beiden Vielfachheiten für alle einfachen kG-Moduln übereinstimmen.

Wir fügen hier noch folgendes an, wobei wir uns der Einfachheit halber wieder auf den Fall des Grundkörpers $\mathbb{F}_p$ beschränken. Die zur Erweiterung $CA \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/CA$ gehörige 5-Term-Sequenz liefert

$$0 \to H^1(G/CA,A) \to H^1(G,A) \to \mathrm{Hom}_G(CA,A) \xrightarrow{\Delta} H^2(G/CA,A) \to H^2(G,A)\ .$$

Wir lesen aus der Exaktheit eine weitere Interpretation von $s = s(G,A)$ ab:

Satz 4.3.

$$s = s(G,A) = \dim_D\{\ker \Delta : \mathrm{Hom}_G(CA,A) \to H^2(G/CA,A)\}\ .$$

Es sei $\beta : CA \to A$ ein nichttriviales Element dieses Kernes. Setzen wir $N = \ker \beta$, so gilt $CA/N \simeq A$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1(G/CA, A) & \to & H^1(G/N, A) & \to & \mathrm{Hom}_G(A, A) & \stackrel{\Delta'}{\to} & H^2(G/CA, A) \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow \beta^* & & \| \\
0 & \to & H^1(G/CA, A) & \to & H^1(G, A) & \to & \mathrm{Hom}_G(CA, A) & \stackrel{\Delta}{\to} & H^2(G/CA, A)
\end{array}$$

liefert $\Delta'(1_A) = 0$, so dass die Erweiterung $CA/N \to G/N \to G/CA$ zerfällt. Damit ist CA/N einer der split-p-Hauptfaktoren von G isomorph zu A. Es ergibt sich aus dieser Überlegung, dass die split-p-Hauptfaktoren von G isomorph zu A alle unmittelbar "unter" CA vorkommen.

Das Korollar 4.2 beschreibt für p-auflösbare Gruppen G diejenigen einfachen kG-Moduln A mit nichttrivialer Einscohomologie, ja es beschreibt sogar die Dimension von $H^1(G, A)$. Wir wenden uns zum Schluss dieses Abschnittes noch der Verallgemeinerung zu, indem wir versuchen, zu einem einfachen kG-Modul A diejenige einfachen kG-Moduln B zu beschreiben mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) \neq 0$. Die Resultate sind nicht vollständig, insbesondere ist die Dimension von $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B)$ nicht in jedem Fall ohne weiteres bestimmbar.

Satz 4.4. *Es sei G p-auflösbar, und es seien A und B zwei einfache kG-Moduln mit $CA \neq CB$. Dann gilt für $K = CA \cap CB$*

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) = \mathrm{Hom}_{kG}(H_1(K, k) \otimes A, B) \ .$$

Wir erinnern daran, dass die erste Homologiegruppe von K mit Koeffizienten in k durch

$$H_1(K, k) = k \otimes (K/K' \cdot K^p)$$

gegeben ist. Insbesondere ist $K/K' \cdot K^p$ ein elementar abelscher p-Faktor der Gruppe G.

Beweis. Nach Voraussetzung ist K echt in CA oder CB enthalten. Es sei $CA \supset K$. Setze $Q = G/K$ und $N = CA/K \lhd G/K$. Da B einfach ist, folgt nach Lemma 3.2 $O_p N = e$, also $L = O_{p'} N \neq e$. Mit Hilfe der Lyndon-Hochschild-Spektralreihe der Erweiterung $L \rightarrowtail Q \twoheadrightarrow Q/L$ erhält man dann

$$H^i(Q, A^* \otimes B) = H^i(Q/L, (A^* \otimes B)^L) = H^i(Q/L, A^* \otimes B^L) = 0 \ ,$$

letzteres wegen $B^L = 0$.

Die 5-Term Sequenz der Erweiterung $K \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ lautet dann

$$0 \to H^1(Q, A^* \otimes B) = H^1(G, A^* \otimes B) \to \mathrm{Hom}_{kG}(K, A^* \otimes B) \to H^2(Q, A^* \otimes B) \ ,$$

so dass aus dem obigen Resultat folgt

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) = H^1(G, A^* \otimes B) = \mathrm{Hom}_G(K, A^* \otimes B) \ .$$

Ein noch etwas besseres Resultat, wenigstens für den Hauptblock, lässt sich erhalten, wenn man den Spezialfall einer Gruppe von p-Länge 1 betrachtet. Eine Gruppe G heisst bekanntlich von p-Länge 1, wenn sie die Eigenschaft $G = O_{p'pp'}G$ besitzt (siehe [H], p. 688 ff).[1]

Satz 4.5. *Es sei G von p-Länge 1 und es seien A und B einfache kG-Moduln im Hauptblock von kG. Dann gilt*

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) = \mathrm{Hom}_{kG}(H_1(C,k) \otimes A, B)$$

mit $C = O_{p'p}G$.

Beweis. Wir betrachten die Gruppenerweiterung $C \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/C$. Da G/C eine p'-Gruppe ist, liefert die zur Erweiterung gehörige 5-Term-Sequenz sofort

$$H^1(G, A^* \otimes B) = \mathrm{Hom}_G(C, A^* \otimes B) \ .$$

Daraus folgt die Behauptung.

Falls A (und B) nicht im Hauptblock liegen, so ist meines Wissens bereits im Falle von Gruppen der p-Länge 1 kein vollständiges Resultat bekannt. Für p-nilpotente Gruppe vergleiche man Korollar 5.4. Die Schwierigkeiten treten bei den Moduln mit $CA = CB$ auf. Teilresultate finden sich in [Sta4]. Die Fong-Reduktionen (siehe [F], p. 411 ff) erlauben im p-auflösbaren Fall prinzipiell ein rekursives Verfahren zur Berechnung der Ext-Gruppen, es lässt sich aber im konkreten Fall kaum einsetzen. Für weitere Details verweisen wir auf Abschnitt 10.

[1] Wir werden in Korollar 5.7 beweisen, dass einfache Moduln im Hauptblock von kG von $O_{p'p}G$ zentralisiert werden.

5. Die Zentralisatoren der Kompositionsfaktoren von P/J^2P

Wir formulieren die Resultate in diesem Abschnitt für P/J^2P. Analoge Resultate lassen sich für $\mathrm{soc}_2 P$ durch Dualisieren erhalten. Wir verzichten darauf, diese explizit aufzuführen.

Wir beginnen mit einer einfachen Aussage über die Blöcke einer Gruppe G mit p'-Normalteiler N.

Satz 5.1. *Es sei G eine Gruppe mit p'-Normalteiler N. Es seien A und B zwei einfache kG-Moduln im gleichen Block. Dann sind die Mengen der Isomorphietypen von einfachen kN-Summanden von $A{\downarrow_N}$ und $B{\downarrow_N}$ identisch.*

Beweis. Die Moduln A und B sind im Graph Γ durch einen Kantenweg verbunden, wo jede Kante einer nichtverschwindenden Ext-Gruppe entspricht. Wir dürfen also $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) \neq 0$ annehmen. Da N eine p'-Normalteiler ist, haben wir den Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) = H^1(G, \mathrm{Hom}(A,B)) = H^1(G/N, \mathrm{Hom}_{kN}(A,B)) \ .$$

Es gilt also $\mathrm{Hom}_{kN}(A,B) \neq 0$. Die halbeinfachen Moduln $A{\downarrow_N}$ und $B{\downarrow_N}$ enthalten folglich mindestens einen isomorphen einfachen kN-Summanden A_0. Aus Satz 1.3 folgt schliesslich, dass sowohl $A{\downarrow_N}$ wie $B{\downarrow_N}$ aus einer direkten Summe der zu A_0 konjugierten Moduln (mit bestimmten Vielfachheiten) besteht. Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar 5.2. *Es liege der einfache kG-Modul A im Hauptblock von kG. Dann folgt $O_{p'}G \subseteq C_G(A)$.*

Beweis. Für $N = O_{p'}G$ betrachten wir die Restriktionen $A{\downarrow_N}$ und $k{\downarrow_N}$. Nach Satz 5.1 sind die Isomorphietypen der einfachen Summanden identisch. Damit muss $A{\downarrow_N}$ eine direkte Summe von Kopien von k sein.

Korollar 5.3. *Die Gruppe G, deren Ordung durch p geteilt wird, ist genau dann p-nilpotent ($G = O_{p'p}G$), wenn k der (bis auf Isomorphie) einzige einfache Modul im Hauptblock ist.*

Beweis. Es sei zuerst G p-nilpotent, also $G = O_{p'p}G$. Nach Korollar 5.2 ist dann ein einfacher Modul A im Hauptblock von $G = O_{p'p}G$ ein Modul über $G/O_{p'}G$, also über einer p-Gruppe. Es folgt $A = k$ nach Lemma 3.1.

Ist umgekehrt $G \neq O_{p'p}G$, so enthält $G/O_{p'p}G$ ein (nichttriviales) p'-Element d. Es sei D die von $N = O_{p'p}G$ und d in G erzeugte Untergruppe. Die 5-Term-Sequenz, die zur Erweiterung $N \rightarrowtail D \twoheadrightarrow D/N$ gehört, liefert dann den Isomorphismus

$$H^1(D,B) \cong \mathrm{Hom}_{kN}(N,B) \ .$$

Wählt man also für B einen nichttrivialen einfachen kD-Quotienten von $k \otimes N/N'$, so besitzt B nichttriviale 1-Cohomologie über kD. Schliesslich folgt, dass $C = B\!\uparrow^G$ nichttriviale 1-Cohomlogie über G besitzt. (Mindestens) ein Kompositionsfaktor von C besitzt dann ebenfalls nichttriviale 1-Cohomologie. Andererseits sind die einfachen Summanden des halbeinfachen Moduls $C\!\downarrow_D$ zu B konjugiert und deshalb nichttrivial.

Das Korollar 5.3, dessen Aussage auf Brauer zurückgeht, lässt sich auf nichttriviale Moduln ausdehnen (siehe [Mi1], p. 545).

Korollar 5.4. *Äquivalent sind:*

(i) *G ist p-nilpotent;*

(ii) *für einfache kG-Moduln A und B mit $A \neq B$ gilt stets* $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) = 0$*;*

(iii) *jeder Block von kG enthält (bis auf Isomorphie) nur einen einzigen einfachen Modul.*

Beweis. Gemäss Definition eines Blocks sind die Aussagen (ii) und (iii) äquivalent. Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) ist nach obigem klar: Wenn der Hauptblock nur aus k besteht, so ist die Gruppe p-nilpotent. Es bleibt, die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) zu beweisen. Es sei G also p-nilpotent, und es seien A und B einfache kG-Moduln. Es ist zu zeigen, dass aus $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) \neq 0$ stets $A \cong B$ folgt. Wegen $0 \neq \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) = H^1(G, \mathrm{Hom}(A,B))$ und da der Hauptblock einer p-nilpotenten Gruppe nur den einzigen einfachen Modul k enthält, muss k als Kompositionsfaktor von $\mathrm{Hom}(A,B)$ und sogar als Kompositionsfaktor in dessen Sockel vorkommen. Damit folgt $0 \neq (\mathrm{Hom}(A,B))^G = \mathrm{Hom}_{kG}(A,B)$. Dies war zu beweisen.

Im Folgenden verwenden wir einfachen homologische Techniken, um Aussagen über die Zentralisatoren von Moduln zu erhalten. Wir beginnen mit einem Resultat von Pahlings (siehe [P2]).

Satz 5.5. *Es sei P der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Es sei $\mathcal{C}$ die Klasse der Kompositionsfaktoren von P/J^2P. Dann gilt*

$$\bigcap_{B \in \mathcal{C}} CB = O_{p'p}CA \ .$$

Der Beweis beruht auf dem folgenden homologischen Resultat; es verallgemeinert die Frobeniusreziprozität – diese wird üblicherweise mit dem Funktor Hom ($= \mathrm{Ext}^0$) formuliert – auf die Funktoren Ext^n.

Lemma 5.6. *Es sei H eine Untergruppe von G, und es sei A ein kG-Modul und B ein kH-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(A, B\!\uparrow^G) = \mathrm{Ext}^*_{kH}(A\!\downarrow_H, B) \ .$$

Beweis. Es sei $\mathbb{P} \to A \to 0$ eine kG-projektive Resolution von A. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^*_{kG}(A, B\!\uparrow^G) &= H^*(\mathrm{Hom}_{kG}(\mathbb{P}, \mathrm{Hom}_{kH}(kG, B)) \\ &= H^*(\mathrm{Hom}_{kH}(\mathbb{P}\!\downarrow_H, B)) \\ &= \mathrm{Ext}^*_{kH}(A\!\downarrow_H, B)\ .\end{aligned}$$

Letzteres gilt, da $\mathbb{P}\!\downarrow_H \to A\!\downarrow_H \to 0$ eine kH-projektive Resolution von $A\!\downarrow_H$ ist. Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Beweis des Satzes. Setze $H = O_{p'p}(CA)$. Wir zeigen $H \subseteq CB$ für alle $B \in \mathcal{C}$. Dies ist klar für A selbst. Wir betrachten die zur Erweiterung $H \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/H$ gehörige 5-Term-Sequenz

$$0 \to H^1(G/H, (A^* \otimes B)^H) \to H^1(G, A^* \otimes B) \to (H^1(H, A^* \otimes B))^G\ .$$

Ist B ein Kompositionsfaktor von JP/J^2P, so folgt $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) = H^1(G, A^* \otimes B) \neq 0$. Somit ist mindestens eine der anderen Gruppen ebenfalls nichttrivial.

(a) Es gelte $H^1(G/H, (A^* \otimes B)^H) \neq 0$. Dann folgt $\mathrm{Hom}_{kH}(A, B) \neq 0$. Wegen $A\!\downarrow_H = \bigoplus k$ folgt $B^H \neq 0$. Da B einfach ist, impliziert dies $B^H = B$, d.h. $H \subseteq CB$.

(b) Es gelte $H^1(H, A^* \otimes B) \neq 0$. Wegen $A\!\downarrow_H = \bigoplus k$ gilt $H^1(H, A^* \otimes B) = \bigoplus H^1(H, B\!\downarrow_H)$. Aber $B\!\downarrow_H$ ist eine direkte Summe von einfachen kH-Moduln B_i, die alle zueinander konjugiert sind. Es folgt, dass alle B_i triviale kH-Moduln sind oder keines davon. Da H p-nilpotent ist, muss aber mindestens eines der B_i trivial sein. Damit sind alle trivial, und es gilt auch in diesem Fall $H \subseteq CB$.

Es bleibt zu zeigen, dass $K = \bigcap CB$ p-nilpotent ist. Wir nehmen an, K sei nicht p-nilpotent. Dann gibt es einen einfachen nichttrivialen kK-Modul $\bar{B}$ mit $H^1(K, \bar{B}) \neq 0$. Mit $K \subseteq CA$ folgt dann

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, \bar{B}\!\uparrow^G) = \mathrm{Ext}^1_{kK}(A\!\downarrow_K, \bar{B}) = \bigoplus \mathrm{Ext}^1_{kK}(k, \bar{B}) = \bigoplus H^1(K, \bar{B}) \neq 0\ .$$

Daraus lässt sich schliessen, dass es in $\bar{B}\!\uparrow^G$ einen Kompositionsfaktor M gibt mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, M) \neq 0$. Nun ist $M\!\uparrow^G\!\downarrow_K$ eine direkte Summe von zu $\bar{B}$ konjugierten Moduln. Die Gruppe K operiert also nichttrivial in M. Daraus folgt, dass $CM \cap K$ eine *echte* Untergruppe von K ist. Dies ist ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass K p-nilpotent ist.

Korollar 5.7. *Es seien A und B zwei einfache kG-Moduln im gleichen Block. Dann gilt $O_{p'p}CA = O_{p'p}CB$. Insbesondere gilt $O_{p'p}G \subseteq CA$ für A im Hauptblock von G.*

Beweis. Nach dem obigen Satz gilt für zwei einfache Moduln A und B mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) \neq 0$ sofort $O_{p'p}CA \subseteq CB$. Damit gilt $O_{p'p}CA \subseteq O_{p'p}CB$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich, indem man zu den dualen Moduln A^*und B^* übergeht. Dies beweist die Aussage des Korollars, denn im Graph Γ sind die Moduln A und B durch einen Kantenweg verbunden, wobei eine Kante durch das Nichtverschwinden der entsprechenden Ext-Gruppe gegeben ist.

Korollar 5.7 verallgemeinert ein Resultat von Pahlings [P2]. Zusammen mit der Tatsache, dass die Kompositionsfaktoren eines projektiv unzerlegbaren Moduls P im gleichen Block liegen wie der Kopf P/JP, ergibt sich aus Satz 5.5 und Korollar 5.7 das folgende Resultat von Michler [Mi2] und Willems [W1].

Korollar 5.8. *Es sei P der projektiv unzerlegbare Modul mit Kopf A. Es sei $\mathcal{D}$ die Klasse der Kompositionsfaktoren von P. Dann gilt*

$$\bigcap_{B\in\mathcal{D}} CB = O_{p'p}CA \ .$$

Der folgende Satz betrifft ein dazu verwandtes Resultat.

Satz 5.9.

(a) *Für die Gruppe G bezeichne $\mathcal{D}'$ die Klasse der (nicht notwendigerweise abelschen) p-Hauptfaktoren. Dann gilt*

$$\bigcap_{B\in\mathcal{D}'} CB = O_{p'p}G \ .$$

(b) *Es sei G p auflösbar und $\mathcal{D}''$ bezeichne die Klasse der (notwendigerweise abelschen) split-p-Hauptfaktoren. Dann gilt*

$$\bigcap_{B\in\mathcal{D}''} CB = O_{p'p}G \ .$$

Beweis. (a) Die abelschen p-Hauptfaktoren von G liegen im Hauptblock; sie werden also durch $O_{p'p}G$ zentralisiert. Man betrachte eine durch $O_{p'p}G$ gehende Hauptreihe, und es sei $N_1 \supset N_2$ ein nichtabelscher p-Hauptfaktor. Dann gilt $[N_1, O_{p'p}G] \subset O_{p'p}G \subset N_2$. Damit zentralisiert $O_{p'p}G$ alle p-Hauptfaktoren. Es sei umgekehrt T der Zentralisator der p-Hauptfaktoren. Dann zentralisiert T a fortiori alle p-Hauptfaktoren von G, die unterhalb von T liegen. Damit zentralisiert T auch alle p-Hauptfaktoren von T. Insbesondere kann T keine nichtabelschen p-Hauptfaktoren enthalten, und es folgt ausserdem, dass T p-nilpotent ist.

(b) Hier bemerken wir, dass für p-auflösbare Gruppen die split p-Hauptfaktoren nach Korollar 4.2 mit den direkten Summanden von JP/J^2P des projektiven unzerlegbaren Moduls mit Kopf k übereinstimmen. Die Behauptung ergibt sich dann aus Satz 5.5.

Schliesslich fügen wir hier noch zwei weitere Resultate an, die sich aus den bisherigen ohne weiteres ergeben.

Korollar 5.10. *Es sei G p-auf lösbar. Es sei A ein treuer einfacher Modul. Dann ist jeder einfache Modul im Block von A ebenfalls treu.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 5.7, da für eine nichttriviale p-auflösbare Gruppe der Normalteiler $O_{p'p}G$ stets nichttrivial ist.

Es sei G eine Gruppe der p-Länge 1, d.h. es gelte $G = O_{p'pp'}G$. Wir charakterisieren diese Gruppen unter den p-auflösbaren durch eine Eigenschaft der split-Hauptfaktoren, bzw. durch eine darstellungstheoretische Eigenschaft. Das Resultat geht zurück auf Isaacs-Smith [IS] und Pahlings [P1].

Satz 5.11. *Es sei G p-auflösbar, und P sei eine p-Sylow-Untergruppe von G. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *G ist von p-Länge 1;*

(ii) *ist M ein einfacher Modul im Hauptblock von kG, dann ist die Einschränkung von M auf den Normalisator NP von P ebenfalls einfach;*

(iii) *ist M ein split Hauptfaktor von G, so ist die Einschränkung von M auf den Normalisator NP von P einfach.*

Beweis. Ist G von p-Länge 1 und ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so gilt $G = NP \cdot O_{p'}G$. Wen nun M ein einfacher Modul im Hauptblock von G ist, so wird er von $O_{p'}$ zentralisiert; damit ist M ein (einfacher) NP-Modul. Dies beweist die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii).

Die p-Hauptfaktoren von G liegen im Hauptblock von $\mathbb{F}_pG$. Dies beweist die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Nach Satz 5.9 ist die direkte Summe D der split p-Hauptfaktoren von G ein treuer Modul über $G/O_{p'p}G$. Ist nun D auch halbeinfach über NP, so ergibt sich daraus, dass P in D trivial operiert. Also gilt $P \subseteq O_{p'p}G$, so dass G von p-Länge 1 ist. Dies beweist die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i).

6. Cohomologische Charakterisierungen von Formationen

In diesem Abschnitt werden wir lokale Fomationen von Gruppen cohomologisch charakterisieren. Ist G eine Gruppe in einer gegebenen lokalen Formation, so beinhalten die hier behandelten Resultate Aussagen über die Cohomologie von G.

Definition. Die Gruppe G heisst *p-überauf lösbar*, wenn ihre Hauptfaktoren entweder p'- oder p-Gruppen und die p-Hauptfaktoren zyklisch sind.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir die wohlbekannte Tatsache, dass sich die p-Nilpotenz einer Gruppe in analoger Weise durch eine Eigenschaft der Hauptfaktoren charakterisieren lässt (siehe [H], p. 428):

Die Gruppe G heisst *p-nilpotent*, wenn die Hauptfaktoren entweder p'- oder p-Gruppen und die p-Hauptfaktoren zyklisch mit trivialer G-Operation sind.

Satz 6.1. [Sta1] *Äquivalent sind*

(i) *G ist p-überauf lösbar;*

(ii) $H^1(G, M) = 0$ *für alle einfachen* $\mathbb{F}_pG$*-Moduln* M *mit* $\dim_{\mathbb{F}_p} M \geq 2$*;*

(iii) $H^n(G, M) = 0$ *für alle einfachen* $\mathbb{F}_pG$*-Moduln* M *mit* $\dim_{\mathbb{F}_p} M \geq 2$ *und alle* n*.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die Implikation (i) $\Rightarrow$ (iii). Es sei G p-überauflösbar und M ein einfacher $\mathbb{F}_pG$-Modul mit $\dim_{\mathbb{F}_p} M \geq 2$. Nach Theorem 3.4 gilt $H^n(G/CM, M) = 0$ für alle n. Mit Induktion nach der Länge l einer G-Hauptreihe von CM beweisen wir $H^n(G, M) = 0$. Für $l = 0$ gilt $G/CM = G$, und es ist nichts zu beweisen. Es sei $N \subseteq CM$ ein minimaler Normalteiler in G. Ist N von p'-Ordnung, so gilt natürlich $H^n(G, M) = H^n(G/N, M) = 0$. Ist N eine p-Gruppe, so ist N zyklisch der Ordnung p. Dann ist aber $H^s(N, \mathbb{F}_p) = \overline{\mathbb{F}}_p$, wobei der Querstrich andeutet, dass die G-Operation möglicherweise nicht trivial ist. Damit folgt

$$H^s(N, M) = \mathrm{Hom}(H_s(N, \mathbb{F}_p), M) = \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_p, M) = \overline{M} \ ,$$

wobei $\overline{M}$ ein einfacher $\mathbb{F}_pG$-Modul derselben Dimension wie M ist. In der Spektralreihe

$$H^r(G/N, H^s(N, M)) \Rightarrow H^n(G, M)$$

ist dann nach Induktion die linke Seite immer trivial, also auch die rechte Seite. Dies war zu beweisen.

Wir bemerken hier, dass der Beweis (i) $\Rightarrow$ (iii) auch aus der Tatsache folgt (siehe [FG]), dass für p-auflösbare Gruppen jeder einfache Modul im Hauptblock ein Kompositionsfaktor eines Tensorproduktes von p-Hauptfaktoren von G ist. Da die p-Hauptfaktoren einer

p-überauflösbaren Gruppe alle eindimensional sind, folgt daraus, dass auch alle einfachen Moduln im Hauptblock eindimensional sind: Die Cohomologie einer p-überauflösbaren Gruppe kann also nur für *eindimensionale* einfache Moduln nichttrivial sein.

Es bleibt, die Implikation (ii)$\Rightarrow$ (i) zu beweisen. Es sei also M ein einfacher Modul mit $\dim_{\mathbb{F}_p} M \geq 2$, dann ist nach Voraussetzung $H^1(G, M) = 0$, also auch $H^1(G/CM, M) = 0$. Ist $\dim_{\mathbb{F}_p} M = 1$, so ist G/CM eine endliche Automorphismengruppe von $\mathbb{F}_p$, also von p'-Ordnung. Dann ist trivialerweise $H^1(G/CM, M) = 0$. Nach Theorem 3.4 folgt, dass G p-auflösbar ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die p-Hauptfaktoren von G zyklisch sind. Die Eigenschaft (ii) vererbt sich auf Quotienten. Wir führen deshalb den Beweis mit Induktion nach der Gruppenordnung. Es sei N ein minimaler Normalteiler von G. Nach Induktion ist G/N p-überauflösbar. Ist N eine p'-Gruppe, so ist mit G/N auch G p-überauflösbar. Ist N eine p-Gruppe, also ein einfacher G-Modul, so haben wir die 5-Term-Sequenz

$$0 \to H^1(G/N, N) \to H^1(G, N) \to \mathrm{Hom}_G(N, N) \to H^2(G/N, N) \to H^2(G, N) \ .$$

Nach Induktion ist G/N p-überauflösbar. Für $\dim_{\mathbb{F}_p} N \geq 2$ folgt also gemäss der bereits bewiesenen Implikation (i) $\Rightarrow$ (iii), dass die Gruppen $H^1(G/N, N)$ und $H^2(G/N, N)$ trivial sind. Damit haben wir $H^1(G, N) = \mathrm{Hom}_G(N, N) \neq 0$ im Widerspruch zur Eigenschaft (ii). Damit muss N zyklisch von p-Ordnung sein, und mit G/N ist auch G p-überauflösbar.

Aus diesem Satz lassen sich – wie im Falle p-nilpotenter Gruppen (siehe Korollar 5.4) – sofort Folgerungen über die Blöcke von p-überauflösbaren Gruppen ziehen.

Korollar 6.2. *Der Hauptblock einer p-überauflösbaren Gruppe G enthält nur eindimensionale einfache Moduln.*

Beweis. Es sei M ein einfacher Modul im Hauptblock von $\mathbb{F}_pG$. Dann sind M und $\mathbb{F}_p$ im Graph Γ durch einen Kantenweg verbunden. Nach Induktion, dürfen wir also annehmen, dass ein eindimensionaler Modul $\overline{\mathbb{F}}_p$ existiert mit $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{F}_pG}(\overline{\mathbb{F}}_p, M) \neq 0$ bzw. $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{F}_pG}(M, \overline{\mathbb{F}}_p) \neq 0$. Wir betrachten nur den ersten Fall; der Beweis des anderen Falles verläuft analog. Es ergibt sich

$$0 \neq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{F}_pG}(\overline{\mathbb{F}}_p, M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{F}_pG}(\mathbb{F}_p, \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_p, M)) = H^1(G, \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_p, M)) \ ,$$

wo $\overline{M} = \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_p, M)$ wiederum einfach ist. Aus Satz 6.1 folgt dann, dass $\overline{M}$ und damit M eindimensional sind.

Korollar 6.3. *Äquivalent sind:*

(i) *G ist p-überauflösbar;*

(ii) *sind A und B einfache $\mathbb{F}_pG$-Moduln mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) \neq 0$ so folgt stets $B = \overline{\mathbb{F}}_p \otimes A$ für einen eindimensionalen, möglicherweisen nichttrivialen $\mathbb{F}_pG$-Modul $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

(iii) *sind A und B einfache $\mathbb{F}_pG$-Moduln im selben Block von $\mathbb{F}_pG$, so gibt es einen eindimensionalen, möglicherweisen nichttrivialen $\mathbb{F}_pG$-Modul $\overline{\mathbb{F}}_p$ mit $B = \overline{\mathbb{F}}_p \otimes A$.*

Beweis. Gemäss Definition eines Blocks sind die Aussagen (ii) und (iii) äquivalent. Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) ist nach obigem klar: Wenn der Hauptblock nur eindimensionale einfache $\mathbb{F}_pG$-Moduln enthält, so ist die Gruppe p-überauflösbar. Es bleibt also noch (i) $\Rightarrow$ (ii) zu zeigen. Es sei also G p-überauflösbar, und es seien A und B einfache $\mathbb{F}_pG$-Moduln. Wegen $0 \neq \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) = H^1(G, \mathrm{Hom}(A,B))$ und da der Hauptblock einer p-überauflösbaren Gruppe nur eindimensionale einfache Moduln enthält, muss im Sockel von $\mathrm{Hom}(A,B)$ ein Modul der Form $\overline{\mathbb{F}}_p$ vorkommen. Dann folgt aber

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_pG}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathrm{Hom}(A,B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_pG}(\mathbb{F}_p, \mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{F}}_p \otimes A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_pG}(\overline{\mathbb{F}}_p \otimes A, B)\ .$$

Da sowohl $\overline{\mathbb{F}}_p \otimes A$ wie B einfach sind, sind sie isomorph.

Es ist klar, dass analog zur cohomologischen Charakterisierung der p-überauflösbaren Gruppen des Satzes 6.1 auch eine cohomologische Charakterisierung der p-nilpotenten Gruppen gegeben werden kann. In der Tat lässt sie sich aus den Resultaten im Abschnitt 5 direkt ablesen. Wir schieben die explizite Formulierung hier noch etwas auf und beweisen zuerst eine Verallgemeinerung des Satzes 6.1 auf lokal definierte Formationen $\mathcal{F}$. Wir beginnen mit der Definition und zwei Standardresultaten Lemma 6.4 und 6.5 (siehe [H], p. 696 ff).

Definition. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Gruppen heisst eine *Formation*, wenn stets gilt

(i) mit $G \in \mathcal{C}$ folgt $G/N \in \mathcal{C}$;

(ii) mit $G/N_1, G/N_2 \in \mathcal{C}$ folgt $G/N_1 \cap N_2 \in \mathcal{C}$.

Der allgemeinen Sprachregelung folgend betrachten wir auch die leere Klasse als Formation.

Es sei nun für jede Primzahl p eine Formation $\mathcal{C}(p)$ gegeben. Man definiert die durch $\mathcal{C}(p)$ gegebene *lokale Formation* $\mathcal{F}$ durch die Bedingung

$$G \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{ für jeden } p\text{-Hauptfaktor } A \text{ von } G \text{ gilt } G/C(A) \in \mathcal{C}(p)\ .$$

Wir erwähnen die folgenden expliziten Beispiele:

(a) Es sei $\mathcal{C}(p) = \{e\}$ und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$, wobei $\mathcal{G}$ die Formation aller Gruppen bezeichnet. Dann ist die dadurch lokal definierte Formation $\mathcal{F}$ die Formation der p-nilpotenten Gruppen.

(b) Es sei $\mathcal{C}(p) = \mathcal{A}_{p-1}$ und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$, wobei $\mathcal{A}_{p-1}$ die Formation der endlichen abelschen Gruppen bezeichnet, deren Exponent $p-1$ teilt. Dann ist die dadurch lokal definierte Formation die Formation der p-überauflösbaren Gruppen.

(c) Es sei $\mathcal{C}(p) = \mathcal{Q}$ und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$, wobei $\mathcal{Q}$ die Formation der p'-Gruppen bezeichnet. Dann ist die dadurch lokal definierte Formation $\mathcal{F}$ die Formation der Gruppen von p-Länge 1.

Lemma 6.4. *Die Formation $\mathcal{F}$ sei lokal definiert durch $\mathcal{C}(p)$. Dann sind äquivalent:*

(a) $G \in \mathcal{F}$;

(b) $G/O_{p'p}G \in \mathcal{C}(p)$ *für p mit* $\mathcal{C}(p) \neq \emptyset$ *und* $p \not| \, |G|$ *für p mit* $\mathcal{C}(p) = \emptyset$.

Beweis. Es sei $G \in \mathcal{F}$. Bezeichnet $\mathcal{D}$ die (endliche!) Klasse aller p-Hauptfaktoren von G, so gilt $\bigcap_{M\in\mathcal{D}} CM = O_{p'p}G$ (siehe Satz 5.9). Damit folgt $G/O_{p'p}G \in \mathcal{C}(p)$.

Es sei umgekehrt $G/O_{p'p}G \in \mathcal{C}(p)$. Ist M ein p-Hauptfaktor von G. Dann ist $O_{p'p}G \subseteq CM$, so dass folgt $G/CM \in \mathcal{C}(p)$. Da dies für alle p gilt, folgt $G \in \mathcal{F}$.

Mit $\Phi(G)$ bezeichnen wir im Folgenden wie üblich die Frattini-Untergruppe von G.

Lemma 6.5. *Die Formation $\mathcal{F}$ sei lokal definiert durch $\mathcal{C}(p)$. Dann ist die Formation $\mathcal{F}$ gesättigt, d.h. aus $G/\Phi G \in \mathcal{F}$ folgt stets $G \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Es sei G eine Gruppe mit $G/\Phi G \in \mathcal{F}$, also mit $G/\Phi G/O_{p'p}(G/\Phi G) \in \mathcal{C}(p)$. Aus $O_{p'p}(G/\Phi G) = O_{p'p}G/\Phi G$ folgt dann sofort $G/O_{p'p}G \in \mathcal{C}(p)$, also $G \in \mathcal{F}$.

Wir gehen hier auf die Umkehrung der Aussage in Lemma 6.5 nicht ein, die ebenfalls gültig ist, siehe [Sch1].

Satz 6.6. [BSS] *Die Formation $\mathcal{F}$ sei lokal definiert durch $\mathcal{C}(p) = \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$. Dann sind äquivalent:*

(i) $G \in \mathcal{F}$*;*

(ii) $H^1(G, M) = 0$ *für alle einfachen kG-Moduln M mit $G/CM \notin \mathcal{C}$;*

(iii) $H^n(G, M) = 0$ *für alle einfachen kG-Moduln M mit $G/CM \notin \mathcal{C}$ und alle $n \geq 1$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die Implikation (i) $\Rightarrow$ (iii). Es sei $G \in \mathcal{F}$, und M ein einfacher kG-Modul mit $G/CM \notin \mathcal{C}$. Wegen $G \in \mathcal{F}$ folgt nach dem Lemma 6.4 $G/O_{p'p}G \in \mathcal{C}$. Es ist also $CM \not\supseteq O_{p'p}G$, und damit kann M nicht im Hauptblock liegen (siehe Korollar 5.7). Die Cohomologiegruppen $H^n(G, M)$ müssen also trivial sein.

Für die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) bemerken wir zuerst, dass sich die Voraussetzung (ii) auf Quotienten vererbt. Es sei G die Gruppe kleinster Ordnung, welche die Voraussetzung (ii) erfüllt, aber *nicht* in $\mathcal{F}$ liegt, und es sei N ein minimaler Normalteiler von G. Dann ist $G/N \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ eine Formation ist, ist N der *einzige* minimale Normalteiler von G. Denn wäre $\overline{N}$ ein weiterer minimaler Normalteiler, so wäre $G/N \cap \overline{N} = G \in \mathcal{F}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Ausserdem muss p die Ordnung von N teilen. Andernfalls wäre mit G/N auch G in $\mathcal{F}$.

Es sei zuerst N nichtabelsch. Dann ist $H^1(N,k) = \mathrm{Hom}_G(N/N',k) = 0$. Es gibt also einen einfachen nichttrivialen kN-Modul B mit $H^1(N,B) \neq 0$. Betrachte $A = \mathrm{Hom}_{kN}(kG,B)$. Dann ist $H^1(G,A) = H^1(N,B) \neq 0$, und es existiert somit ein Kompositionsfaktor M von A mit $H^1(G,M) \neq 0$. Über N ist der Modul A und damit auch der Modul M eine direkte Summe von zu B konjugierten Moduln B^x. Daraus folgt $C_N M \subseteq C_N(B^x) \subset N$. Da N ein minimaler Normalteiler von G ist, folgt $C_N M = e$, also $C_G(M) \cap N = e$. Da N der einzige minimale Normalteiler ist, folgt schliesslich $C_G(M) = e$. Wegen $H^1(G,M) \neq 0$ ist aber laut Voraussetzung $G = G/C_G M \in \mathcal{C}$. Dies wiederum würde $G \in \mathcal{F}$ implizieren, im Widerspruch zur Annahme $G \notin \mathcal{F}$.

Es bleibt, den Fall zu betrachten, wo N abelsch ist, also einem einfachen $\mathbb{F}_p G$-Modul entspricht. Wir behaupten $N \not\subseteq \Phi G$. Wäre nämlich $N \subseteq \Phi G$, so wäre $G/\Phi G$ als Quotient von G/N in $\mathcal{F}$. Da aber die lokale Formation $\mathcal{F}$ gesättigt ist, würde sich daraus $G \in \mathcal{F}$ ergeben, im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus $N \not\subseteq \Phi G$ folgt, dass die Erweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N$ zerfällt. Wir betrachten nun $C_G N$. Da N der einzige minimale Normalteiler von G ist, folgt wegen des Zerfallens der Erweiterung $C_G N = N$. Nun liefert die 5-Term-Sequenz zu $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N$

$$0 \to H^1(G/N,N) \to H^1(G,N) \to \mathrm{Hom}_{G/N}(N,N) \xrightarrow{\Delta} H^2(G/N,N)$$

wegen $\Delta(1_N) = 0$ das Resultat $H^1(G,N) \neq 0$. Damit folgt aber auch $H^1(G,V) \neq 0$ für die einfachen direkten Summanden von $k \otimes_{\mathbb{F}_p} N$. Wegen $CV = CN$ ergibt sich dann $G/CV = G/C_G N = G/N \in \mathcal{C}$, und somit $G \in \mathcal{F}$, wiederum im Widerspruch zur Annahme $G \notin \mathcal{F}$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die oben erwähnten Charakterisierungen von p-nilpotenten und p-überauflösbaren Gruppen sind Spezialfälle des Satzes 6.6. Die p-nilpotenten Gruppen bilden die lokale Formation definiert durch $\mathcal{C}(p) = \{e\}$ und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$, und die p-überauflösbaren Gruppen die lokale Formation, wo $\mathcal{C}(p)$ gleich der Klasse der abelschen Gruppen von Exponent $p-1$ ist und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$. Korollar 6.3 über die Charakterisierung von p-überauflösbare Gruppen enthält in der Formulierung den Körper $\mathbb{F}_p$. Im Lichte der Charakterisierung von lokalen Formationen lässt sich leicht folgendes erkennen. Die Aussagen

(ii) $H^1(G,M) = 0$ *für alle einfachen* kG*-Moduln* M *mit* $\dim_k M \geq 2$;

(iii) $H^n(G, M) = 0$ *für alle einfachen* kG*-Moduln* M *mit* $\dim_k M \geq 2$ *und alle* n*.*

sind äquivalent. Sie charakterisieren die Formation $\mathcal{F}$ der k-überauflösbaren Gruppen, also der Gruppen, welche die Eigenschaft besitzen, dass alle p-Hauptfaktoren abelsch sind und – wenn tensoriert mit k – in eine direkte Summe von eindimensionalen kG-Moduln zerfallen. Ist $|k| = p^n$, so ist $\mathcal{F}$ die Formation, die lokal durch die Vorschrift $\mathcal{C}(p) = \mathcal{A}_{p^n-1}$ und $\mathcal{C}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$ definiert ist. Dabei ist $\mathcal{A}_{p^n-1}$ die Formation der endlichen abelschen Gruppen, deren Exponent $p^n - 1$ teilt.

Die Gruppe $\mathbf{A}_4$ ist offensichtlich nicht 2-überauflösbar, sie ist aber k-überauflösbar für $k = \mathbb{F}_4$.

Schliesslich merken wir an, dass sich Korollar 6.3 in evidenter Weise von p-überauflösbaren auf k-überauflösbare Gruppen verallgemeinern lässt.

7. Cohomologische Charakterisierungen via Tate-Cohomologie

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir eine Charakterisierung p-nilpotenter Gruppen von Hoechsmann-Roquette-Zassenhaus [HRZ], welche die Tate-Cohomologie verwendet.

In der Tate-Cohomologie (für endliche Gruppen) wird die gewöhnliche Cohomologie und Homologie einer Gruppe in einer doppelt unendlichen Sequenz zusammengefasst, wobei in der Dimension Null die Definition leicht variiert werden muss. Im Detail ist die Tate-Cohomologie wie folgt definiert. Es sei G eine endliche Gruppe und A ein kG-Modul. Wir betrachten die Normabbildung $N : A \to A$ die durch $N(a) = \left(\sum_{x\in G} x\right) a$, $a \in A$ definiert ist. Diese induziert die Abbildung $\tilde{N} : A_G = H_0(G, A) \to H^0(G, A) = A^G$. Die Tate-Cohomologiegruppen $\hat{H}^n(G, A)$, $-\infty < n < \infty$, sind dann gegeben durch

$$\hat{H}^n(G,A) = \begin{cases} H^n(G,A) & \text{für } \ n > 0 \ , \\ \operatorname{coker} \tilde{N} & \text{für } \ n = 0 \ , \\ \ker \tilde{N} & \text{für } \ n = -1 \ , \\ H_{-n-1}(G,A) & \text{für } \ n < -1 \ . \end{cases}$$

Hoechsmann-Roquette-Zassenhaus haben die folgende Charakterisierung p-nilpotenter Gruppen angegeben (siehe [HRZ]):

Satz 7.1. *Äquivalent sind:*

(i) *G ist p-nilpotent;*

(ii) *Ist A ein kG-Modul mit $\hat{H}^i(G, A) \neq 0$ für gewisses i, so folgt $\hat{H}^1(G, A) \neq 0$;*

(iii) *Ist A ein kG-Modul mit $\hat{H}^i(G, A) \neq 0$ für gewisses i, so folgt $\hat{H}^l(G, A) \neq 0$ für alle l.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft völlig analog zum Beweis des nachfolgenden Satzes, der eine ähnliche Charakterisierung von k-überauflösbaren (bzw. p-überauflösbaren, für $k = \mathbb{F}_p$) angibt.

Satz 7.2. *Äquivalent sind:*

(i) *G ist k-überauflösbar;*

(ii) *Ist A ein kG-Modul mit $\hat{H}^i(G, A) \neq 0$ für gewisses i, so gibt es einen eindimensionalen Modul $\overline{k}$ mit $\hat{H}^1(G, \operatorname{Hom}(\overline{k}, A)) \neq 0$;*

(iii) *Ist A ein kG-Modul mit $\hat{H}^i(G,A) \neq 0$ für gewisses i, so gibt es für alle l einen eindimensionalen Modul $\overline{k}$, abhängig von l, mit $\hat{H}^l(G, \mathrm{Hom}(\overline{k}, A)) \neq 0$.*

Beweis Wir beweisen zuerst die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i). Dazu stützen wir uns auf die Charakterisierung der k-überauflösbaren Gruppen, die am Schluss des Abschnittes 6 gegeben worden ist. Es sei M ein einfacher kG-Modul mit $H^1(G,M) \neq 0$. Dann existiert nach (iii) ein eindimensionaler Modul $\overline{k}$ mit $\hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(\overline{k}, M)) \neq 0$. Daraus folgt $H^0(G, \mathrm{Hom}(\overline{k}, M)) = \mathrm{Hom}_{kG}(\overline{k}, M) \neq 0$. Damit ist $M \simeq \overline{k}$. Nach dem Resultat am Ende des Abschnittes 6 ist G k-überauflösbar.

Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt in einfacher Weise durch "dimension shifting", indem man benützt, dass für einen projektiven (und deshalb auch injektiven) kG-Modul P der Modul $\mathrm{Hom}(\overline{k}, P)$ wiederum projektiv (und injektiv) ist.

Es bleibt, die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) zu beweisen. Es sei also G k-überauflösbar, und es sei $\hat{H}^i(G,A) \neq 0$. Dabei dürfen wir offensichtlich annehmen, dass die Kompositionsfaktoren von A alle im Hauptblock von kG liegen. Da A nicht injektiv ist, gibt es eine nichttriviale Modulerweiterung $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow C$. Also ist $\mathrm{Ext}^1_{kG}(C,A) \neq 0$. Es gibt dann einen Kompositionsfaktoren M von C mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(M,A) \neq 0$. Da die Kompositionsfaktoren von A im Hauptblock liegen, liegt auch M im Hauptblock. Nach der Charakterisierung der k-überauflösbaren Gruppen am Schlusse des Abschnittes 6 ist M eindimensional, $M \simeq \overline{k}$. Wir erhalten

$$0 \neq \mathrm{Ext}^1_{kG}(M,A) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(\overline{k},A) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, \mathrm{Hom}(\overline{k},A)) = \hat{H}^1(G, \mathrm{Hom}(\overline{k},A)) .$$

Dies war zu beweisen.

Es ist klar, dass sich Satz 7.2 auf lokal definierte Formationen ausdehnen lässt. Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Formation, und es sei $\mathcal{F}$ die lokale Formation definiert durch $\mathcal{F}(p) = \mathcal{C}$ und $\mathcal{F}(q) = \mathcal{G}$ für $q \neq p$. Dabei bezeichnet $\mathcal{G}$ die Formation aller Gruppen. Wir rufen in Erinnerung, dass ein kG-Modul B $\mathcal{F}$-zentral genannt wird, wenn gilt $G/C_G B \in \mathcal{C}$.

Satz 7.3. *Äquivalent sind:*

(i) *$G \in \mathcal{F}$;*

(ii) *ist A ein kG-Modul mit $\hat{H}^i(G,A) \neq 0$ für gewisses i, so gibt es einen einfachen $\mathcal{F}$-zentralen Modul B mit $\hat{H}^1(G, \mathrm{Hom}(B,A)) \neq 0$;*

(iii) *ist A ein kG-Modul mit $\hat{H}^i(G,A) \neq 0$ für gewisses i, so gibt es für alle l einen einfachen $\mathcal{F}$-zentralen Modul B, abhängig von l, mit $\hat{H}^l(G, \mathrm{Hom}(B,A)) \neq 0$.*

Beweis Der Beweis folgt Schritt für Schritt dem Beweis des Satzes 7.2. Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (i) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) bieten dabei keinerlei Schwierigkeiten, indem die Rolle der eindimensionalen Moduln im Satz 7.2 hier durch die $\mathcal{F}$-zentralen Moduln übernommen und die Charakterisierung der Formation $\mathcal{F}$ aus Satz 6.6 verwendet wird.

Auch der Beweis der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) verläuft analog. Anzumerken bleibt hier nur die bereits im Beweis des Satzes 6.6 verwendete Tatsache, dass ein einfacher Modul M im Hauptblock automatisch $\mathcal{F}$-zentral ist. Aus $G \in \mathcal{F}$ und $G/C_G M \notin \mathcal{C}$ würde mit Lemma 6.4 nämlich $G/O_{p'p}G \in \mathcal{C}$ folgen. Es wäre also $C_G M \not\supseteq O_{p'p}G$, und dies wäre nach Korollar 5.7 ein Widerspruch zur Tatsache, dass M im Hauptblock liegt.

8. Der Zentralisator von P/J^2P

Wir beweisen hier zuerst ein allgemeines Resultat über den Zentralisator einer Modulererweiterung und wenden dieses anschliessend an, um Aussagen über den Zentralisator von P/J^2P zu erhalten.

Es seien A und B zwei Moduln über kG. Wir betrachten eine Erweiterung $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$. Sie werde beschrieben durch $\xi \in \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B)$. Es seien CA und CB die Zentralisatoren von A bzw. B. Wir stellen die Frage: *Was ist der Zentralisator CE von E?*

Natürlich gilt $CE \subseteq CA \cap CB$. Wir interpretieren $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B)$ als $H^1(G, A^* \otimes B)$. Für einen Normalteiler $N \subseteq CA \cap CB$ betrachten wir den Beginn der 5-Term Sequenz

$$0 \to H^1(G/N, A^* \otimes B) \xrightarrow{\alpha} H^1(G, A^* \otimes B) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_G(N, A^* \otimes B)\ .$$

Satz 8.1. [Sta4] (a) *Für $N = CA \cap CB$ gilt*

$$CE = \ker(\beta(\xi) : N \to A^* \otimes B)\ .$$

(b) *Für $N \subseteq CA \cap CB$ gilt*

$$CE \cap N = \ker(\beta(\xi) : N \to A^* \otimes B)\ .$$

Beweis. Wir beweisen hier nur (a); der Beweis von (b) verläuft analog. Wir betrachten

$$\begin{array}{ccccc} CE & \rightarrowtail & G & \twoheadrightarrow & G/CE \\ \sigma\downarrow & & \| & & \pi\downarrow \\ N & \rightarrowtail & G & \twoheadrightarrow & G/N\ . \end{array}$$

Dieses kommutative Diagramm gibt Anlass zu

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^1(G/N, A^* \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(G, A^* \otimes B) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}_G(N, A^* \otimes B) \\ & & \pi^*\downarrow & & \| & & \sigma^*\downarrow \\ 0 & \to & H^1(G/CE, A^* \otimes B) & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & H^1(G, A^* \otimes B) & \xrightarrow{\overline{\beta}} & \mathrm{Hom}_G(CE, A^* \otimes B)\ . \end{array}$$

Die Erweiterung $\xi : B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ wird über G/CE realisiert, d.h. es existiert

$$\xi' \in H^1(G/CE, A^* \otimes B)$$

mit $\overline{\alpha}(\xi') = \xi$. Damit ist $\overline{\beta}(\xi) = 0 = \sigma^*\beta(\xi) = \sigma^*(\eta)$, $\eta = \beta(\xi)$. Daraus folgt $\eta|_{CE} = 0$, d.h. $CE \subseteq \ker\eta = \ker\beta(\xi) \subseteq N$.

Man setzt nun im obigen Diagramm an Stelle von N den Normalteiler $\overline{N} = \ker \eta$ ein. Dann erhält man $\beta(\xi) = 0$, und es existiert somit $\overline{\xi} \in H^1(G/\overline{N}, A^* \otimes B)$ mit $\alpha(\overline{\xi}) = \xi$. Dies bedeutet, dass $\xi : B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow B$ über $G/\overline{N}$ realisiert ist, d.h. $\overline{N} \subseteq CE$.

Bemerkung. Es seien $\xi_i : B_i \rightarrowtail E_i \twoheadrightarrow A$, $i = 1, 2$ zwei (Äquivalenzklasen von) Modulerweiterungen und $\xi_1 + \xi_2 : B_1 \oplus B_2 \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ ihre Summe. Dann ist $CE = CE_1 \cap CE_2$. Dies ergibt sich aus dem obigen Satz oder auch direkt aus der Konstruktion der Summe von Erweiterungen.

Vom homologischen Satz 8.1 machen wir jetzt die folgende darstellungstheoretische Anwendung. Es sei A ein einfacher Modul von kG, und P der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Wir betrachten P/J^2P und stellen die Frage: *Was ist der Zentralisator $C(P/J^2P)$?*

Wir wissen, dass P/J^2P eine Modulerweiterung

$$JP/J^2P \rightarrowtail P/J^2P \twoheadrightarrow A$$

ist, wobei die Kompositionsfaktoren im halbeinfachen Modul JP/J^2P gerade diejenigen einfachen B's mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B) \neq 0$ sind. Dabei ist bekannt:

- $O_{p'}CA \subseteq CP$ für P (siehe [P]);
- $O_{p'p}CA \subseteq CD$ für alle Kompositionsfaktoren D von P (siehe Korollar 5.8);
- $O_{p'p}CA = \bigcap CD$, wobei der Durchschnitt über alle Kompositionsfaktoren von P/J^2P zu erstrecken ist (siehe Satz 5.5).

Damit folgt

$$O_{p'}CA \subseteq C(P/J^2P) \subseteq O_{p'p}CA\ .$$

Diese Ungleichungen werden wir im Folgenden verschärfen. Aus obigem ergibt sich, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $O_{p'}CA = e$ annehmen dürfen, denn dieser Normalteiler operiert trivial in allen involvierten Moduln und für diese Moduln stimmen die Cohomologiegruppen von G und $G/O_{p'}CA$ überein.

Wir betrachten die Fitting-Untergruppe FG von G. Unter der getroffenen Voraussetzung gilt $FG \cap CA = O_pCA$. Wir betrachten ausserdem die Frattiniuntergruppe $\Phi(G)$ von G. Nach einem Resultat von Gaschütz ([G], siehe auch [H], p. 279) ist $FG/\Phi G$ halbeinfach und die Erweiterung

$$FG/\Phi G \rightarrowtail G/\Phi G \twoheadrightarrow G/FG$$

zerfällt. Es folgt, dass $F := FG \cap CA/\Phi G \cap CA$ ein halbeinfacher $\mathbb{F}_pG$-Modul ist und dass die Erweiterung

$$\begin{array}{ccccc} F & \rightarrowtail & G/(\Phi G \cap CA) & \twoheadrightarrow & G/(FG \cap CA) \\ & & || & & || \\ & & Q & & Q/F \end{array}$$

zerfällt. Für das Folgende setzen wir $k \otimes_{\mathbb{F}_p} F = \bigoplus B_j$. Es sei nun

$$B_j \otimes A/J(B_j \otimes A) = \bigoplus C_{jl} \ .$$

Dann gibt jede Projektion $\pi_{jl} : B_j \otimes A \twoheadrightarrow C_{jl}$ Anlass zu einer (injektiven!) Abbildung $\iota_{jl} : B_j \rightarrowtail A^* \otimes C_{jl}$. Damit erhalten wir Abbildungen

$$\eta = \eta_{jl} : F \overset{\tau_j}{\twoheadrightarrow} B_j \rightarrowtail A^* \otimes C_{jl} \ .$$

Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(Q/F,F) & \rightarrowtail & H^1(Q,F) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_Q(F,F) & \overset{\Delta}{\rightarrow} & H^2(Q/F,F) \\ \downarrow \eta_* & & \downarrow \eta_* & & \downarrow \eta_* & & \downarrow \eta_* \\ H^1(Q/F,A^* \otimes C_{jl}) & \rightarrowtail & H^1(Q,A^* \otimes C_{jl}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_Q(F,A^* \otimes C_{jl}) & \overset{\overline{\Delta}}{\rightarrow} & H^2(Q/F,A^* \otimes C_{jl}) \end{array}$$

Aus $\Delta(1_F) = 0$ folgt, $\overline{\Delta}(\eta^*(1_F)) = \overline{\Delta}(\eta_{jl}) = 0$. Damit gibt jedes η_{jl} Anlass zu einem nichttrivialen Element $\xi_{jl} \in H^1(Q, A^* \otimes C_{jl}) = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(A, C_{jl})$. (Dies bedeutet – nebenbei bemerkt – dass die C_{jl} nicht nur über G sondern sogar über Q(!) in JP/J^2P vorkommen.) Für die Erweiterung $\xi_{jl} : C_{jl} \rightarrowtail E_{jl} \twoheadrightarrow A$ erhalten wir gemäss unserem Satz 8.1

$$F \cap CE_{jl} = \ker(\eta_{jl}) = \ker(\tau_j)$$

und für die Summe E der Erweiterungen E_{jl} erhalten wir

$$F \cap CE = F \cap \bigcap CE_{jl} = \bigcap (F \cap CE_{jl}) = \cap \ker \tau_j = e \ .$$

Für die Gruppe Q ist somit der Zentralisator CE trivial. Da ferner gemäss der 5-Term Sequenz die Abbildung $H^1(Q, A^* \otimes -) \to H^1(G, A^* \otimes -)$ injektiv ist, folgt der folgende Satz 8.2. Für A im Haupblock sind die Resultate von Satz 8.2 und Satz 8.4 in [Sta4] zu finden, der allgemeine Fall wird, mit etwas anderen Methoden, in [La2] behandelt.

Satz 8.2. [Sta4], [La2] *Es sei A ein einfacher kG-Modul, und P sei der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Dann gilt*

$$C(P/J^2P) \subseteq \Psi_{CA}G \ ,$$

wobei $\Psi_{CA}G$ durch $\Psi_{CA}G/O_{p'}CA = \Phi(G/O_{p'}CA) \cap CA/O_{p'}CA$ definiert ist.

Korollar 8.3. [Sta4] *Für $A = k$ gilt $C(P/J^2P) = \Psi_G G$.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $O_{p'}G = e$ die Frattini-Untergruppe ΦG in $C(P/J^2P)$ liegt. Wir beweisen dies, indem wir nachweisen, dass jede kG-Modulerweiterung $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow k$ über $G/\Phi G$ realisiert wird, d.h. dass für jeden einfachen Modul B gilt: $H^1(G,B) = H^1(G/\Phi G, B)$. Dabei genügt es, dies für $\mathbb{F}_p$ an Stelle von k zu beweisen, denn das allgemeine Resultat ergibt sich dann durch Tensorieren mit k. Wir führen den Beweis mit Induktion nach der Länge einer durch ΦG laufenden Hauptreihe. Da nur im Falle $\Phi G \neq e$ etwas zu beweisen ist, betrachten wir einen minimalen Normalteiler C von G mit $C \subseteq \Phi G$. Dann zerfällt die Erweiterung $C \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/C$ nicht (siehe [H], p. 268). Wir betrachten die zugehörige 5-Term-Sequenz

$$0 \to H^1(G/C, B) \to H^1(G,B) \to \mathrm{Hom}_G(C,B) \xrightarrow{\Delta} H^2(G/C,B)$$

Für den $\mathbb{F}_pG$-Modul B, $B \neq C$ ergibt sich daraus $H^1(G/C,B) = H^1(G,B)$. Es sei also $B = C$. Dann ist $\Delta(1_C) = \xi \neq 0$. Da C einfach ist, ist $\mathrm{Hom}_G(C,C)$ ein Schiefkörper und Δ ist ein Vektorraum-Homomorphismus. Es folgt, dass Δ injektiv ist, so dass auch in diesem Fall gilt $H^1(G,B) = H^1(G/C,B)$. Da G/C eine kürzere Hauptreihe besitzt, ist damit der Beweis vollständig.

Mit Korollar 8.3 lässt sich der ursprüngliche Satz noch etwas verschärfen:

Satz 8.4. [Sta4], [La2] *Es sei A ein einfacher kG-Modul, und P der projektive unzerlegbare Modul mit Kopf A. Dann gilt*

$$\Psi_{CA}CA \subseteq C(P/J^2P) \subseteq \Psi_{CA}G \ .$$

Beweis. Wie oben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $O_{p'}CA = e$ annehmen; in diesem Fall gilt gemäss Definition $\Psi_{CA}CA = \Phi CA$. Es sei $\xi : B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ eine nichttriviale Erweiterung. Für $CA \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/CA$ betrachten wir die 5-Term-Sequenz

$$H^1(G/CA, (A^*{\otimes}B)^{CA}) \overset{\alpha}{\rightarrowtail} H^1(G, A^*{\otimes}B) \xrightarrow{\beta} H^1(CA, A^*{\otimes}B)^G \xrightarrow{\Delta} H^2(G/CA, (A^*{\otimes}B)^{CA}) \ .$$

Ist $\beta(\xi) = 0$, so folgt $(A^* \otimes B)^{CA} \neq 0$, d.h. $B^{CA} \neq 0$, also $CB \supseteq CA$. Ferner ist ξ eine Erweiterung über G/CA, d.h. $CE = CA \supseteq \Phi CA = \Psi_{CA}CA$.

Ist $\beta(\xi) = \eta \neq 0$. Dann folgt $H^1(CA, A^* \otimes B) \neq 0$. Es sei $B\downarrow_{CA} = \bigoplus B_j$. Dann gilt

$$H^1(CA, A^* \otimes B) = \bigoplus H^1(CA, B_j) \ .$$

Nach Korollar 8.3 ist jede nichttriviale Modulerweiterung $B_j \rightarrowtail \overline{E} \twoheadrightarrow k$ über CA eine Erweiterung über $CA/\Phi CA$. Damit folgt auch in diesem Fall $CE \supseteq \Phi CA = \Psi_{CA} CA$.

Wir merken schliesslich noch an, dass Conchita Martínez Pérez in ihrer Dissertation [Ma1] in Zaragoza kürzlich Beispiele angegeben hat, mit denen gezeigt wird, dass die beiden Ungleichungen i.a. echt sind (siehe auch [LaMa2]).

(1) Es sei $H = \mathbf{A}_4$, die alternierende Gruppe auf vier Objekten, und es sei char $k = 3$. Es bezeichne U den dreidimensionalen einfachen und projektiven kH-Modul. Es sei schliesslich G die durch die nichtzerfallende Erweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow H$ mit $N = \mathbb{F}_3$ gegebene Gruppe. Wir betrachten nun U als kG-Modul. Als solcher ist U nicht projektiv, und es existiert deshalb eine nichtzerfallende Modulerweiterung $W \rightarrowtail V \twoheadrightarrow U$. Der Zentralisator $C_G V$ kann dann N nicht umfassen, den sonst wäre die Erweiterung über H realisierbar und sie müsste wegen der Projektivität von U zerfallen. Damit gilt $C(P/J^2P) = e$, aber andererseits $\Psi_{CA} G = N$. In diesem Beispiel ist also die zweite der beiden Inklusionen von Satz 8.4 echt.

(2) Es sei H die Gruppe $\mathrm{SL}(2,3)$, und G die durch die nichtzerfallende zentrale Erweiterung

$$N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow H$$

mit $N = \mathbb{F}_3$ gegebene Gruppe. Laut Konstruktion sind sowohl H wie auch G 3-nilpotent. Wir betrachten den natürlichen 2-dimensionalen $\mathbb{F}_3 H$-Modul (bzw. $\mathbb{F}_3 G$-Modul) V. Es ist dann $C_G V = N$ und damit $\Psi_{CV} CV = \Phi(CV) = e$. Da sowohl H wie auch G 3-nilpotent sind mit zyklischer 3-Sylow-Untergruppe, sind die zu V gehörigen unzerlegbaren projektiven Moduln einreihig, nämlich mit 3 Kompositionsfaktoren isomorph zu V über H bzw. mit 6 Kompositionsfaktoren isomorph zu V über G. Es folgt $C_H(P_H/J^2P_H) = e$ und damit $C_G(P_G/J^2P_G) = N$. In diesem Beispiel ist somit die erste der beiden Inklusionen von Satz 8.4 echt.

9. Zur Cohomologie treuer einfacher Moduln

Gemäss den Resultaten des Abschnittes 3 gilt für eine p-auflösbare Gruppe und für einen beliebigen einfachen kG-Modul M stets M mit $H^1(G/CM, M) = 0$. Andererseits gibt es zu einer nicht p-auflösbaren Gruppe G, deren Gruppenordnung durch p teilbar ist, immer einen einfachen kG-Modul M mit $H^1(G/CM, M) \neq 0$. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Situation näher. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Gruppe H und einen treuen einfachen kG-Modul V mit $H^1(H, V) \neq 0$. Ferner nehmen wir an, dass der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist. Die Resultate gehen zurück auf Kovacs [K] und Aschbacher-Scott [AS].

Satz 9.1. *Es sei $H^1(H, V) \neq 0$. Dann besitzt H einen eindeutig bestimmten minimalen Normalteiler $L \neq e$. Ferner ist L nichtabelsch und p teilt dessen Ordnung.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf Lemma 9.2 und 9.3 ab; das letztere ist ein Resultat von Gruenberg [Gr].

Lemma 9.2. *Es sei N ein Normalteiler von G, und M ein kG-Modul mit $M^N = 0$. Dann gilt $H^1(G, M) = H^1(N, M)^G$.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus der zur Gruppenerweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/N$ gehörigen 5-Term-Sequenz.

Lemma 9.3. *Es sei $G = S \times T$, und M sei ein nichttrivialer einfacher kG-Modul mit $H^1(G, M) \neq 0$. Dann zentralisiert S oder T den Modul M. Gilt $S \subseteq CM$, so folgt $H^1(G, M) = H^1(T, M)$.*

Beweis. Es sei $T \not\subseteq CM$. Dann gilt $M^T = 0$. Mit Lemma 9.2 ergibt sich daraus sofort $0 \neq H^1(G, M) = H^1(T, M)^G$. Da k algebraisch abgeschlossen ist, gilt $M = M_1 \otimes M_2$, wobei M_1 ein einfacher kS-Modul und M_2 ein einfacher kT-Modul ist. Damit erhalten wir $H^1(T, M)^G = M_1^S \otimes H^1(T, M_2)$. Daraus ergibt sich $M_1^S \neq 0$, also $S \subseteq CM_1$ und $S \subseteq CM$. Dies war zu beweisen.

Beweis des Satzes. Es seien K und L verschiedene minimale Normalteiler von H. Setze $N = K \times L$. Da V treu ist, gilt $V^N = 0$ und mit Lemma 9.2 folgt daraus $0 \neq H^1(G, V) = H^1(N, V)^G$. Damit ist $H^1(N, V) \neq 0$, und es gibt einen einfachen direkten Summanden W des nach Clifford halbeinfachen kN-Moduls $V{\downarrow_N}$ mit $H^1(N, W) \neq 0$. Nach Lemma 9.3 muss dann K oder L den Modul W zentralisieren; nach Clifford müsste dann K oder L auch V zentralisieren. Dies ist aber ein Widerspruch, da V treu vorausgesetzt wurde. Dies beinhaltet auch, dass N nicht abelsch ist und p die Ordung von N teilt.

Satz 9.4. *Es sei $H^1(H, V) \neq 0$, und L sei der eindeutig bestimmte minimale Normalteiler von H. Dann gibt es einen einfachen direkten Faktor S von L, so dass für $A := N_H S$ ein* *einfacher kA-Untermodul $\overline{V}$ von V existiert mit*

(i) $V = \overline{V}\uparrow^H$;

(ii) $C_A(\overline{V}) = C_H(S) =: B$.

Bemerkung. Damit ist $\overline{V}$ ein treuer A/B-Modul. Die Gruppe A/B enthält (eine Kopie von) S. Der zugehörige Quotient von A/B ist gemäss Schreier-Vermutung als Automorphismengruppe der einfachen Gruppe S auflösbar.

Korollar 9.5.

$$H^1(H,V) = H^1(A/B,\overline{V}) = H^1(S,\overline{V})^A \ .$$

Beweis des Korollars. Es gilt $H^1(H,V) = H^1(H,\overline{V}\uparrow^H) = H^1(A,\overline{V})$. Die 5-Term-Sequenz zur Erweiterung $B \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/B$ liefert

$$0 \to H^1(A/B,\overline{V}) \to H^1(A,\overline{V}) \to \mathrm{Hom}_A(B,\overline{V}) \ .$$

Da S trivial in B operiert, operiert es auch trivial in jedem A-Bild von B. Andererseits ist $\overline{V}^S = 0$, so dass $\mathrm{Hom}_A(B,\overline{V}) = 0$ folgt. Mit Hilfe von Lemma 9.2 ergibt sich aus $\overline{V}^S = 0$ weiter $H^1(A/B,\overline{V}) = H^1(S,\overline{V})^A$. Damit ist der Beweis des Korollars 9.5 vollständig.

Beweis des Satzes. Wir betrachten die Restriktion $V\downarrow_L = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_l$ mit V_i homogen. Aus $0 \neq H^1(H,V) = H^1(L,V)^H$ folgt $H^1(L,V) \neq 0$ und schliesslich $H^1(L,V_i) \neq 0$ für ein gewisses i. Ist W der einfache kL-Untermodul des isotypischen Moduls V_i, so gilt also $H^1(L,W) \neq 0$. Wegen $L = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ ergibt sich aus Lemma 9.2, dass j existiert mit $W^{S_j} = 0$ und $W^{S_i} = W$ für $i \neq j$. Wir setzen $S = S_j$ und betrachten die Trägheitsgruppe T von W. Dann ist V_i ein einfacher kT-Modul mit $V_i\uparrow^H = V$.

Wir behaupten nun $T \subseteq N_H S =: A$.

Es ist zu zeigen, dass $S = S_j$ ein Normalteiler von T ist. Es sei $x \in T$. Wir betrachten $x^{-1}Sx$. Als Untergruppe von $L = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ ist $x^{-1}Sx$ einer der Faktoren $S = S_i$. Wäre $i \neq j$, so würde $s \in S$ wegen $s(xw) = x(x^{-1}sxw)$ trivial in xW operieren. Dies steht im Widerspruch zur Tatsache, dass x in der Trägheitsgruppe von W liegt.

Wir setzen $\overline{V} = V_i\uparrow^A$. Dann ist $\overline{V}$ einfach, denn es gilt $\overline{V}\uparrow^H = ((V_i)\uparrow^A)\uparrow^H = V$. Ferner ist $\overline{V}$ eine kA-Untermodul von V.

Damit ist Teil (i) des Satzes bewiesen.

Um (ii) zu beweisen, stellen wir zuerst fest, dass laut Konstruktion S nichttrivial in $\overline{V}$ operiert. Es folgt $0 = \overline{V}^S = \overline{V}^{B\cdot S} = \overline{V}^{B\times S}$, wo wir $B = C_H(S)$ gesetzt haben. Nun gilt wegen $V = \overline{V}\uparrow^H$ und mit Lemma 9.2

$$0 \neq H^1(H,V) = H^1(A,\overline{V}) = H^1(B\times S,\overline{V})^A \ .$$

Insbesondere folgt $H^1(B \times S, \overline{V}) \neq 0$. Es sei V' einer der einfachen direkten Summanden von $\overline{V}\downarrow_{B\times S}$ mit $H^1(B\times S, V') \neq 0$. Dann folgt mit Lemma 9.3, dass B oder S in V' trivial operiert. Nach Konstruktion operiert S in $\overline{V}$ und damit auch in V' nichttrivial. Deshalb muss B in V' und damit auch in $\overline{V}$ trivial operieren. Es gilt also $B \subseteq C_A\overline{V}$.

Um die Umkehrung zu beweisen, betrachten wir $c \in C_A\overline{V}$, $s \in S$ und $v \in \overline{V}$. Es folgt dann $sv = c^{-1}scv$, also $(s^{-1}c^{-1}sc)v = v$. Wegen $[s,c] \in S$ bedeutet dies $[s,c] \in C_S\overline{V} = \{e\}$. Daraus folgt $c \in C_H\overline{S} = B$. Dies war zu beweisen.

In [AS] wurde das Resultat von Satz 9.1 verwendet, um Aussagen über die Konjugationsklassen maximaler Untergruppen herzuleiten. Dabei spielt die Dimension von $H^1(H, V)$ eine grosse Rolle. Sie lässt sich wie folgt abschätzen. Wir zeigen zuerst:

Lemma 9.6. *Es sei N ein Normalteiler von G und V ein einfacher kG-Modul, auf dem N nichttrivial operiert. Dann gilt für jeden einfachen direkten Summanden E von $V\downarrow_N$*

$$\dim_k\ H^1(G,V) \leq \dim_k\ H^1(N,E)\ .$$

Beweis. Der Normalteiler N operiert laut Voraussetzung nichttrivial in E. Betrachte $E\uparrow^G$, die injektive Abbildung $V \rightarrowtail E\uparrow^V$ und die zugehörige exakte Folge:

$$\cdots \to H^0(G, E\uparrow^G/V) \to H^1(G,V) \to H^1(G,E\uparrow^G) \to H^1(G,E\uparrow^G/V) \to \cdots\ .$$

Da $E\uparrow^G\downarrow_N$ eine direkte Summe von zu E konjugierten Moduln ist, folgt

$$H^0(N, E\uparrow^G/V) = (E\uparrow^G/V)^N = 0\ ,$$

also a fortiori $H^0(G, E\uparrow^G/V) = 0$. Damit ergibt sich $\dim_k\ H^1(G,V) \leq \dim_k\ H^1(N,E)$.

Korollar 9.7. *Es sei H, V, $\overline{V}$, S wie in Satz 9.4 und W sei ein einfacher direkter Faktor von $\overline{V}\downarrow_S$. Dann gilt*

$$\dim_k\ H^1(H,V) \leq \dim_k\ H^1(S,W)\ .$$

Beweis. Nach Korollar 9.5 gilt $H^1(H,V) = H^1(A/B,\overline{V})$, mit $S \triangleleft A/B$. Nach Lemma 9.6 gilt dann die Abschätzung

$$\dim_k\ H^1(A/B,\overline{V}) \leq \dim_k\ H^1(S,W)\ .$$

Die Abschätzung von Korollar 9.7 wird in [AS] nur unter der zusätzlichen Voraussetzung "*H/L auflösbar*" (Bezeichnung wie in Satz 9.4) bewiesen (siehe [AS], statement (4.4), p. 61). Wir beschliessen diesen Abschnitt mit einer Erweiterung des Satzes 9.1, die von Willems [W3] stammt.

Satz 9.8. *Es sei $H \neq O_{p'p}H = \{e\}$. Die Anzahl der minimalen Normalteiler von H sei r. Dann gilt*

(i) *Es existiert ein treuer kH-Modul M mit $H^r(H,M) \neq 0$.*

(ii) *Für jeden treuen kH-Modul M gilt*

$$H^0(H,M) = H^1(H,M) = \cdots = H^{r-1}(H,M) = 0 \ .$$

Beweis. Offenbar dürfen wir annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist.

Wir beweisen zuerst (i). Es seien $L_1, \ldots, L_r$ die minimalen Normalteiler in H. Wegen $O_{p'p}H = 1$ folgt $L = L_1 \times \cdots \times L_r \lhd H$ und jedes L_i ist seinerseits eine direkte Summe von nichtabelschen einfachen, zueinander isomorphen Gruppen, deren Ordung durch p geteilt wird. Es sei T_i ein einfacher direkter Summand der Gruppe L_i , und es sei V_i ein einfacher, nichttrivialer kT_i-Modul mit $H^1(T_i, V_i) \neq 0$. Wir betrachten V_i als kL_i-Modul, indem wir die anderen direkten Summanden von L_i trivial operieren lassen. Dann folgt sofort $H^1(L_i, V_i) \neq 0$. Setzen wir $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_r$, so liefert das Künneth-Theorem

$$H^r(L,V) = H^1(L_1,V_1) \otimes H^1(L_2,V_2) \otimes \cdots \otimes H^1(L_r,V_r) \neq 0 \ .$$

Wir betrachten nun den induzierten Modul $V\uparrow^H$. Wegen $H^r(H, V\uparrow^H) = H^r(L,V) \neq 0$ gibt es einen Kompositionsfaktor M von $V\uparrow^H$ mit $H^r(H,M) \neq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass M treu ist. Die Restriktion $M\downarrow_L$ enthält nach Clifford alle zu V konjugierten Moduln als direkte Summanden. Der Durchschnitt der Zentralisatoren in L dieser konjugierten Modul ist aber offensichtlich trivial. Da L der Sockel von H ist, ist damit der Beweis von (i) vollständig.

Um (ii) zu beweisen, nehmen wir an, dass $L = L_1 \times \cdots \times L_r$ der Sockel von H sei. Es sei X ein treuer einfacher kH-Modul. Wir betrachten einen einfachen Summanden Y von $X\downarrow_L$. Dann ist $Y = Y_1 \otimes Y_2 \otimes \cdots \otimes Y_r$ mit Y_i einfach über L_i und nach dem Künneth-Theorem gilt

$$H^l(L,Y) = \bigoplus_{k_1+k_2+\cdots+k_r=l} H^{k_1}(L_1,Y_1) \otimes \cdots \otimes H^{k_r}(L_r,Y_r) \ .$$

Da X treu ist, ist jedes Y_i nichttrivial, so dass $H^0(L_i,Y_i) = 0$ für $i = 1,2,\ldots,r$. Daraus folgt aber sofort $H^t(L,Y) = 0$ für $t = 0,1,\ldots,r-1$. Es ergibt sich $H^t(L,X) = 0$ für $t = 0,1,\ldots,r-1$. Mit der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz

$$H^l(H/L, H^m(L,X)) \Rightarrow H^n(H,X)$$

folgt dann $H^t(H,X) = 0$ für $t = 0,1,\ldots,r-1$.

10. Die Fong-Reduktionen und Cohomologie

In diesem Abschnitt bezeichne H eine Gruppe mit einem nichttrivialen p'-Normalteiler. Wir setzen $N = O_{p'}H$. Es seien ferner A und B zwei einfache kH-Moduln im gleichen Block von kH. Dann gibt es nach Satz 5.1 einen einfachen kN-Modul A_0 der sowohl in $A{\downarrow_N}$ wie auch in $B{\downarrow_N}$ als direkter Summand vorkommt. Für das Problem der Berechnung von $\mathrm{Ext}^*_{kH}(A,B)$ lassen sich dann die sogenannten Fongreduktionen (siehe [F], p. 411 ff) einsetzen.

Es sei T die Trägheitsgruppe von A_0. Dann existieren einfache kT-Moduln $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ mit $A{\uparrow^H} = A$ und $B{\uparrow^H} = B$. Für diese gilt

Lemma 10.1. [Sta4]
$$\mathrm{Ext}^*_{kH}(A,B) = \mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B}) \ .$$

Beweis. Es gilt

$$\mathrm{Ext}^*_{kH}(A,B) = \mathrm{Ext}^*_{kH}(\tilde{A}{\uparrow^H},\tilde{B}{\uparrow^H}) = \mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B}{\uparrow^H}{\downarrow_T}) \ .$$

Nun ist natürlich $\tilde{B}$ ein direkter Summand von $\tilde{B}{\uparrow^H}{\downarrow_T}$. Gemäss Definition der Trägheitsgruppe folgt ferner, dass über kN der Modul $\tilde{B}{\uparrow^H}{\downarrow_T}/\tilde{B}$ keine zu A_0 isomorphe direkte Summanden besitzt. Andererseits ist natürlich $\tilde{A}{\downarrow_N}$ eine direkte Summe von zu A_0 isomorphen Moduln. Nach Satz 5.1 kann dann der kT-Modul $\tilde{B}{\uparrow^H}{\downarrow_T}/\tilde{B}$ keinen Summanden besitzen, der im Block von $\tilde{A}$ liegt. Daraus folgt

$$\mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B}{\uparrow^H}{\downarrow_T}) = \mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B}) \ .$$

Damit ist das Lemma 10.1 bewiesen.

Um $\mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B})$ zu berechnen, lässt sich die zweite Fong-Reduktion einsetzen. Dazu müssen wir voraussetzen, dass k algebraisch abgeschlossen ist; wegen Satz 1.5 ist dies keine wesentliche Voraussetzung. Es existiert dann eine zentrale Erweiterung T^* von T durch eine zyklische p'-Gruppe K mit den folgenden Eigenschaften:

(1) T^* enthält das direkte Produkt $K \times N$ als Normalteiler,

(2) es existiert ein kT^*-Modul X mit $\overline{X}{\downarrow_N} = A_0$ mit $\tilde{A} = \overline{X} \otimes \overline{A}$ und $\tilde{B} = \overline{X} \otimes \overline{B}$, wobei $\overline{A}$ und $\overline{B}$ Moduln über T^*/N sind.

Lemma 10.2.
$$\mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B}) = \mathrm{Ext}^*_{k(T^*/N)}(\overline{A},\overline{B}) \ .$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{A},\tilde{B}) &= H^*(T,\mathrm{Hom}_k(\tilde{A},\tilde{B}))\\
&= H^*(T^*,\mathrm{Hom}_k(\tilde{A},\tilde{B}))\\
&= H^*(T^*,\mathrm{Hom}_k(\overline{X}\otimes\overline{A},\overline{X}\otimes\overline{B}))\\
&= H^*(T^*,\mathrm{Hom}_k(\overline{X},\overline{X})\otimes\mathrm{Hom}_k(\overline{A},\overline{B}))\\
&= H^*(T^*/N,\mathrm{Hom}_{kN}(\overline{X},\overline{X})\otimes\mathrm{Hom}_k(\overline{A},\overline{B}))\\
&= H^*(T^*/N,k\otimes\mathrm{Hom}(\overline{A},\overline{B}))\\
&= \mathrm{Ext}^*_{k(T^*/N)}(\overline{A},\overline{B})\ .
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Lemma 10.2 vollständig.

Ist die Gruppe H p-auflösbar, so folgt aus diesen beiden Resultaten, dass sich die Berechnung der Cohomologie von H im Prinzip auf die Berechnung der Cohomologie einer Gruppe mit *kleinerer* p-Länge zurückführen lässt. Das Verfahren scheint allerdings für allgemeine Berechnungen zu kompliziert zu sein. Wir verweisen aber auf Abschnitt 13, wo die Fongreduktionen in einem speziellen Fall eingesetzt werden.

11. Zur Cohomologie p-auflösbarer Gruppen; der Satz von L. Scott

Wir beweisen hier eine Aussage über die Wechselsumme der Dimensionen der Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}^n_{kG}(A,B)$. Sie wird erhalten, indem wir die einfachen kG-Moduln A und B von der Charakteristik p zu einfachen KG-Moduln A' und B' in die Charakteristik 0 hochheben. Falls G p-auflösbar ist, ist eine solche Hochhebung immer möglich. Aus diesem Grund betrachten wir hier von Anfang an nur diesen Fall. Wir merken aber an, dass sich der Beweis immer dann durchführen lässt, wenn die Hochhebung möglich ist. In der Darstellung folgen wir hier im wesentlichen dem Manuskript [Sch2], p. 113ff.

Es sei in diesem Abschnitt K ein (genügend grosser) vollständiger Körper der Charakteristik 0. Es sei S der Ring der ganzen Zahlen in K, und π bezeichne dessen maximales Ideal. Der Restklassenkörper $S/\pi = k$ sei von der Charakteristik p.

Für p-auflösbare Gruppen gilt dann der folgende wichtige Satz von Fong-Swan; für einen Beweis verweisen wir auf [Se], p. 135 ff.

Satz 11.1. *Es sei G p-auflösbar und A ein einfacher kG-Modul. Dann existiert ein einfaches SG-Gitter $\tilde{A}$ mit $\tilde{A}/\pi\tilde{A} = \tilde{A} \otimes k = A$.*

Es sei $\tilde{\mathbb{P}}$ eine minimale SG-projektive Auflösung von $\tilde{A}$:

$$\cdots \to \tilde{P}_n \to \tilde{P}_{n-1} \to \cdots \to \tilde{P}_1 \to \tilde{P}_0 \to \tilde{A} \to 0 \ .$$

Minimal heisst hier, dass an jeder Stelle der Resolution die projektive Überdeckung des vorhergehenden Kernes steht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass für jedes n der S-Rang des projektiven Moduls $\tilde{P}_n$ minimal ist. (Wir gehen hier auf die Theorie der minimalen projektiven Auflösungen nicht ein und verweisen statt dessen auf [Gru].)

Es folgt dann, dass $k \otimes_S \tilde{\mathbb{P}}$ eine minimale kG-projektive Auflösung von $k \otimes_S \tilde{A} = A$ ist; für jedes n ist die k-Dimension des projektiven Moduls $k \otimes_S \tilde{P}_n$ minimal:

$$\cdots \to k \otimes_S \tilde{P}_n \to k \otimes_S \tilde{P}_{n-1} \to \cdots \to k \otimes_S \tilde{P}_1 \to k \otimes_S \tilde{P}_0 \to \tilde{A} \to 0 \ .$$

Wegen der Minimalität von $k \otimes_S \tilde{\mathbb{P}}$ folgt für einen einfachen kG-Modul B mit zugehöriger Hochhebung $\tilde{B}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n_{kG}(A,B) &= \mathrm{Hom}_{kG}(k \otimes_S \tilde{P}_n, k \otimes_S \tilde{B}) \\ &= k \otimes_S \mathrm{Hom}_{SG}(\tilde{P}_n, \tilde{B}) \ . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} e_n = \dim_k(\mathrm{Ext}^n_{kG}(A,B)) &= \dim_k(k \otimes_S \mathrm{Hom}_{SG}(\tilde{P}_n, \tilde{B})) \\ &= \dim_K(K \otimes_S \mathrm{Hom}_{SG}(\tilde{P}_n, \tilde{B})) \\ &= \dim_K(\mathrm{Hom}_{KG}(K \otimes_S \tilde{P}_n, K \otimes_S \tilde{B})) \ . \end{aligned}$$

Wir setzen $K \otimes_S \tilde{P}_n = P'_n$ und $K \otimes_S \tilde{A} = A'$ sowie $K \otimes_S \tilde{B} = B'$. Da der Komplex $\mathbb{P}' = K \otimes_S \tilde{\mathbb{P}}$ exakt ist, ist auch $\mathrm{Hom}_{KG}(\mathbb{P}', B')$ exakt, denn in Charakteristik 0 sind alle Moduln halbeinfach.

Wir führen nun folgende Bezeichnung ein:

- a_n = Vielfachheit von B' in P'_n;
- b_n = Vielfachheit von B' in $\ker(P'_n \to P'_{n-1})$.

Die Eulercharakteristik im Komplex $\mathrm{Hom}_{KG}(\mathbb{P}', B')$ liefert dann

$$-b_n + a_n - a_{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0 + (-1)^{n+1} \delta_{AB}$$

mit $\delta_{AB} = 1$ für $A = B$ und $\delta_{AB} = 0$ für $A \neq B$. Daraus ergibt sich

$$a_n - a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} a_1 = b_n + (-1)^{n+1} a_0 + (-1)^n \delta_{AB} \ .$$

Ferner gilt offensichtlich $a_0 = \delta_{AB}$, also $a_0 = 1$ für $A = B$ und $a_0 = 0$ sonst. Für die Dimensionen $e_n = \dim_k(\mathrm{Ext}^n_{kG}(A, B)$ erhalten wir somit die folgende Ungleichung:

$$e_n - e_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} e_1 \geq 0 \ .$$

Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes von L. Scott.

Satz 11.2. [Sco] *Es sei G p-auflösbar. Dann gilt für einfache kG-Moduln A, B*

$$\dim_k(\mathrm{Ext}^n_{kG}(A, B)) - \dim_k(\mathrm{Ext}^{n-1}_{kG}(A, B)) + \cdots + (-1)^{n-1} \dim_k(\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B)) \geq 0 \ .$$

Interessant ist diese Ungleichung insbesondere im Fall $n = 2$. Hier ergibt sich

Korollar 11.3. *Es sei G p-auflösbar. Dann gilt für einfache kG-Moduln A, B,*

$$\dim_k(\mathrm{Ext}^2_{kG}(A, B)) \geq \dim_k(\mathrm{Ext}^1_{kG}(A, B))$$

Sowohl der Satz 11.2 wie auch das Korollar 11.3 lassen sich auf beliebige Körper k der Charakteristik p ausdehnen. Es sei G p-auflösbar und es seien A und B zwei einfache Moduln über kG. Ist nun $\hat{k}$ ein genügend grosse Körpererweiterung von k, so sind die Moduln $\hat{k} \otimes A$ und $\hat{k} \otimes B$ halbeinfach, jeder Summand ist hochhebbar und es gilt $\mathrm{Ext}^n_{\hat{k}G}(\hat{k} \otimes A, \hat{k} \otimes B) = \hat{k} \otimes \mathrm{Ext}^n_{kG}(A, B)$. Das Resultat für k ergibt sich dann sofort aus dem Resultat für $\hat{k}$.

Korollar 11.3 lässt sich anschaulich mit Hilfe von Graphen interpretieren. Wir definieren dazu analog zum Graphen $\Gamma = \Gamma^1$, den wir im Abschnitt 2 eingeführt haben, für jedes natürliche n Graphen Γ^n, indem wir anstelle von $\mathrm{Ext}^1_{kG}(-,-)$ den Funktor $\mathrm{Ext}^n_{kG}(-,-)$ benützen (siehe dazu auch den Abschnitt 12). Das Korollar 11.3 besagt in dieser Sprechweise, dass der Graph Γ^1 ein Teilgraph des Graphen Γ^2 ist.

Beispiel. Für nicht p-auflösbare Gruppen ist Γ^1 i.a. *kein* Teilgraph von Γ^2. Ein explizites Beispiel wird durch $G = \mathbf{A}_5$ in Charakteristik 2 geliefert. Die zwei zueinander konjugierten 2-dimensionalen einfachen kG-Moduln M_1, M_2 sind nicht hochhebbar. Wie sich aus der Struktur der projektiven unzerlegbaren Moduln (siehe [L], p. 77) sofort ergibt, gilt für $i = 1, 2$ dann $H^1(G, M_i) \neq 0$, aber $H_2(G, M_i) = 0$.

12. Ext und die Blockstruktur; Gruppen der p-Länge 1

Die Blöcke von kG haben wir mit Hilfe des Graphen Γ definiert, dessen Kanten durch das Nichtverschwinden von $\mathrm{Ext}^1_{kG}(-,-)$ zwischen einfachen Moduln gegeben ist. Es liegt nahe, in analoger Weise die Graphen Γ^n anzusehen, deren Kanten durch das Nichtverschwinden von $\mathrm{Ext}^n_{kG}(-,-)$ gegeben sind. Einfache Beispiele zeigen, dass die Zusammenhangskomponenten dieser Graphen nicht mit den Blöcken von kG übereinstimmen. Andererseits liegen natürlich die Zusammenhangskomponenten eines Γ^n immer innerhalb eines Blocks. Man kann einen Schritt weitergehen und den Graphen $\tilde{\Gamma}$ betrachten, dessen Kanten durch das Nichtverschwinden von $\mathrm{Ext}^*_{kG}(-,-)$ zwischen einfachen Moduln gegeben ist. Eine naheliegende Frage ist dann die folgende:

Es seien S_i, S_j einfache Moduln im gleichen Block von kG. Folgt dann $\mathrm{Ext}^*_{kG}(S_i,S_j)\neq 0$? Sind S_i, S_j in $\tilde{\Gamma}$ durch eine Kante verbunden?

Die Frage hat i.a. eine negative Antwort wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $G=\mathbf{A}_5$, $p=2$, und M_1, M_2 bezeichne die zwei nichtisomorphen 2-dimensionalen einfachen kG-Moduln (k sei genügend gross). Dann gilt $\mathrm{Ext}^n_{kG}(M_1,M_2)=0$ für alle $n=0,1,2,\ldots$.

Beweis. Es gilt $\mathrm{Ext}^n_{kG}(M_1,M_2)=\mathrm{Ext}^n_{kG}(k,M_1^*\otimes M_2)=\mathrm{Ext}^n_{kG}(k,P)=0$, da der Modul P (Steinberg-Modul) projektiv ist.

In diesem und dem nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der oben gestellten Frage etwas eingehender und stellen einige positive Resultate dar. Dies betrifft im vorliegenden Abschnitt die Gruppen von p-Länge 1 [D], [DSt] und im nächsten Abschnitt allgemein Gruppen, die p-auflösbar (bzw. p-constrained) sind (siehe [Li], [LiSt1], [LiSt2], [LiSt3]). Obschon die getrennte Behandlung zu Überschneidungen führt, haben wir uns aus Gründen der Lesbarkeit und auch aus Gründen der historischen Entwicklung für diese Zweiteilung entschieden. – Die Beweistechniken für die hier zu besprechenden Resultate sind wesentlich komplizierter als in den bisherigen Abschnitten, insbesondere machen sie intensiven Gebrauch von der Theorie der Spektralreihen. Für die Grundlagen dieser Theorie verweisen wir auf [HSt], Chapter VIII, sowie [E], p. 69 ff.

Wir betrachten hier zuerst eine Gruppe Q, die treu auf der p-Gruppe P operiert und die dadurch induzierte Q-Operation in $H^*(P,k)$.

Satz 12.1. [DSt] *Es sei Q eine Gruppe, die treu auf der p-Gruppe P operiert. Es sei ferner A ein einfacher kQ-Modul. Dann gibt es ein n, so dass A in der Cohomologiegruppe $H^n(P,k)$ als Kompositionsfaktor auftritt.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir einige Hilfssätze. Das erste Lemma betrifft den

Fall, wo P eine elementar abelsche p-Gruppe ist.

Lemma 12.2. *Die Gruppe Q operiere treu auf der elementar abelschen p-Gruppe E, und es sei A ein einfacher kQ-Modul. Dann gibt es ein n, so dass A in der Cohomologiegruppe $H^n(E,k)$ als Kompositionsfaktor auftritt.*

Beweis. Die Cohomologie $H^*(E,k)$ enthält den Polynomring $k[x_1,x_2,\dots,x_l]$, wo die Unbestimmten $x_1,x_2,\dots,x_l$ in natürlicher Weise einer Basis von E entsprechen (siehe [E], p. 32). Die treue Operation von Q auf dem erzeugenden Vektorraum der Polynomalgebra $k[x_1,x_2,\dots,x_l]$ liefert dann gemäss dem Satz von Steinberg (siehe [H], p. 705), dass kQ als direkter Summand in $k[x_1,x_2,\dots,x_l]$ vorkommt. Damit kommt insbesondere jeder einfache kQ-Modul in $k[x_1,x_2,\dots,x_l]$ und damit in $H^*(E,k)$ als Kompositionsfaktor vor.

Lemma 12.3. *Es sei E eine Q-invariante, zentrale, elementar abelsche Untergruppe der p-Gruppe P. Die Gruppe Q operiere treu in E, und es sei A ein einfacher kQ-Modul. Dann ist A ein Kompositionsfaktor im Bild der Restriktionsabbildung*

$$\mathrm{res}\downarrow^P_E\colon H^*(P,k)\to H^*(E,k).$$

Beweis. Es sei $m=|P/E|$. Nach [E], p. 57/58 liegen die Elemente $x_1^m,x_2^m,\dots,x_l^m$ im Bild der Restriktionsabbildung. Da m eine p-Potenz ist und k die Charakteristik p besitzt, sind die Algebren $k[x_1,x_2,\dots,x_l]$ und $k[x_1^m,x_2^m,\dots,x_l^m]$ isomorph über kQ. Das selbe Argument wie im Beweis von Lemma 12.2 liefert dann die Behauptung.

Lemma 12.4. *Es sei E eine Q-invariante zentrale elementar abelsche Untergruppe der p-Gruppe P. Es sei A ein einfacher kQ-Modul, der Kompositionsfaktor von $H^*(P/E,k)$ ist. Dann ist A auch Kompositionsfaktor von $H^*(P,k)$.*

Beweis. Wir betrachten die Gruppenerweiterung $E\rightarrowtail P\twoheadrightarrow P/E$ und die zugehörige Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe

$$E_2^{i,j}=H^i(P/E,H^j(E,k))\Rightarrow H^{i+j}(P,k)\ .$$

Die Gruppe Q operiert unter den getroffenen Voraussetzungen auf dieser Spektralreihe. Da E eine zentrale Untergruppe ist, folgt ausserdem $E_2^{i,j}=E_2^{i,0}\otimes E_2^{0,j}$ mit diagonaler Q-Operation. Die durch das cup-Produkt definierten Abbildungen $E_r^{i,0}\otimes E_r^{0,j}\xrightarrow{\cup}E_r^{i,j}$ sind kQ-Modulhomomorphismen.

Im ersten Schritt beweisen wir nun, dass A für gewisses a ein Kompositionsfaktor im Tensorprodukt $E_\infty^{a,0}\otimes E_\infty^{0,*}$ ist. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass A ein Kompositionsfaktor im Bild der cup-Produkt-Abbildung $E_\infty^{a,0}\otimes(\oplus_i E_\infty^{0,i})\xrightarrow{\cup}E_\infty^{a,*}$ ist.

(1) Es sei a der kleinste Index, so dass A ein Kompositionsfaktor von $E_2^{a,*}$ ist. Dann ist A ein Kompositionsfaktor von $X\otimes Y$, wo X ein Kompositionsfaktor von $E_2^{a,0}$ und

Y ein Kompositionsfaktor von $E_2^{0,*}$ sind. Um zu zeigen, dass X "überlebt", müssen wir nachweisen, dass der Modul X nicht Kompositionsfaktor im Bild eines der Differentiale $d_r : E_r^{a-r,r-1} \to E_r^{a,0}$, $r \geq 2$ ist. Nehmen wir an, dies wäre der Fall, so müsste X als Kompositionsfaktor von $E_r^{a-r,r-1}$ und damit als Kompositionsfaktor eines Tensorproduktes $X' \otimes Y'$ auftreten, wo X' in $E_r^{a-r,0}$ und Y' in $E_r^{0,r-1}$ vorkommt. Dann würde aber A als Kompositionsfaktor von $X' \otimes Y' \otimes Y$ auftreten, also von $X' \otimes Y''$, wo Y'' (wie Y) ein einfacher kQ-Modul ist, in dem der Zentralisator von E in Q trivial operiert. Nach dem Lemma 12.2 tritt Y'' als Kompositionsfaktor in einem $E_2^{0,b}$ auf, so dass A in $E_2^{a-r,b}$ vorkommt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von a. Nach Lemma 12.3 ist Y ein Kompositionsfaktor im Bild der Restriktionsabbildung $\mathrm{res}\downarrow^P_E$: $H^*(P,k) \to H^*(E,k)$, also in $\oplus_i E_\infty^{0,i}$. Damit folgt aber, dass der Modul A Kompositionsfaktor in $E_\infty^{a,0} \otimes (\oplus_i E_\infty^{0,i})$ ist, was im ersten Schritt zu beweisen war.

(2) Aus der Minimalität von a folgt, dass A kein Kompositionsfaktor im Bild eines Differentials $d_r : E_r^{a-r,*} \to E_r^{a,*}$ ist. Folglich muss A im Bild der cup-Produkt-Abbildung $E_\infty^{a,0} \otimes (\oplus_i E_\infty^{0,i}) \xrightarrow{\cup} E_\infty^{a,*}$ vorkommen.

Es folgt, dass A ein Kompositionsfaktor eines $H^{a+i}(P,k)$ sein muss. Dies war zu beweisen.

Beweis des Satzes. Wir betrachten eine absteigende Zentralreihe von P

$$P = P^{(0)} \supset P^{(1)} \supset \cdots \supset P^{(l)} \supset P^{(l+1)} = e \ .$$

mit $P^{(1)} = \Phi(P)$ die Frattini Untergruppe von P und mit elementar abelschen Faktoren $P^{(i)}/P^{(i+1)}$. Wir führen den Beweis mit Induktion nach l. Es sei $l = 0$. Dann ist die Behauptung des Satzes durch Lemma 12.3 gegeben. Es sei $l \geq 1$. Da Q in P treu operiert, muss der Zentralisator in Q von $P^{(0)}/P^{(1)} = P/\Phi(P)$ eine p-Gruppe sein (siehe [Ku], p. 102). Andererseits wird jeder einfache kQ-Modul durch O_pQ zentralisiert. Wir setzen $E = P^{(l)}$. Mit Induktion dürfen wir demzufolge annehmen, dass jeder einfache kQ-Modul A in $H^*(P/E,k)$ als Kompositionsfaktor auftritt. Nach Lemma 12.4 tritt dann A auch in $H^*(P,k)$ als Kompositionsfaktor auf. Dies war zu beweisen.

Satz 12.5. *Es sei G eine Gruppe der p-Länge 1, und A, B seien zwei einfache kG-Modul im Hauptblock. Dann existiert $n \geq 0$ mit $Ext^n_{kG}(B,A) \neq 0$.*

Bemerkung Für $B = k$ erhält man das Nichtverschwinden der Cohomologie $H^*(G,A)$. Dieser Teil des Resultates geht auf Diethelm [D] zurück.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $G = O_{p'pp'}G$. Da A und B von $N = O_{p'}G$ (sogar von $O_{p'p}G$) zentralisiert werden und wegen $H^*(G, B^* \otimes A) = H^*(G/N, B^* \otimes A)$ dürfen wir $N = O_{p'}G = e$ voraussetzen. Wir betrachten nun die Erweiterung

$$P = O_pG \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/O_pG = Q \ ,$$

wobei die p'-Gruppe Q treu auf P operiert. Die Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe liefert dann

$$H^n(G, B^* \otimes A) = H^0(Q, H^n(P, B^* \otimes A)) = \mathrm{Hom}_{kQ}(H_n(P, k), B^* \otimes A) \ .$$

Es sei nun M ein einfacher kQ-Modul. Nach Satz 12.1 existiert ein $n \geq 0$, sodass M^* in $H^n(P, k)$ als Kompositionsfaktor vorkommt; dann kommt M in $H_n(P, k)$ als Kompositionsfaktor vor. Da Q eine p'-Gruppe ist, ist jeder Modul halbeinfach. Wählt man für M einen einfachen Summanden von $B^* \otimes A$ so folgt $\mathrm{Hom}_{kQ}(H_n(P, k), B^* \otimes A) \neq 0$. und damit $\mathrm{Ext}^n_{kG}(B, A) \neq 0$.

Bemerkung. Eine sorgfältige Analyse des Beweisganges (siehe [DSt]) erlaubt es, über die Dimensionen n, in denen die Cohomologie bzw. die Ext-Gruppen nichttrivial sind, einige zusätzliche Angaben zu machen. Wir haben hier der leichteren Lesbarkeit halber auf diesen Zusatz verzichtet. Wir erwähnen aber immerhin, dass es immer unendlich viele Dimensionen sind, in denen die Cohomologie nichttrivial ist.

13. Ext und die Blockstruktur; allgemeiner Fall

Wir setzen hier die Diskussion des in Abschnitt 12 skizzierten Problems fort, und zwar betrachten wir hier ganz allgemein p-auflösbare bzw. p-constrained Gruppen. Wir beginnen mit der Definition von p-constrained.

Definition. Die Gruppe G heisst *p-constrained*, wenn gilt

$$C_G\left(O_{p'p}G/O_{p'}G\right) \leq O_{p'p}G \ .$$

Der Inhalt der beiden folgenden Sätze ist als Lemma von P. Hall und G. Higman bekannt (siehe [H], p. 690). Sie besagen insbesondere, dass p-constrained eine Verallgemeinerung von p-auflösbar ist.

Satz 13.1. *Es sei G p-auflösbar. Dann ist G auch p-constrained.*

Beweis. Es sei G p-auflösbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir offensichtlich $O_{p'}G = e$ annehmen. Wir setzen $P = O_pG$. Dann gilt $C_GP \cdot P = K > P$. Es sei M/P ein in K/P liegender minimaler Normalteiler. Da G p-auflösbar ist, muss M/P von p'-Ordnung sein. Damit existiert in M ein Komplement S zu P. Nun ist aber $C_GP \cdot P/C_GP$ eine p-Gruppe. Wegen $S \subseteq C_GP \cdot P$ folgt damit $S \subseteq C_GP$. Also gilt $M = S \times P$, so dass M ein Normalteiler in G ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $O_{p'}G = e$.

Satz 13.2. *Es sei G p-constrained mit $O_{p'}G = e$. Für den Normalteiler $P = O_pG$ gilt dann $C_G(P/\Phi P) = P$.*

Beweis. Da $P/\Phi P$ abelsch ist, gilt sicher $C_G(P/\Phi P) \geq P$. Aus $C_G(P/\Phi P) > P$ folgt, dass der Normalteiler $C_G(P/\Phi P)$ ein p'-Element x enthält. Da x trivial in $P/\Phi P$ operiert, operiert x auch trivial in P; es gilt also $x \in C_GP$. Da G p-constrained ist, folgt aber andererseits nach Satz 13.1 $C_GP = P$. Dies ist ein Widerspruch.

Die Theoreme 13.3 und 13.4 enthalten die Hauptresultate des vorliegenden Abschnittes.

Theorem 13.3. [Li, LiSt1, LiSt2] *Es sei G p-constrained, und M, N seien einfache Moduln im Hauptblock. Dann gilt* $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,N) \neq 0$.

Theorem 13.4. [Li, LiSt1, LiSt2] *Es sei G p-auflösbar, und M, N einfache Moduln im gleichen Block. Dann gilt* $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,N) \neq 0$.

Die in Abschnitt 12 gestellte Frage ist also für p-auflösbare Gruppen *allgemein* zu bejahen und im Fall der p-constrained Gruppen für einfache Moduln im Hauptblock. Beide Aussagen ergeben sich aus dem folgenden Satz:

Satz 13.5. [LiSt3] *Es sei G p-constrained, und $P \triangleleft G$ sei ein nichttrivialer p-Normalteiler in G. Ist $0 \neq V$ ein kG-Modul mit $K = C_G(P/\Phi P) \subseteq C_G V$, so folgt $H^*(G, V) \neq 0$.*

Wir beweisen hier zuerst, dass aus dem Satz 13.5 die beiden Theoreme 13.3 und 13.4 folgen.

Wir wenden uns zuerst dem *Beweis* von Theorem 13.3 zu. Da die Moduln M und N im Hauptblock liegen, werden sie von $O_{p'}G$ zentralisiert. Wegen

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(M, N) = \mathrm{Ext}^*_{k(G/O_{p'})}(M, N)$$

und da mit G auch $G/O_{p'}G$ p-constrained ist, dürfen wir $O_{p'}G = e$ annehmen. Wir setzen $P = O_pG$. Dann gilt nach Definition von p-constrained $C_GP \subseteq P$; insbesondere ist P nichttrivial. Nach Satz 13.2 folgt dann weiter $K = C_G(P/\Phi P) = P$ und damit $K \subseteq C_G(M^* \otimes N)$. Aus Satz 13.5 ergibt sich dann $0 \neq H^*(G, M^* \otimes N) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(M, N)$. Dies war zu beweisen.

Für den *Beweis* von Theorem 13.4 sei G p-auflösbar, und es seien M und N zwei einfache Moduln im Block $\mathcal{B}$. Da p-auflösbare Gruppen p-constrained sind, dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{B}$ nicht der Hauptblock ist. Damit folgt $R = O_{p'}G \neq e$, andernfalls hätte G nur einen Block (siehe [HB], p. 186). Nach Satz 5.1 besitzen $M\downarrow_R$ und $N\downarrow_R$ einen gemeinsamen einfachen Summanden A. Es sei T dessen Trägheitsgruppe. Ist $T \neq G$, so existieren einfache kT-Moduln $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$ mit $M = \tilde{M}\uparrow^G$ und $N = \tilde{N}\uparrow^G$. Dann gilt $\mathrm{Ext}^*_{kT}(\tilde{M}, \tilde{N}) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(M, N)$ (siehe Lemma 10.1). Wir dürfen also im folgenden $T = G$ annehmen, d.h. M und N sind isotypisch über $R = O_{p'}G$.

Wenn k algebraisch abgeschlossen ist, was wir im Folgenden annehmen, können wir die zweite Fong-Reduktion verwenden (siehe Lemma 10.2). Es existiert in diesem Fall eine Gruppe G^*, die zentrale Erweiterung von G durch eine p'-Gruppe K ist: $K \rightarrowtail G^* \twoheadrightarrow G$, mit $K \times R \triangleleft G^*$, und ferner $k(G^*/R)$-Moduln $\overline{M}$ und $\overline{N}$ im gleichen Block von $k(G^*/R)$ und ein kG^*-Modul $\overline{X}$ mit $\overline{X}\downarrow_R = A$, so dass gilt $M = \overline{X} \otimes \overline{M}$ und $N = \overline{X} \otimes \overline{N}$.

Dann folgt (vergleiche Lemma 10.2)

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(M, N) = H^*(G^*/(R \times K), \mathrm{Hom}_{kK}(\overline{M}, \overline{N})) \ .$$

Da die einfachen kG^*/R-Moduln $\overline{M}$ und $\overline{N}$ im gleichen Block liegen, ergibt sich $\mathrm{Hom}_{kK}(\overline{M}, \overline{N}) \neq 0$. Ferner gilt $O_{p'}(G^*/(R \times K)) = O_{p'}(G^*/R) = e$ und, da K in G^* zentral ist, $O_p(G^*/R) = O_p(G^*/R \times K)$. Die nichttriviale Gruppe $O_p(G^*/R)$ operiert trivial in den einfachen Moduln $\overline{M}$ und $\overline{N}$, also auch in $\mathrm{Hom}_{kK}(\overline{M}, \overline{N})$. Mit dem Satz 13.5 ergibt sich dann

$$H^*(G^*/R \times K, \mathrm{Hom}_{kK}(\overline{M}, \overline{N})) \neq 0 \ .$$

Dies war zu beweisen.

Am Schluss werden wir Gegenbeispiele zu den denkbaren Verschärfungen der Theoreme 13.3 und 13.4 angeben. Zuerst beschäftigen wir uns nun aber mit dem Beweis von Satz 13.5. Dabei benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen.

Lemma 13.6. *Es sei E ein abelscher Normalteiler von G. Es bezeichne H den Zentralisator $C_G E$. Es sei ferner Q ein projektiver unzerlegbarer $k(G/H)$-Modul. Dann tritt Q als direkter Summand in der $H^*(H,k)$ auf.*

Beweis. Das Lemma 13.6 ist eine Verschärfung des Lemma 12.3. Die Cohomologie $H^*(E,k)$ enthält den Polynomring $k[x_1, x_2, \ldots, x_l]$, wo $x_1, x_2, \ldots, x_l$ in natürlicher Weise einer Basis von E entsprechen (siehe [E], p. 32). Da G/H auf dem erzeugenden Vektorraum der Polynomalgebra $k[x_1, x_2, \ldots, x_l]$ treu operiert, ergibt sich aus dem Satz von Steinberg (siehe [H], p. 705), dass $k(G/H)$ als direkter Summand in $k[x_1, x_2, \ldots, x_l]$ vorkommt. Daraus folgt, dass Q ein direkter Summand in $H^*(E,k)$ ist. Der Rest des Beweises verläuft ähnlich wie der Beweis des Lemma 12.3. Insbesondere benötigen wir auch hier die Normabbildung von Evens. Zu diesem Zweck betrachten wir ein Element $u \in H^*(E,k)$, welches Q erzeugt. Nach Evens gilt dann (siehe [B], p. 125 ff oder [E], p. 57 ff)

$$\operatorname{res}\downarrow^H_E \operatorname{norm}\uparrow^H_E (1+u) = 1 + tu^q + \text{ Terme höheren Grades } .$$

Dabei ist $[H : E] = q \cdot t$, wo q eine p-Potenz und t eine p'-Zahl ist. Es bezeichne nun $w \in H^*(H,k)$ der homogene Anteil von $\operatorname{norm}\uparrow^H_A (1+u)$ im Grad $q \cdot \deg u$. Dann bildet die Restriktion von H auf E den Modul $k(G/H) \cdot w$ auf $k(G/H) \cdot tu^q$ ab. In der Algebra $k[x_1, x_2, \ldots, x_l] \subseteq H^*(E,k)$ sind sowohl die Multiplikation mit der p'-Zahl t wie auch das Potenzieren mit einer p-Potenz injektive kG/H-Homomorphismen. Daraus folgt, dass Q als direkter Summand im Bild der Restriktion $H^*(H,k) \to H^*(E,k)$ vorkommt. Dann kommt Q aber auch in $H^*(H,k)$ als direkter Summand vor.

Lemma 13.7. *Es sei $H \triangleleft G$ und V ein kG-Modul. Es sei $\overline{Q}$ ein projektiver $k(G/H)$-Modul mit $\overline{Q}^G \neq 0$, der als direkter Summand in $H^n(H,V)$ auftritt. Dann folgt $H^n(G,V) \neq 0$.*

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach n. Es sei $n = 0$. Dann folgt aus $\overline{Q} \subseteq \operatorname{Hom}_{kH}(k,V) = H^0(H,V)$ sofort $\overline{Q}^G \subseteq \operatorname{Hom}_{kG}(k,V) = H^0(G,V)$. Für $n \geq 1$ betrachten wir die kurze exakte Sequenz $V \rightarrowtail I \twoheadrightarrow W$ mit I injektiv über kG und die zugehörigen langen exakten Folgen

$$\cdots \to H^{n-1}(G,I) \to H^{n-1}(G,W) \to H^n(G,V) \to 0$$

und

$$\cdots \to H^{n-1}(H,I) \to H^{n-1}(H,W) \to H^n(H,V) \to 0 \; .$$

Der projektive $k(G/H)$-Modul $\overline{Q}$ ist direkter Summand in $H^n(H,V)$, also auch direkter Summand in $H^{n-1}(H,W)$. Mit Induktion schliesst man daraus $H^{n-1}(G,W) \neq 0$. Für $n \geq 2$ folgt daraus sofort $H^n(G,V) \neq 0$. Um auch den Fall $n = 1$ zu behandeln, wählt man für I die injektive Enveloppe von V; dann gilt $H^0(G,W) \xrightarrow{\sim} H^1(G,V)$.

Aus Lemma 13.6 und Lemma 13.7 erhalten wir in der Situation des Lemma 13.7 Folgendes. Es sei V ein $k(G/H)$-Modul. Wir betrachten einen projektiven unzerlegbaren $k(G/H)$-Modul Q, der eine nichttriviale Abbildung $Q \to V$ zulässt. Nach Lemma 13.6 kommt Q^* für gewisses n in $H^n(H,k)$ als direkter Summand vor. Wir betrachten nun $H^n(H,V) = \mathrm{Hom}_k(H_n(H,k),V)$. Da Q in $H_n(H,k)$ als direkter Summand vorkommt, folgt, dass der projektive $k(G/H)$-Modul $\overline{Q} = \mathrm{Hom}_k(Q,V)$ als direkter Summand in $\mathrm{Hom}_k(H_n(H,k),V) = H^n(H,V)$ vorkommt. Ferner gilt nach Voraussetzung

$$\overline{Q}^G = \mathrm{Hom}_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(Q,V)) = \mathrm{Hom}_{kG}(Q,V) \neq 0 \ .$$

Mit Lemma 13.7 folgt dann $H^n(G,V) \neq 0$.

Damit haben wir das folgende Resultat bewiesen

Lemma 13.8. *Es sei E ein nichttrivialer elementar abelscher Normalteiler von G, und es bezeichne H den Zentralisator $C_G(E)$ von E in G. Ferner sei V ein nichttrivialer $k(G/H)$-Modul. Dann folgt $H^*(G,V) \neq 0$.*

Beweis des Satzes 13.5. Wir betrachten die am schnellsten absteigende Zentralreihe der p-Gruppe P mit elementar abelschen Faktoren:

$$P = P^{(0)} \supset P^{(1)} \supset \cdots \supset P^{(l)} \supset P^{(l+1)} = e \ .$$

Es ist also insbesondere $P^{(1)} = \Phi(P)$.

Wir führen den Beweis mit Induktion nach l. Für $l = 0$ stimmt die Aussage des Satzes mit derjenigen von Lemma 13.8 überein. Es sei also im Folgenden $l \geq 1$. Wir setzen $Z = P^{(l)}$ und $H = C_G Z$. Es gilt dann natürlich $H \supseteq P$. Wir betrachten nun die zur Gruppenerweiterung $Z \rightarrowtail H \twoheadrightarrow H/Z$ gehörigen Spektralsequenzen

$$E_2^{r,s}(V) = H^r(H/Z, H^s(Z,V)) = H^r(H/Z,V) \otimes H^s(Z,k) \Rightarrow H^{r+s}(H,V) \ ,$$

$$E_2^{r,s}(k) = H^r(H/Z, H^s(Z,k)) = H^r(H/Z,k) \otimes H^s(Z,k) \Rightarrow H^{r+s}(H,k) \ .$$

Aus der Natürlichkeit dieser Spektralsequenzen folgt, dass die Gruppe G/H darauf operiert; insbesondere sind die auftretenden Differentiale und die Filtrierungen mit dieser Operation verträglich. Man weiss ferner (siehe [E], p. 69 ff), dass jeder Term $\{E_n^{**}(k)\}$, $n = 2,3,\ldots,\infty$ der Spektralreihe $E_2^{**}(k)$ eine bigraduierte k-Algebra ist. Der Term $\{E_\infty^{**}(k)\}$ ist die zur entsprechenden Filtrierung von $H^*(H,k)$ gehörige (bi-)graduierte assoziierte Algebra.

Jeder Term $\{E_n^{**}(V)\}$, $n = 2,3,\ldots,\infty$ der Spektralreihe $E_2^{**}(V)$ ist ein bigraduierter Modul über der bigraduierten Algebra $\{E_\infty^{**}(k)\}$. Diese Modulstruktur ist verträglich mit der Modulstruktur von $H^*(H,k)$ in $H^*(G,V)$.

Nach Induktion ist offensichtlich $H^*(H/Z,V) \neq 0$. Es sei a minimal mit

$$0 \neq H^a(H/Z,V) = H^a(H/Z, H^0(Z,V)) = E_2^{a,0}(V).$$

In der Spektralreihe $E_2^{r,s}(V)$ sind dann links der Faser $r = a$ alle Einträge Null. Damit folgt $E_2^{a,0}(V) = E_\infty^{a,0}(V)$.

Nach Lemma 13.6 ist jeder projektive unzerlegbare Modul über $k(G/H)$ im Bild der Restriktionsabbildung $\mathrm{res}\downarrow_Z^H \colon H^*(H,k) \to H^*(Z,k)$ als direkter Summand enthalten. Es gibt folglich ein b, so dass $E_\infty^{a,0}(V) \otimes \mathrm{res}\downarrow_Z^H\ (H^b(H,k))$ den projektiven unzerlegbaren $k(G/H)$-Modul R mit trivialem Kopf als direkten Sumanden enthält. Die Theorie der Spektralreihen liefert $\mathrm{res}\downarrow_Z^H\ (H^b(H,k)) = E_\infty^{0,b}(k)$. Daraus folgt, dass $E_\infty^{a,0}(V) \otimes E_\infty^{0,b}(k)$ den Modul R als direkten Summanden enthält. Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_\infty^{a,0}(V) \otimes E_\infty^{0,b}(k) & \to & E_\infty^{a,b}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{a,0}(V) \otimes E_2^{0,b}(k) & \xrightarrow{\sim} & E_2^{a,b}(V) \end{array}$$

Die senkrechten Abbildungen sind beide injektiv. Wegen der Minimalität von a ist nämlich, wie aus der Theorie der Spektralreihen folgt, $E_\infty^{a,0}(V) = E_2^{a,0}(V)$ und $E_\infty^{a,b}(V) \subseteq E_2^{a,b}(V)$. Ferner gilt ganz allgemein $E_\infty^{0,b}(k) \subseteq E_2^{0,b}(k)$. Daraus folgt, dass R als direkter Summand in $E_\infty^{a,b}(V)$ und damit in $H^{a+b}(H,V)$ vorkommt. Nach dem Lemma 13.7 ergibt sich daraus $H^{a+b}(G,V) \neq 0$. Dies war zu beweisen.

Wir schliessen eine Anwendung des Resultates an. Ein innerer Automorphismus ϕ der Gruppe H induziert in der Cohomologie $H^*(H,k)$ immer die Identität. Man kann sich die umgekehrte Frage stellen, wann ein äusserer Automorphismus ϕ von H in der Cohomologie die Identität induziert. Hier sind nur Teilantworten bekannt (siehe [JM]). Dabei lassen sich leicht Fälle angeben, in denen der durch $\phi \neq 1$ induzierte Automorphismus die Identität ist: Zum Beispiel tritt dies ein, wenn H eine p'-Gruppe ist: Wegen $H^*(H,k) = 0$ induziert in diesem Fall *jeder* Automorphismus die Identität in $H^*(H,k)$. Hier beweisen wir:

Satz 13.9. [LiSt3] *Es sei H p-auflösbar mit $O_{p'}H = e$. Es sei ϕ ein nichttrivialer Automorphismus von H mit $(|\phi|, |H|) = 1$. Dann ist die induzierte Abbildung $\phi^* : H^*(H,k) \to H^*(H,k)$ nicht die Identität.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Ordnung von ϕ eine Primzahl, sagen wir q, ist. Wir betrachten $C_q = \langle \phi \rangle$ und das semidirekte Produkt $G = H \rtimes C_q$. Dann ist G ebenfalls p-auflösbar. Es sei k genügend gross mit $\mathrm{char}\, k = p$ und so, dass k eine nichttriviale C_q-Operation trägt. Man bezeichne den so entstehenden kC_q-Modul mit $\overline{k}$. Da G p-auflösbar ist, und wegen $O_{p'p}G \subseteq C\overline{k}$ liegt $\overline{k}$ im Hauptblock von G (siehe [FG]). Dann folgt

$$0 \neq H^*(G,\overline{k}) = H^0(C_q, H^*(H,\overline{k})) = \mathrm{Hom}_{C_q}(H_*(H,k), \overline{k})\ .$$

Also operiert C_q nichttrivial in $H_*(H,k)$ und damit auch nichttrivial in $H^*(H,k)$.

Wir schliessen den Abschnitt mit einigen Beispielen, die zeigen, dass die Aussagen der Theoreme 13.3 und 13.4 ohne weitere Voraussetzungen nicht verschärft werden können.

Beispiel. Wir beschreiben hier ein Beispiel einer p-auflösbaren Gruppe G mit zwei nichteinfachen und nichtprojektiven kG-Moduln M_1, M_2 im Hauptblock mit

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(M_1, M_2) = 0 \ .$$

Es sei p eine ungerade Primzahl und k ein Körper der Charakteristik p. Wir setzen $A = B = C_p$ und lassen $C = C_2$ trivial auf A und durch Inversion auf B operieren. Die Gruppe $G = (A \times B) \rtimes C$ ist offensichtlich auflösbar. Um die Moduln zu definieren, betrachten wir die Untergruppe $A \times C \subseteq G$. Es bezeichne V den nichttrivialen eindimensionalen kC-Modul, den wir via die Projektion $A \times C \to C$ als $k(A \times C)$-Modul ansehen. Wir definieren $M_2 = V \uparrow^G$. Nach dem Satz von Green (siehe [B], p. 82) ist M_2 unzerlegbar, und wegen $\dim_k(M_2) = p < p^2$ ist M_2 nicht projektiv. Schliesslich liegt M_2 im Hauptblock, weil G nur einen einzigen Block besitzt (siehe [HB], p. 186). Mit $M_1 = k$ ergibt sich dann

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(M_1, M_2) = H^*(G, M_2) = H^*(A \times C, V) = H^*(A, V)^C = \mathrm{Hom}_{kC}(H_*(A,k), V) = 0 \ ,$$

denn C operiert trivial in A und damit auch in $H_*(A,k)$, aber nicht trivial im einfachen Modul V.

Es ist zu diesem Beispiel noch anzuführen, dass Benson in [B4] diejenigen Gruppen G charakterisiert hat, welche die Eigenschaft besitzen, dass für *jeden* Modul M im Hauptblock von kG gilt $H^n(G, M) \neq 0$ für ein $n > 0$. Es sind dies die Gruppen, in denen der Zentralisator jedes Elementes der Ordnung p p-nilpotent ist.

Beispiel. In diesem involvierten Beispiel beschreiben wir eine Gruppe G, die p-constrained, aber nicht p-auflösbar ist, sowie zwei einfache (nichtprojektive) kG-Moduln $\overline{M}_1$ und $\overline{M}_2$ im gleichen Block $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ verschieden vom Hauptblock, mit $\mathrm{Ext}^*_{kG}(\overline{M}_1, \overline{M}_2) = 0$.

Es sei $H = \mathbf{A}_5$, $p = 2$ und k ein genügend grosser, aber endlicher Körper der Charakteristik 2. Wir betrachten einen nichttrivialen kH-Modul A, schreiben ihn multiplikativ und betrachten seine Gruppenalgebra FA über dem Primkörper F zur Primzahl q, $q \neq 2$. Die Gruppe H operiere durch Permutation auf den Basiselementen von FA. Zusammen mit der üblichen Operation von A, definiert dies eine Operation von $A \rtimes H$ auf FA; diese $A \rtimes H$-Gruppe bezeichen wir mit B. Man beachte, dass B eine p'-Gruppe ist. Wir definieren $G = B \rtimes (A \rtimes H)$. Es ist $B = O_{p'}G$ und $B \rtimes A = O_{p'p}G$.

Nach Definition ist G 2-constrained, denn im Quotienten $Q = G/B$ gilt $C_Q A \subseteq A$; sie ist aber natürlich nicht p-auflösbar, weil sie H als Quotienten besitzt.

Um die Moduln zu definieren, betrachten wir die Untergruppe $T = B \rtimes H \subseteq G$. Laut Konstruktion gilt $B\!\downarrow_H = F \oplus C$ mit $F = Fe_A$ und $C = \sum_{a' \neq e_A} Fa'$. Natürlich ist C ein Normalteiler in T. Es gilt $T/C = F \times H$.

Es sei nun $L = \overline{k}$ ein nichttrivialer kF-Modul, aufgefasst als kT-Modul via $T \to T/C = F \times H \to F$. Mit M_1 und M_2 bezeichnen wir die zwei (nichtisomorphen) 2-dimensionalen einfachen kH-Moduln, aufgefasst als kT-Moduln via $T \to T/C = F \times H \to H$. Wir betrachten $L \otimes M_i$, $i = 1, 2$, und setzen $\overline{M}_i = L \otimes M_i \uparrow^G$. Ferner benützen wir die Bezeichnung $\overline{L} = L\!\uparrow^G$.

Wir behaupten, dass T die Trägheitsgruppe von $L\!\downarrow_B$ in G ist. In der Tat ist der Zentralisator von $a(L\downarrow_B)$ gegeben durch $aCa^{-1} = \sum_{e \neq a' \in A} Fa'a^{-1}$. Für $a \neq e$ ist also $a(L\downarrow_B) \ncong L\downarrow_B$. Nach [F], p. 195 folgt dann, dass $\overline{L}$ und $\overline{M}_i = L \otimes M_i \uparrow^G$, $i = 1, 2$ einfache kG-Moduln sind.

Wir zeigen schliesslich:

(1) Die Moduln $\overline{M}_i$, $i = 1, 2$ und $\overline{L}$ gehören zum gleichen Block von kG.

(2) Es gilt $\mathrm{Ext}^*_{kG}(\overline{M}_1, \overline{M}_2) = 0$.

Um (1) zu beweisen, zeigen wir $\mathrm{Ext}^*_{kG}(\overline{L}, \overline{M}_i) \neq 0$. Nach der Definition eines Blockes liegen dann alle drei Moduln im gleichen Block. Wir zeigen dies, indem wir Lemma 10.1 anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^*_{kG}(\overline{L}, \overline{M}_i) &= \mathrm{Ext}^*_{kG}(L\!\uparrow^G_T, L \otimes M_i\!\uparrow^G_T) \\
&= \mathrm{Ext}^*_{kT}(L, L \otimes M_i) \\
&= \mathrm{Ext}^*_{kT}(k, L^* \otimes L \otimes M_i) \\
&= H^*(T, L^* \otimes L \otimes M_i) \\
&= H^*(T/B, (L^* \otimes L)^B \otimes M_i), \text{ da } B \text{ eine } p'\text{-Gruppe ist} \\
&= H^*(H, M_i) \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass das Tensorprodukt $L^* \otimes L$ eindimensional ist und B darauf trivial operiert.

Die folgende Überlegung, wieder unter Verwendung von Lemma 10.1, beweist (2):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^*_{kG}(\overline{M}_1, \overline{M}_2) &= \mathrm{Ext}^*_{kT}(L \otimes M_1, L \otimes M_2) \\
&= H^*(T, L^* \otimes L \otimes M_1^* \otimes M_2) \\
&= H^*(T/B, (L^* \otimes L)^B \otimes M_1^* \otimes M_2) \\
&= H^*(H, M_1^* \otimes M_2) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Wir bemerken hier, dass sich über die Dimensionen, in denen die Ext-Gruppen nichttrivial sind, noch zusätzliche Informationen gewinnen lassen, indem man die einzelnen Beweisschritte in dieser Beziehung genau analysiert. Wir verzichten in diesem Text auf diesen Zusatz. und verweisen statt dessen auf [LiSt2]. Ferner lässt sich auch der Satz 13.5 noch etwas schärfer fassen, indem der Zentralisator des Moduls weniger eingeschränkt wird; auch für diesen Punkt verweisen wir auf [LiSt2].

Die in diesem Abschnitt dargestellten Resultate und Beispiele lassen die folgende Frage offen: Es sei G eine Gruppe, k ein Körper mit char $k = p$, wo p die Gruppenordung teilt. Gilt dann für einen *einfachen* Modul im Hauptblock von kG stets $H^*(G, A) \neq 0$? Für $A = k$ ist die Frage nach einem Satz von Swan [Sw] zu bejahen (siehe auch [E], p. 58). Allgemeine Resultate, etwa im besonders interessierenden Fall von einfachen Gruppen, scheinen nicht bekannt zu sein; einige ganz isolierte Resultate ergeben sich aus [B4] und aus der in [LiSt3] zitierten Literatur.

Anhang: Die 5-Term-Sequenz in der Cohomologie einer Gruppenerweiterung

Die 5-Term-Sequenz in der Cohomologie einer Gruppenerweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ spielt in einem grossen Teil des vorliegenden Textes eine ganz zentrale Rolle: Sie bildet in sehr vielen Fällen das Werkzeug, mit dessen Hilfe die wichtigen Beweisschritte ausgeführt werden. In der homologischen Algebra wurde die Sequenz erstmals als Korollar der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe bekannt (für einen Beweis in diesem Kontext siehe z.B. [E], p. 77). In Anbetracht der vielfältigen Anwendungen ist aber ein direkter, möglichst elementarer Beweis durchaus erwünscht. Ist A ein kQ-Modul, so ist die Herleitung auf sehr einfache Art möglich (siehe [HSt], VI.8); im allgemeineren, für den vorliegenden Text wichtigen Fall, wo A ein kG-Modul ist, ist die Herleitung etwas involvierter. Wir folgen hier im wesentlichen dem Beweis in [Po], p. 94 ff.

Satz. *Es sei $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ eine Gruppenerweiterung und A ein kG-Modul. Dann ist die folgende Sequenz exakt*

$$0 \to H^1(Q, A^N) \to H^1(G, A) \to (H^1(N, A))^Q \to H^2(Q, A^N) \to H^2(G, A) \ .$$

Beweis. Wir betrachten zum kG-Modul A den von der trivialen Gruppe induzierten Modul $I = \mathrm{Hom}_k(kG, A)$ und die zugehörige Einbettung von A in I. Dies ergibt die kurze exakte Folge $A \rightarrowtail I \twoheadrightarrow A'$. Die Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}_{kG}(k, -)$ liefert die exakte Folge

$$0 \to A^G \to A \to A'^G \to H^1(G, A) \to 0 \quad \text{und} \quad H^1(G, A') \cong H^2(G, A) \ , \tag{1}$$

da I über kG frei ist. Analog – der Modul I ist auch frei über kN – liefert die Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}_{kN}(k, -)$ die exakte Folge

$$0 \to A^N \to I^N \to A'^N \to H^1(N, A) \to 0 \ . \tag{2}$$

Man beachte, dass jeder Term dieser Folge eine natürliche Q-Operation trägt, mit welcher die Folge (2) zu einer Folge von kQ-Moduln wird. Wir zerlegen die Folge (2) in zwei kurze exakte Sequenzen

$$0 \to A^N \to I^N \to B \to 0 \tag{3}$$

und

$$0 \to B \to A'^N \to H^1(N, A) \to 0 \ . \tag{4}$$

Dabei gilt offenbar $I^N = \mathrm{Hom}_k(kQ, A)$, so dass I^N ein freier Modul über kQ ist. Die Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}_{kQ}(k, -)$ auf die Folge (3) liefert wegen $(A^N)^Q = A^G$

$$0 \to A^G \to I \to B^Q \to H^1(Q, A^N) \to 0 \quad \text{und} \quad H^1(Q, B) \cong H^2(Q, A^N)\ ; \tag{5}$$

die Anwendung auf die Folge (4) ergibt

$$0 \to B^Q \to A'^G \to H^1(N, A)^Q \to H^1(Q, B) \to H^1(Q, A'^N) \to \cdots\ . \tag{6}$$

Die Folge (6) ist im wesentlichen bereits die gesuchte 5-Term-Sequenz. Es sind nur noch einige kleinere Modifikationen zu machen. Dazu betten wir die Sequenz (6) in das folgende kommutative Diagramm ein:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & & \\
A^G \arrow[d] \arrow[r, equal] & A^G \arrow[d] & & & & \\
A \arrow[d] \arrow[r, equal] & A \arrow[d] & & & & \\
B^Q \arrow[d] \arrow[r, tail] & A'^G \arrow[d] \arrow[r] & H^1(N, A)^Q \arrow[r] & H^1(Q, B) \arrow[r] & H^1(Q, A'^N) \arrow[r] & \cdots \\
H^1(Q, A^N) \arrow[d] \arrow[r] & H^1(G, A) \arrow[d] & & & & \\
0 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Links steht dabei die Folge (5) und daneben die Folge (1). Es ergibt sich aus der Kommutativität des Diagrammes, dass

$$0 \to H^1(Q, A^N) \to H^1(G, A) \to H^1(N, A)^Q \to H^1(Q, B) \to H^1(Q, A'^N) \tag{7}$$

exakt ist. Ferner gilt nach (5) $H^1(Q, B) = H^2(Q, A^N)$ und schliesslich folgt aus dem Beginn der Sequenz (8) für den Modul A' an Stelle von A, dass die Abbildung

$$H^1(Q, A'^N) \to H^1(G, A') = H^2(G, A)$$

injektiv ist. Damit ist die Exaktheit der 5-Term-Sequenz bewiesen.

Es sind die folgenden **Bemerkungen** angebracht. Wir haben hier darauf verzichtet, die einzelnen Abbildungen zu identifizieren – sie leiten sich in allen Fällen aus den "natürlichen" Abbildungen her, also aus der "Inflation" bzw. aus der "Restriktion" Die notwendigen Überlegungen bieten keine grössere Schwierigkeiten, sie sind aber im Detail etwas umständlich. Wir überlassen sie gerne dem Leser. Wir haben hier ebenfalls darauf verzichtet, explizit nachzuweisen, dass die 5-Term-Sequenz *natürlich* ist. Die Natürlichkeit betrifft sowohl die Modulvariable wie auch die Gruppenvariable, wobei im letzteren Fall die Verträglichkeit mit der Moduloperation gegeben sein muss. Die Schritte, die zum Beweis dieser für die Anwendungen wichtigen Eigenschaft führen, sind allesamt einfach und dürfen deshalb dem Leser überlassen werden.

Schliesslich merken wir an, dass sich der hier reproduzierte Beweis fast wörtlich auch im allgemeinen Fall durchführen lässt, wo an Stelle eines kG-Moduls ein $\mathbb{Z}G$-Moduls A tritt. Es ist dazu nur zu beachten, dass der Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, A)$ in diesem Fall sowohl über $\mathbb{Z}G$ wie auch über $\mathbb{Z}N$ relativ injektiv ist, so dass die entsprechenden Cohomologiegruppen in höheren Dimensionen trivial sind.

Literatur

[AS] M. Aschbacher, L. Scott: *Maximal subgroups of finite groups*, J. of Algebra **92** (1985), 44-80.

[Ba] R. Baer: *Classes of finite groups and their properties*, Ill. J. Math. 1 (1957), 115-187.

[B1] D. J. Benson: Modular Representation Theory: New Trends and Methods, Lecture Notes in Mathematics vol. 1081, Springer 1984.

[B2] D. J. Benson: Representations and Cohomology, I Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge studies in advanced mathematics 30, 1991.

[B3] D. J. Benson: Representations and Cohomology, II Cohomology of groups and modules, Cambridge studies in advanced mathematics 31, 1991.

[B4] D. J. Benson: *Cohomology of modules in the principal block of a finite group*, New York J. Math. 1 (1994/95), 196–205.

[BCR] D. J. Benson, J. F. Carlson, G. R. Robinson: *On the vanishing of group cohomology*, J. of Algebra **131** (1990), 40-73.

[BSS] D. W. Barnes, P. Schmid, U. Stammbach: *Cohomological characterisations of saturated formations and homomorphs of finite groups*, Comm. Math. Helv. **53** (1978), 165-173.

[C] J. F. Carlson: Modules and group algebras, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser 1996.

[C1] J. F. Carlson: `http://www.math.uga.edu/~lvalero/cohointro.html`

[D] Th. Diethelm: *On the cohomology of groups of p-length 1*, Comm. Math. Helv. **58** (1983), 379-387.

[DSt] Th. Diethelm, U. Stammbach: *On the module structure of the* mod p *cohomology of a p-group*, Arch. Math. **43**, (1984), 488-492.

[E] L. Evens: The cohomology of groups, Clarendon Press, 1991.

[F] W. Feit: The representation theory of finite groups, North-Holland, 1982.

[FG] P. Fong, W. Gaschütz: *A note on the modular representations of solvable groups*, J. Reine Angew. Math. **208** (1961), 73-78.

[G] W. Gaschütz: *Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen*, Math. Z. **58** (1953), 160-170.

[GaL] W. Gaschütz, U. Lubeseder: *Kennzeichnung gesättigter Formationen*, Math. Z. **82** (1963), 198-199.

[Gre] D. J. Green: *Gröbnerbasen und die Berechnung von Gruppencohomologie*, Habilitationsschrift, Bergische Universität Wuppertal, 2001; siehe auch `http://www.math.uni-wuppertal.de/~green/Coho/index_de.html`.

[Gru] K. W. Gruenberg: Relation modules of finite groups, CBMS, vol. 25, Amer. Math. Soc. 1974.

[HRZ] K. Hoechsmann, P. Roquette, H. Zassenhaus: *A cohomological characterization of finite nilpotent groups*, Arch. Math. 19 (1968), 224-244.

[HSt] P. J. Hilton, U. Stammbach: A course in homological algebra, Second Edition, GTM, Springer, 1997.

[H] B. Huppert: Endliche Gruppen, Grundlehren, Springer 1967.

[HB] N. Blackburn, B. Huppert: Finite groups II, Springer 1982.

[HW] B. Huppert, W. Willems: *Bemerkungen zur modularen Darstellungstheorie 2. Darstellungen von Normalteilern*, Arch. Math. **21** (1975), 486-496.

[IS] I. Isaacs, S. Smith: *A note on groups of p-length 1*, J. of Algebra **38** (1976), 531-535.

[JM] S. Jackowski, Z. Marciniak: *Group automorphisms inducing the identity map on cohomology*, J. of Pure and Appl. Algebra **44** (1987), 241-250.

[K] L. G. Kovács: *On the first cohomology of a finite group with coefficients in a simple module*, The Australian National University, Research Report 43, (1984).

[Ku] H. Kurzweil: Endliche Gruppen, Hochschultext, Springer 1977.

[L] P. Landrock: Finite group algebras and their modules, London Math. Soc. Lecture Note Series 84, Cambridge University Press, 1983.

[La1] J. Lafuente: *Chief factors of finite groups with order a multiple of p*, Comm. in Algebra **16** (1988), 1563-1580.

[La2] J. Lafuente: *On the second Loewy term of projectives of a group algebra*, Israel J. of Math. **67** (1989), 170-180.

[LaMa1] J. Lafuente, C. Martínez Pérez: *On the second Loewy Term of the principal indecomposable of a modular group algebra*, Osaka J. Math. **38** 2001, 27-35.

[LaMa2] J. Lafuente, C. Martínez Pérez: *Extensions of irreducible modules*, Comm. in Algebra (to appear).

[Li] P. A. Linnell: *Cohomology of finite soluble groups*, J. of Algebra **107** (1987), 53-62.

[LiSt1] P. A. Linnell, U. Stammbach: *The block structure and Ext of p-soluble groups*, J. of Algebra **108** (1987), 280-282.

[LiSt2] P. A. Linnell, U. Stammbach: *The cohomology of p-constrained groups*, J. of Pure and Appl. Algebra **49** (1987), 273-279.

[LiSt3] P. A. Linnell, U. Stammbach: *On the cohomology of p-constrained groups*, Proc. Symp. Pure Math. **47** (1987), 467-469.

[Ma1] C. Martínez Pérez: Extensiones de KG-módulos irreducibiles, Diss. Universidad de Zaragoza, 1999.

[Ma2] C. Martínez Pérez: *On a short exact sequence and extrensions of irreducible KG-modules*, J. Pure and Appl. Algebra **161** (2001), 193-203.

[Ma3] C. Martínez Pérez: *On p-chief factors and extensions of KG-modules*, Archiv Math. (to appear).

[Mi1] G. O. Michler: *Blocks and Centers of Group Algebras*, in: Lectures in Rings and Modules, Lecture Notes in Mathematics, **246**, Springer 1972.

[Mi2] G. O. Michler: *The kernel of a block of a group algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973), 47-49.

[P1] H. Pahlings: *Normal p-complements and irreducible characters*, Math. Z. **154** (1977), 243-246.

[P2] H. Pahlings: *Kerne und projektive Auflösungen*, Mitt. Math. Sem. Giessen **149** (1981), 107-113.

[Po] G. Poitou: Cohomologie Galoisienne des Modules Finis, Dunod Pars 1967.

[Sch1] P. Schmid: *Every saturated formation is a local formation*, J. of Algebra **51** (1978), 144-148.

[Sch2] P. Schmid: Cohomologische Methoden in der Gruppentheorie, Vorlesungen an der Universität Tübingen, ausg. von J. Scheller, 1976/77.

[Sco] L. Scott: *Matrices and cohomology*, Ann. of Math. **105** (1977), 473-492.

[Se] J.-P. Serre: Linear Representations of Finite Groups, Springer 1977.

[Sta1] U. Stammbach: *Cohomological characterizations of finite solvable and nilpotent groups*, J. Pure and Appl. Algebra, **11** (1977), 293-301.

[Sta2] U. Stammbach: *Cohomological characterisation of finite solvable and nilpotent groups*, in Topology and Algebra. Monographie No. 26 de L'Enseignement Mathématique, 1978, 237-242.

[Sta3] U. Stammbach: *Cohomological characterisations of classes of finite groups*, Pub. Mat. UAB **13** (1979), 89 - 106.

[Sta4] U. Stammbach: *On the principal indecomposables of a modular group algebra*, J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 69 - 84.

[Sw] R. G. Swan: *The nontriviality of the restriction map in the cohomology of groups*, Proc. Amer. Math Soc. 11 (1960), 885-887.

[W1] W. Willems: *On the projectives of a group algebra*, Math. Z. **171** (1980), 163-174.

[W2] W. Willems: *On p-chief factors of finite groups*, Comm. in Alg. **13** (1985), 2433-2447.

[W3] W. Willems: *On irreducible faithful modules and their cohomology*, Bull. London Math. Soc. **23** (1991), 75-77.