Homologische Algebra

U. Stammbach

Professor an der ETH-Zürich

Lichtung:
manche meinen
lechts und rinks
kann man nicht verwechsern
werch ein Illtum!

Ernst Jandle

Einleitung

Der vorliegende Text gehört zur Vorlesung *AK der homologischen Algebra* im SS 04. Diese Lehrveranstaltung setzte sich zum Ziel, auf möglichst direktem Weg in einige grundlegende Teile der homologischen Algebra einzuführen und die erworbenen Techniken dann exemplarisch in Situationen der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen anzuwenden. Diese Ziesetzung bedingte die Wahl eines Weges, der auf viele der sonst üblichen Bezüge der homologischen Algebra verzichtet. So konnte weder fundiert auf die im Hintergrund allgegenwärtige Kategorientheorie eingegangen werden, noch auf die – auch historisch interessanten – Bezüge zur algebraischen Topologie. Ferner war es notwendig, sich fast vollständig auf die Katgorie der Moduln über einer Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe G zu beschränken, wobei dieser Fall aber trotzdem immer ein Spezialfall einer allgemeineren Theorie bildete.

Wir haben die Anwendungen im Gebiete der modularen Darstellungstheorie jeweils an derjenigen Stelle in den Text eingebaut, wo es von der Entwicklung der Theorie her möglich wurde, sie zu behandeln. Weitere Anwendungen im gleichen Geiste sind in meinen Essener Vorlesungsnotizen *Cohomologie endlicher Gruppen und Darstellungstheorie*, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, 2002 zu finden; sie bilden in einem gewissen Sinn eine natürliche Fortsetzung des vorliegenden Textes. Einige Resultate aus diesem Bändchen wurden denn auch in der Vorlesung zusätzlich zum vorliegenden Text behandelt.

Zürich, Ende Juni 2004 Urs Stammbach

In der vorliegenden Version wurden eine Reihe von Druckfehlern korrigiert. Ich danke Rémi Janner, Jacopo Mandozzi und Philipp Markup für entsprechende Mitteilungen.

Zürich, März 2005 Urs Stammbach

Ein herzlicher Dank geht an Karin Baur für die Korrektur einer ganzen Anzahl weiterer Druckfehler.

Zürich, März 2009 Urs Stammbach

I. Moduln

I.1. Moduln

Es bezeichne Λ einen Ring mit 1.

Definition Ein *(links-)*Λ*-Modul* ist eine abelsche Gruppe A zusammen mit einer Operation von Λ auf $A, (\lambda, a) \to \lambda a$ mit

(i) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

(ii) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

(iii) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$

(iv) $1a = a$

Beispiele

(a) $\Lambda = K$ ein Körper. Ein Λ-Modul ist ein K-Vektorraum.

(b) $\Lambda = \mathbb{Z},\ A$ eine abelsche Gruppe. Setze $na = a + a + \cdots + a, n$-fach. Dann ist A ein $\mathbb{Z}$-Modul.

(c) Mit A, B ist auch $A \oplus B$ ein Λ-Modul.

Definition Ein Λ-*Modulhomomorphismus* $\phi : A \to B$ ist ein Homomorphismus von abelschen Gruppen mit $\phi(\lambda a) = \lambda(\phi(a))$.

Ist $\phi : A \to B$ ein Λ-Modulhomomorphismus, so ist $\ker \phi$ ein Λ-Untermodul von A und $\operatorname{im} \phi$ ein Untermoduln von B.

Definition $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$ heisst *exakt* (in B), wenn $\ker \psi = \operatorname{im} \phi$.

Beispiele

(a) $0 \to A \xrightarrow{\phi} B$ ist genau dann exakt, wenn ϕ injektiv ist.

(b) $B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ ist genau dann exakt, wenn ψ surjektiv ist.

(c) $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn ϕ ein Isomorphismus ist.

(d) Ist $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ in A, B und C exakt, so sprechen wir von einer *kurzen exakten Folge*. Dies bedeutet, dass ϕ injektiv und ψ surjektiv ist und ψ einen Isomorphismus $C \simeq B/\operatorname{im} \phi$ induziert.

Satz 1.1 *Es sei* $0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ *eine kurze exakte Folge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert ein* Λ*-Modulhomomorphismus* $\sigma : C \to B$ *mit* $\varepsilon \circ \sigma = 1_C$*.*

(ii) *Es existiert ein* Λ*-Modulhomomorphismus* $\tau : B \to A$ *mit* $\tau \circ \mu = 1_A$*.*

(iii) *Es existiert ein* Λ*-Modulisomorphismus* $\beta : B \to A \oplus C$*, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow \beta & & \| & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\iota_A} & A \oplus C & \xrightarrow{\pi_C} & C & \to & 0 \end{array}$$

In diesem Fall, sagt man auch etwa, die kurze exakte Folge *zerfalle.*

Beweis Es ist klar, dass aus (iii) sowohl (i) wie auch (ii) folgt. Wir beweisen, dass aus (i) die Aussage (iii) folgt. Dazu analog wird der Beweis der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) geführt; diesen Teil überlassen wir dem Leser. Wir behaupten $B \cong \ker \varepsilon \oplus \operatorname{im} \sigma$; die Abbildung β ist dann dieser Isomorphismus. In der Tat gilt $\ker \varepsilon \cap \operatorname{im} \sigma = \{0\}$. Um $B \simeq \ker \varepsilon + \operatorname{im} \sigma$ zu zeigen, betrachten wir $b' = b - \sigma\varepsilon b$. Dann ist $\varepsilon b' = \varepsilon b - \varepsilon\sigma\varepsilon b = \varepsilon b - \varepsilon b = 0$, das heisst $b' \in \ker \varepsilon$. Aber $\sigma\varepsilon b \in \operatorname{im} \sigma$, so dass $b = \sigma\varepsilon b + b'$ die verlangte Aufspaltung ist.

I.2. Die Gruppe der Homomorphismen

Es seien A, B Λ-Moduln. Die Menge der Λ-Modulhomomorphismen $\phi : A \to B$ bildet unter $(\phi + \psi)\ a = \phi a + \psi a$ eine abelsche Gruppe. Diese bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ und nennen sie die *Gruppe der Homomorphismen* von A nach B.

Für $\beta : B \to B'$ erhalten wir einen "induzierten" Homomorphismus

$$\beta_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \beta) : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B')$$

nämlich

$$\beta_*(\phi) = \beta \circ \phi.$$

Für $\alpha : A' \to A$ erhalten wir einen "induzierten" Homomorphismus

$$\alpha^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha, B) : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B)$$

nämlich

$$\alpha^*(\phi) = \phi \circ \alpha.$$

Neben der Tatsache, dass sowohl β_* wie α^* Homomorphismen von abelschen Gruppen sind, gilt auch

$$(\alpha + \alpha')^* = \alpha^* + \alpha'^*,\ (\beta + \beta')_* = \beta_* + \beta'_*.$$

Satz 2.1 *Es sei* $0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von* Λ*-Moduln und* A *ein weiterer* Λ*-Modul. Dann ist die induzierte Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B'')$$

exakt.

Satz 2.2 *Es sei* $0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von* Λ*-Moduln, und* B *ein weiterer* Λ*-Modul. Dann ist die induzierte Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B)$$

exakt.

Beweis Übungsaufgabe.

Bemerkung: Die Aussagen in diesen beiden Sätzen können im allgemeinen nicht durch Anfügen einer Null am rechten Ende verschärft werden. So ist zum Beispiel für $\Lambda = \mathbb{Z}$, die exakte Folge $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ und $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in der induzierten Folge

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{n_*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

die Abbildung π_* *nicht* surjektiv.

Um im Folgenden die Notation in exakten Folgen etwas zu erleichtern, werden wir oft *injektive* Abbildungen durch $\rightarrowtail$ bezeichnen und *surjektive* Abbildungen durch $\twoheadrightarrow$. Statt der kurzen exakten Folge

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

schreiben wir also manchmal

$$A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A'' \ .$$

Für festes A wird durch $B \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ jedem Modul eine abelsche Gruppe zugeordnet und durch $\beta \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(A, \beta)$ jedem Λ-Modulhomomorphismus ein Homomorphismus von abelschen Gruppen. Dabei gelten offensichtlich die Regeln

(i) $(\beta' \circ \beta)_* = (\beta')_* \circ (\beta)_*$,

(ii) $(1_B)_* = 1_{\operatorname{Hom}_\Lambda(A,B)}$.

Zuordnung treten in der Mathematik und insbesondere in der Homologischen Algebra häufig auf. Man spricht von einem (kovarianten) *Funktor* von der *Kategorie der Λ-Moduln* in die *Kategorie der abelschen Gruppen.*

Die oben ebenfalls studierte Zuordnung, wo B festgehalten wird, also $A \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$, zusammen mit der zugehörigen Zuordnung auf den Λ-Modulhomomorphismen, definiert einen *kontravarianten* Funktor von der Kategorie der Λ-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen. Der Unterschied zwischen kovariant und kontravariant besteht einzig in der ersten der beiden oben aufgeführten Regeln: es muss auf die Reihenfolge der Zusammensetzung der Abbildungen geachtet werden.

I.3. Freie Moduln, projektive Moduln

Definition Es sei S eine Menge. Der *freie* Λ*-Modul* $F = F(S)$ auf der Menge S besteht aus den formalen endlichen Λ-Linearkombinationen von Elementen aus S,

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s, \;\; \lambda_s \in \Lambda \text{ , nur endlich viele } \lambda_s \neq 0.$$

Beispiele

(a) $\Lambda = k$ ein Körper. Jeder k-Modul (k-Vektorraum) ist frei.

(b) $\Lambda = \mathbb{Z}$. Es gibt $\mathbb{Z}$-Moduln, die nicht frei sind.

Satz 3.1 *Es sei $F = F(S)$ der freie Λ-Modul auf der Menge S. Es sei A ein beliebiger Λ-Modul und $\{a_s\}$, $s \in S$ eine Familie von Elementen von A. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Λ-Modulhomomorphismus $\phi : F(S) \to A$ mit $\phi(s) = a_s$ für alle $s \in S$.*

Beweis Man definiere $\phi : F \to A$ durch die Festsetzung

$$\phi\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) = \sum_{S \in S} \lambda_s a_s .$$

Dann ist ϕ offensichtlich ein Λ-Modulhomomorphismus und ebenso offensichtlich der einzige mit der Eigenschaft $\phi(s) = a_s$ für alle $s \in S$.

Satz 3.2 *Es sei F ein freier Λ-Modul und $0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Λ-Moduln. Dann ist*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B'') \to 0$$

exakt.

Beweis Es ist zu zeigen, dass ε_* surjektiv ist. Zu $\psi : F \to B''$ ist $\phi : F \to B$ zu konstruieren mit $\varepsilon_*(\phi) = \varepsilon \circ \phi = \psi$. Zu diesem Zweck betrachte man $\psi(s) \in B''$ und wähle $b_s \in B$ mit $\varepsilon(b_s) = \psi(s)$. Definiere ϕ durch $\phi\ (s) = b_s$. Dann gilt $\varepsilon\left(\phi(s)\right) = \varepsilon(b_s) = \psi(s)$ und damit wegen der Eindeutigkeit(!) $\varepsilon \circ \phi = \psi$.

Definition Ein Λ-Modul P heisst *projektiv*, wenn für alle kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \to 0$$

von Λ-Moduln die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, B'') \to 0$$

exakt ist.

Korollar 3.3 *Ein freier Modul F ist projektiv.*

Satz 3.4 *Ein Λ-Modul P ist genau dann projektiv, wenn für jeden surjektiven Λ-Modulhomomorphismus $\varepsilon : B \to B''$ und jedem Λ-Modulhomomorphismus $\psi : P \to B''$ ein Λ-Modulhomomorphismus $\phi : P \to B$ existiert mit $\varepsilon \circ \phi = \psi$.*

Man sagt in diesem Fall, "es existiere eine Hochhebung".

Korollar 3.5 *Es sei P projektiv. Dann ist P isomorph zu einem direkten Summanden in jedem Modul A, dessen Quotient P ist.*

Beweis Wähle $\psi = 1_P : P \to P$, $\varepsilon : A \to P$. Da P projektiv ist, existiert $\phi : P \to A$ mit $\varepsilon \circ \phi = 1_P$. Dann folgt $A = \ker \varepsilon \oplus \operatorname{im} \phi$; ausserdem ist ϕ injektiv, also $P \simeq \operatorname{im} \phi$.

Korollar 3.6 *Es sei P projektiv. Dann ist P isomorph zu einem direkten Summanden in einem freien Modul.*

Beweis Wähle $\varepsilon : F \to P$ surjektiv mit F frei.

Die Umkehrung der Aussage des Korollars 3.6 gilt ebenfalls. Ist P ein direkter Summand in einem freien Modul, so ist P projektiv. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass Hom *additiv* ist. Darunter versteht man, dass die Bildung von $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ in beiden Variablen mit direkten Summen verträglich. Es gilt also $\operatorname{Hom}_\Lambda(A_1 \oplus A_2, B) = \operatorname{Hom}_\Lambda(A_1, B) \oplus \operatorname{Hom}_\Lambda(A_2, B)$, wie auch die analoge Aussage für die Variable B. Den Beweis für diese einfache, aber wichtige Tatsache überlassen wir dem Leser. Man vergleiche dazu auch die Ausführungen in Abschnitt II.4.

Bemerkung Es sei $0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \to 0$ eine kurze exakte Folge mit der Eigenschaft, dass für alle Moduln A die induzierte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B'') \to 0$$

exakt ist. Dann zerfällt die Sequenz $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$.

Beweis Übungsaufgabe.

Die Definition des Begriffes projektiv, lässt sich – wie man sagt – *dualisieren*. Man definiert

Definition Ein Λ-Modul I heisst *injektiv*, wenn für alle kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \to 0$$

von Λ-Moduln die induzierte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A'', I) \xrightarrow{\varepsilon^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(A, I) \xrightarrow{\mu^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(A', I) \to 0$$

exakt ist.

Natürlich lassen sich im Anschluss an diese Definition über injektive Moduln Aussagen machen, die "dual" sind zu den obigen Aussagen über projektive Moduln. Wir verzichten in diesem Text auf eine breitere Darstellung, weil dies für unsere späteren Zwecke nicht notwendig ist, wollten den Begriff *injektiver Modul* aber der Vollständigkeit halber doch erwähnen.

I.4. Die ker-coker-Sequenz

Es sei $\phi : A \to B$ ein Λ-Modulhomomorphismus. Wir definieren den Cokern von ϕ durch coker $\phi = B/\mathrm{im}\ \phi$. Dann ist offenbar die Folge

$$0 \to \ker\phi \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}\ \phi \to 0$$

exakt. Dabei ist ι die Einbettung und π die natürliche Projektion.

Satz 4.1 *Gegeben sei das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xrightarrow{\alpha''} & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \\ 0 & \to & B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta''} & B'' & & \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Dann existiert ein Homomorphismus $\sigma : \ker\phi'' \to \mathrm{coker}\ \phi'$*, so dass die induzierte Folge*

$$\ker\phi' \xrightarrow{\alpha'_*} \ker\phi \xrightarrow{\alpha''_*} \ker\phi'' \xrightarrow{\sigma} \mathrm{coker}\ \phi' \xrightarrow{\beta'_*} \mathrm{coker}\ \phi \xrightarrow{\beta''_*} \mathrm{coker}\ \phi''$$

exakt ist. Ist α' *injektiv, so ist auch* α'_* *injektiv; ist* β'' *surjektiv, so ist auch* β''_* *surjektiv.*

Beweis Wir definieren zuerst den Homomorphismus σ Es sei $a'' \in \ker\phi''$. Wähle $a \in A$ mit $\alpha''(a) = a''$. Dann gilt $\beta''\phi(a) = \phi''\alpha''(a) = \phi''(a'') = 0$. Damit ist $\phi(a) \in \ker\beta'' = \mathrm{im}\ \beta'$. Es existiert somit $b' \in B'$ mit $\beta'(b') = \phi(a)$. Man definiere $\sigma(a'') = [b']$, wobei wir mit eckigen Klammern die entsprechende Restklasse bezeichnen.

Die Unabhängigkeit von der Wahl von a ist nicht schwer einzusehen: Ist $\bar{a} \in A$ ein weiteres Element mit $\alpha''(a) = \alpha''(\bar{a})$, so gilt $(a - \bar{a}) \in \ker\alpha''$, d.h. es existiert $a' \in A'$ mit $\alpha'(a') = a - \bar{a}$. Ist nun $\beta'(\bar{b'}) = \phi(\bar{a})$ und $\beta'(b') = \phi(a)$, so folgt $\beta'\phi'(a') = \phi\alpha'(a') = \phi(a - \bar{a}) = \phi(a) - \phi(\bar{a}) = \beta'(b') - \beta'(\bar{b'}) = \beta'(b' - \bar{b'})$. Da β' injektiv ist, folgt $\phi'(a') = b' - \bar{b'}$, d.h. $[b'] = [\bar{b'}]$.

Es ist nun an jeder Stelle die Exaktheit zu prüfen. Wir zeigen dies an der Stelle $\ker\phi''$ und überlassen den Rest als Übungsaufgabe dem Leser.

Es sei zuerst $a'' \in \ker\phi''$ und auch $a'' \in \mathrm{im}\ \alpha''_*$. Die Definition von σ liefert dann sofort $\sigma(a'') = 0$. Damit gilt $\mathrm{im}\ \alpha''_* \subseteq \ker\sigma$. – Wir behaupten nun $\ker\sigma \subseteq \mathrm{im}\ \alpha''_*$. Es sei also $a'' \in \ker\phi''$ und $a'' \in \ker\sigma$. Gemäss Definition von σ wählen wir $a \in A$ mit $\alpha''(a) = a''$ und $b' \in B'$ mit $\phi(a) = \beta'(b')$. Wegen $\sigma(a'') = 0$ muss dann $a' \in A'$ existieren mit $\phi'(a') = b'$. Es folgt $\phi\alpha'(a') = \beta'\phi'(a') = \beta'(b') = \phi(a)$. Man setze nun $\bar{a} = a - \alpha'(a')$. Dann folgt $\alpha''(\bar{a}) = a''$ und $\phi(\bar{a}) = \phi(a) - \phi\alpha'(a') = \phi(a) - \phi(a) = 0$. Damit ist nach Definition von σ auch $\sigma(a'') = 0$. Dies war zu beweisen.

Das folgende nützliche Korollar, das sogenannte 5-er Lemma folgt direkt aus der ker-coker-Sequenz.

Korollar 4.2 *Gegeben sei das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xrightarrow{\alpha''} & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \\ 0 & \to & B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta''} & B'' & \to & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Sind zwei der Homomorphismen ϕ', ϕ, ϕ'' Isomorphismen, so ist auch der dritte ein Isomorphismus.

Bei den Anwendungen der ker-coker-Sequenz wird wichtig sein, dass sie *natürlich* ist. Darunter versteht man das Folgende. Ist eine Abbildung des einen Diagrammes in ein zweites gegeben, *so dass sämtliche vorkommenden Quadrate kommutativ sind*, so wird eine Abbildung der ker-coker-Sequenz des ersten Diagrammes in die ker-coker-Sequenz des zweiten Diagrammes induziert, *so dass sämtliche vorkommenden Quadrate kommutativ sind.* .

II. Kettenkomplexe

II.1. Kettenkomplexe, Homologie

Es sei Λ ein Ring mit Einselement. Mit A, B, $C, \ldots$ bezeichnen wir Λ-Moduln.

Definition Ein *Kettenkomplex* $\mathbf{C}$ von Λ-Moduln besteht aus einer Familie $\{C_n\}$, $-\infty < n < \infty$ von Λ-Moduln und einer Familie von Λ-Modulhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ für alle n:

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \to \cdots$$

Die Familie der Homomorphismen ∂_n heisst *Differential* oder *Rand*.

Gegeben seien zwei Kettenkomplexe von Λ-Moduln $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}$ und $\mathbf{D} = \{D_n, \partial'_n\}$. Eine *Kettenabbildung* (ein Homomorphismus von Kettenkomplexen) $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ist eine Familie von Λ-Modulhomomorphismen $\phi_n : C_n \to D_n$ mit $\phi_{n-1}\partial_n = \partial'_n\phi_n$ für alle n. Letzteres bedeutet, dass alle vorkommenden Quadrate

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

kommutativ sind.

Wir bezeichnen mit $Z_n = \ker(\partial_n : C_n \to C_{n-1}) \subseteq C_n$ den Untermodul der *Zyklen* und mit $B_n = \operatorname{im}(\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n) \subseteq C_n$ den Untermodul der *Ränder*. Wegen $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ gilt $B_n \subseteq Z_n$.

Der n-te *Homologiemodul* von $\mathbf{C}$ (oft auch einfach n-te Homologie*gruppe* von $\mathbf{C}$ genannt) ist definiert durch

$$H_n(\mathbf{C}) = Z_n/B_n \ .$$

Es wird also an jeder Stelle des Komplexes der Quotient "Zyklen modulo Ränder" gebildet. Ist z ein Zyklus, so wird das zugehörige Element der Homologie oft mit $[z]$ bezeichnet und $[z]$ heisst dann auch etwa die *Homologieklasse* von z. In der Folge werden wir für die Homologie $\{H_n(\mathbf{C})\}$ des Kettenkomplexes $\mathbf{C}$) oft die kompakte Schreibweise $H(\mathbf{C})$ benützen.

Beispiel Die hier eingeführten Begriffe stammen aus der algebraischen Topologie. Das nachfolgende Beispiel illustriert diesen Zusammenhang. Wir betrachten das aus den Ecken 0,1,2,3, den zugehörigen Kanten und den zugehörigen Seitenflächen gebildete Tetraeder. (Topologisch betrachten wir also ein Modell der 2-Sphäre.) In der algebraischen Topologie ordnet man diesem Objekt einen Kettenkomplex $\mathbf{C}$ zu. Es ist C_0 die freie abelsche Gruppe mit Basis x_0, x_1, x_2, x_3, C_1 die freie abelsche Gruppe mit Basis $x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$ und C_2 die freie abelsche Gruppe mit Basis $x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3$. Für $n \neq 0, 1, 2$ sei $C_n = 0$. Das Differential ist auf den Basiselementen wie folgt gegeben:

$$\partial_1(x_i x_j) = x_j - x_i \text{ für } i < j,$$

$$\partial_2(x_i x_j x_k) = x_j x_k - x_i x_k + x_i x_j \text{ für } i < j < k.$$

Dieses Differential ordnet also einem ein- bzw. zwei-dimensionalen "Simplex" den (orientierten) Rand zu. Man verifiziert leicht $\partial_1\partial_2 = 0$, es gilt nämlich, $i < j < k$,

$$\partial_1\partial_2(x_i x_j x_k) = \partial_1(x_j x_k - x_i x_k + x_i x_j) = (x_k - x_j) - (x_k - x_i) + (x_j - x_i) = 0 \ .$$

Für die Homologie des so definierten Kettenkomplexes ergibt sich

$$H_0(\mathbf{C}) = \mathbb{Z} \ , \quad H_1(\mathbf{C}) = 0 \ , \quad H_2(\mathbf{C}) = \mathbb{Z} \ .$$

Man erkennt die Homologie einer 2-Sphäre!

Die n-te Homologie $H_n(\mathbf{C})$ eines Kettenkomplexes $\mathbf{C}$ ist genau dann Null, wenn gilt $Z_n = \ker \partial_n = \operatorname{im} \partial_{n+1} = B_n$, d.h. wenn die Folge

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots$$

an der Stelle C_n exakt ist. So gesehen misst die Homologie eines Kettenkomplexes die Abweichung von der Exaktheit. Ein Kettenkomplex $\mathbf{C}$ mit $H_n(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$ für alle n heisst auch etwa *azyklisch.*

Wir werden uns später auch mit *Co*kettenkomplexen beschäftigen müssen. Ein Cokettenkomplex ist analog definiert wie ein Kettenkomplex mit dem einzigen Unterschied, dass das Differential ∂_n nicht von C_n nach C_{n-1} führt, sondern von C_n nach C_{n+1}. Man spricht dann konsequenterweise von *Co*zyklen, von *Co*rändern und von der *Co*homologie. In der Notation unterscheidet man Cokettenkomplexe von Kettenkomplexe gewöhnlich dadurch, dass man *obere* Indizes statt *untere* verwendet.

Zurück zu Kettenkomplexen. Wir betrachten eine Kettenabbildung $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Die Kommutativität des Quadrates

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

liefert $\phi(Z_n) \subseteq Z'_n$ und $\phi(B_n) \subseteq B'_n$. Damit induziert Φ für jedes n eine wohlbestimmte Abbildung $(\phi_n)_* : H_n(\mathbf{C}) \to H_n(\mathbf{D})$. Wir fassen dieses Resultat im folgenden Satz zusammen, wobei wir einen offensichtlichen Zusatz mitausdrücken:

Satz 1.1 *Die Kettenabbildung $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ induziert einen wohlbestimmten Homomorphismus $\Phi_* : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{D})$. Der Zusammensetzung von zwei Kettenabbildungen entspricht die Zusammensetzung der induzierten Abbildungen in der Homologie. Ist Φ die Identität, so ist auch die induzierte Abbildung in der Homologie die Identität.*

Wenn man die Sprache der Kategorien und Funktoren heranzieht, so drückt sich der Sachverhalt wie folgt aus:

Die Homologie $H_n(-)$ ist ein (kovarianter) Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe von Λ-Moduln (und der zugehörigen Kettenabbildungen) in die Kategorie der Λ-Moduln (und der Λ-Modulhomomorphismen).

Im Rest dieses Abschnittes beschäftigen wir uns mit der Frage, wann zwei Kettenabbildungen $\Phi, \Psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ in der Homologie den gleichen Homomorphismus $\Phi_* = \Psi_* : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{D})$ induzieren. Dabei müssen wir uns mit einer Teilantwort begnügen, indem wir nur *hinreichende*, aber nicht *notwendige* Bedingungen angeben. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Homotopie zwischen zwei Kettenabbildungen ein.

Eine *Homotopie* χ von der Kettenabbildung Φ zur Kettenabbildung Ψ ist eine Familie von Homomorphismen $\chi_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$\psi_n - \phi_n = \partial'_{n+1}\chi_n + \chi_{n-1}\partial_n$$

für alle n.

Die Kettenabbildungen Φ und Ψ heissen *homotop*, $\Phi \simeq \Psi$, wenn eine Homotopie χ von Φ nach Ψ existiert. Offenbar definiert dies in der Menge der Kettenabbildungen von $\mathbf{C}$ nach $\mathbf{D}$ eine Äquivalenzrelation. Es gilt nun der Satz:

Satz 1.2 *Es seien $\Phi, \Psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zwei Kettenabbildungen mit $\Phi \simeq \Psi$. Dann folgt $\Phi_* = \Psi_* : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{D})$.*

Beweis Es sei n beliebig aber fest. In der Notation unterdrücken wir deshalb die Angabe von n. Wir betrachten $z \in Z(\mathbf{C})$ mit zugehöriger Homologieklasse $[z]$. Dann gilt $\phi_*[z] = [\phi(z)]$. Damit folgt $(\phi_* - \psi_*)[z] = [(\phi - \psi)(z)]$. Aber wegen $\phi - \psi = \partial'\chi + \chi\partial$ und da z ein Zyklus ist, ergibt sich $(\phi - \psi)(z) = \partial'\chi(z)$. Es ist also $(\phi - \psi)(z)$ ein Rand und damit $(\phi_* - \psi_*)[z] = 0$. Dies war zu beweisen.

Ist die Kettenabbildung Φ zur Nullabbildung homotop, so heisst Φ *nullhomotop*. Die induzierte Abbildung Φ_* in der Homologie ist dann offensichtlich die Nullabbildung. Ist die Identität des Kettenkomplexes $\mathbf{C}$ kraft der Homotopie χ nullhomotop, so heisst χ auch etwa eine *zusammenziehende Homotopie*. In diesem Fall ist die Homologie des Kettenkomplexes trivial, $H(\mathbf{C}) = 0$.

Wir bemerken schliesslich noch, dass Homotopien mit der Zusammensetzung von Kettenabbildungen verträglich sind. Sind nämlich Kettenabbildungen $\Phi \simeq \Psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und $\Phi' \simeq \Psi' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ gegeben, so folgt $(\Phi'\Phi) \simeq (\Psi'\Psi)$. Den Beweis dieser Tatsache überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Dieses einfache Resultat ermöglicht es prinzipiell, von der Kategorie der Kettenkomplexe und der Kettenabbildungen zur Kategorie der Kettenkomplexe und der *Homotopieklassen* von Kettenabbildungen überzugehen. Man nennt diese Kategorie oft die *Homotopiekategorie* der Kettenkomplexe. Gemäss unserem Satz über die Homotopie "faktorisiert" der Funktor der Homologie über die Homotopiekategorie. Dieses Resultat spielt in der algebraischen Topologie eine grundlegende Rolle.

Zwei Kettenkomplexe $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ heissen *homotopieäquivalent*, wenn es Kettenabbildungen $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und $\Psi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ gibt, so dass die Zusammensetzung $\Psi\Phi$ homotop zur Identität von $\mathbf{C}$ ist und die Zusammensetzung $\Phi\Psi$ homotop zur Identität von $\mathbf{D}$. In der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe übernimmt der Begriff der Homotopieäquivalenz die Rolle des (gewöhnlichen) Isomorphiebegriffes. (Ganz allgemein wird in der Kategorientheorie der Begriff "isomorph" in analoger Weise definiert.) Die Klasse der zum Kettenkomplex $\mathbf{C}$ homotopieäquivalenten Kettenkomplexe heisst die *Homotopieklasse* von $\mathbf{C}$. Aus der Funktoreigenschaft der Homologie und dem Satz 1.2 folgt nun sofort, dass die Homologie eines Kettenkomplexes nur von seiner Homotopieklasse abhängig ist.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einem Beispiel, das zeigt, dass zwei verschiedene Kettenabbildungen die gleiche Abbildung in der Homologie induzieren können, obschon sie *nicht homotop* sind.

Wir definieren zwei Kettenkomplexe $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ von abelschen Gruppen wie folgt:

Der Kettenkomplex $\mathbf{C}$ ist definiert durch $C_1 = \mathbb{Z} = (a)$, $C_0 = \mathbb{Z} = (b)$ und $C_n = 0$ für $n \neq 0, 1$. Das Differential $\partial_1 : C_1 \to C_0$ ist gegeben durch $\partial_1(a) = 2b$. Der Kettenkomplex $\mathbf{D}$ ist definiert durch $D_1 = \mathbb{Z} = (a')$ und $D_n = 0$ für $n \neq 1$.

Es folgt $H_0(\mathbf{C}) = \mathbb{Z}_2$ und $H_n(\mathbf{C}) = 0$ für $n \neq 0$. Ferner $H_1(\mathbf{D}) = \mathbb{Z}$ und $H_n(\mathbf{D}) = 0$ für $n \neq 1$.

Es sei nun die Kettenabbildung $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ gegeben durch $\phi_1(a) = a'$ und Ψ sei die Nullabbildung. Die induzierte Abbildung in der Homologie ist in beiden Fällen die Nullabbildung, $\Phi_* = \Psi_* = 0$.

Aber Φ und Ψ sind *nicht* homotop. In einer Homotopie χ müsste nämlich $\chi_0 : C_0 \to D_1$ (die einzige nichttriviale Abbildung) die Gleichung $\phi_1 = \phi_1 - \psi_1 = \partial_2'\chi_1 + \chi_0\partial_1 = \chi_0\partial_1$ befriedigen. Ist nun $\chi_0(b) = ma'$, so würde folgen $a' = \phi_1(a) = \chi_0(2b) = 2ma'$, was für kein (ganzzahliges) m möglich ist.

II.2. Die lange exakte Homologiesequenz.

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass zu einer kurz exakten Sequenz von Kettenkomplexen eine *lange exakte Homologiesequenz* gehört.

Satz 2.1 *Es sei* $0 \to \mathbf{C}' \stackrel{\mu}{\to} \mathbf{C} \stackrel{\varepsilon}{\to} \mathbf{C}'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen (d.h.* $0 \to C'_n \stackrel{\mu_n}{\to} C_n \stackrel{\varepsilon_n}{\to} C''_n \to 0$ *ist kurz exakt für alle* n*). Dann existieren verbindende Homomorphismen* $\omega_n : H_n(\mathbf{C}'') \to H_{n-1}(\mathbf{C}')$*, so dass die Sequenz*

$$\cdots \to H_{n+1}(\mathbf{C}'') \stackrel{\omega_{n+1}}{\to} H_n(\mathbf{C}') \stackrel{(\mu_n)_*}{\to} H_n(\mathbf{C}) \stackrel{(\epsilon_n)_*}{\to} H_n(\mathbf{C}'') \stackrel{\omega_n}{\to} H_{n-1}(\mathbf{C}') \stackrel{(\mu_{n-1})_*}{\to} H_{n-1}(\mathbf{C}) \to \cdots$$

exakt ist.

Beweis Wir betrachten zuerst das folgende Diagramm mit exakten Kolonnen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Z'_n & \to & Z_n & \to & Z''_n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C'_n & \stackrel{\mu_n}{\to} & C_n & \stackrel{\varepsilon_n}{\to} & C''_n & \to & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n & & \\
0 & \to & C'_{n-1} & \stackrel{\mu_{n-1}}{\to} & C_{n-1} & \stackrel{\varepsilon_{n-1}}{\to} & C''_{n-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C'_{n-1}/B'_{n-1} & \to & C_{n-1}/B_{n-1} & \to & C''_{n-1}/B''_{n-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Wir entnehmen daraus mit Hilfe der ker-coker-Sequenz (siehe I.4.1), dass für alle n die Folgen

$$0 \to Z'_n \to Z_n \to Z''_n$$

und

$$C'_n/B'_n \to C_n/B_n \to C''_n/B''_n \to 0$$

exakt sind.

Diese Informationen benützen wir Aufbau des folgenden Diagramms mit exakten Zeilen und

Kolonnen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Z'_n/B'_n & \to & Z_n/B_n & \to & Z''_n/B''_n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C'_n/B'_n & \to & C_n/B_n & \to & C''_n/B''_n & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z'_{n-1} & \to & Z_{n-1} & \to & Z''_{n-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H'_{n-1} & \to & H_{n-1} & \to & H''_{n-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Daraus lässt sich die Aussage des Satzes direkt mit Hilfe der ker-coker-Sequenz ablesen.

Wir geben hier der Vollständigkeit halber die explizite Definition des verbindenden Homomorphismus $\omega_n : H_n(\mathbf{C}'') \to H_{n-1}(\mathbf{C}')$ noch an. Es sei die Homologieklasse $[z''_n] \in H_n(\mathbf{C}'')$ gegeben. Wähle $c_n \in C_n$ mit $\varepsilon_n(c_n) = z''_n$. Betrachte $\partial_n(c_n) \in B_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$. Wegen $\varepsilon_{n-1}\partial_n(c_n) = \partial''_n\varepsilon_n(c_n) = \partial''_n(z''_n) = 0$ existiert $z'_{n-1} \in Z'_{n-1}$ mit $\mu_{n-1}(z'_{n-1}) = \partial_n(c_n)$. Der Homomorphismus ω_n ist dann definiert durch $\omega_n([z''_n]) = [z'_{n-1}]$.

Es ist wichtig festzustellen, dass die lange exakte Homologiesequenz *natürlich* ist: ein Homomorphismus der kurzen exakten Folge $\mathbf{C}' \rightarrowtail \mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{C}''$ von Kettenkomplexe in eine zweite $\mathbf{D}' \rightarrowtail \mathbf{D} \twoheadrightarrow \mathbf{D}''$, (so dass alle auftretenden Quadrate kommutativ sind,) induziert eine Abbildung der langen exakten Homologiesequenz zu $\mathbf{C}' \rightarrowtail \mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{C}''$ in diejenige zu $\mathbf{D}' \rightarrowtail \mathbf{D} \twoheadrightarrow \mathbf{D}''$, (so dass alle entstehenden Quadrate kommutativ sind).

II.3. Projektive Auflösungen

Es sei A ein Λ-Modul. Wir nennen einen Kettenkomplex

$$\mathbf{P} : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

eine *projektive Auflösung* (*projektive Resolution*) von A über Λ, wenn P_i, $i \geq 0$ projektive Λ-Moduln sind und wenn die Homologie von $\mathbf{P}$ durch

$$H_i(\mathbf{P}) = \begin{cases} A & \text{für } i = 0 \ , \\ 0 & \text{für } i > 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

Ist $\mathbf{P}$ eine projektive Auflösung des Moduls A, so ist der (augmentierte) Kettenkomplex

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

exakt.

Satz 3.1 *Gegeben sei der Λ-Modul A. Dann existieren projektive Auflösungen von A über Λ.*

Beweis Wir wissen, dass zu A ein projektiver Modul P_0 existiert, der sich auf A abbilden lässt. Sei K_0 der Kern dieser Abbildung. Dann wähle man einen projektiven Λ-Modul P_1, der sich (mit Kern K_1) auf K_0 abbilden lässt. Die Sequenz $0 \to K_1 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ ist dann exakt. Auf diese Weise fahre man schrittweise weiter.

Satz 3.2 *Es seien* $\mathbf{P}$ *eine projektive Auflösung von* A *und* $\mathbf{P}'$ *eine projektive Auflösung von* A' *und* $\phi : A \to A'$ *sei ein Homomorphismus. Dann existiert eine Kettenabbildung* $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$, *welche* $\phi : A \to A'$ *"hochhebt".*

Beweis Wir beweisen diese Aussage mit Induktion. Da P_0 ein projektiver Modul ist, existiert zur Abbildung $P_0 \to A \to A'$ eine "Hochhebung" $\phi_0 : P_0 \to P'_0$, so dass das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \twoheadrightarrow & A \\ \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi \\ P'_0 & \twoheadrightarrow & A' \end{array}$$

kommutativ ist.

Ist $\phi_n : P_n \to P'_n$ konstruiert, so induziert dieses eine Abbildung $(\phi_n)_* : K_n \to K'_n$. Wie oben können wir dann die Projektivität von P_{n+1} benützen, um $\phi_{n+1} : P_{n+1} \to P'_{n+1}$ zu definieren, so dass das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & \twoheadrightarrow & K_n \\ \downarrow \phi_{n+1} & & \downarrow (\phi_n)_* \\ P'_{n+1} & \twoheadrightarrow & K'_n \end{array}$$

kommutativ ist. Diese schrittweise Definition liefert die gewünschte Kettenabbildung.

Satz 3.3 *Es seien $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Psi}$ zwei Hochhebungen von $\phi : A \to A'$. Dann existiert eine Homotopie $\chi : \mathbf{\Phi} \simeq \mathbf{\Psi}$.*

Beweis Wir bezeichnen das Differential im Kettenkomplex $\mathbf{P}$ mit ∂_n, dasjenige in $\mathbf{P}'$ mit ∂'_n. Es sind dann Abbildungen $\chi_n : P_n \to P'_{n+1}$, $n \geq 0$ zu definieren mit $\psi_n - \phi_n = \partial'_{n+1}\chi_n + \chi_{n-1}\partial_n$ (dabei ist χ_{-1} Null zu setzen).

Ähnlich wie oben geschieht dies mit Induktion nach n. Für $n = 0$ stellen wir fest, dass gemäss Voraussetzung das Bild der Abbildung $\psi_0 - \phi_0$ in K'_0 enthalten ist. Da die durch ∂'_1 induzierte Abbildung $P'_1 \to K'_0$ surjektiv ist, erlaubt es die Projektivität von P_0 eine Abbildung $\chi_0 : P_0 \to P'_1$ zu definieren mit $\psi_0 - \phi_0 = \partial'_1\chi_0$. Damit ist die Induktion verankert.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, χ_{n-1} sei bereits konstruiert. Zur Konstruktion von χ_n betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \\ \phi_{n+1} \downarrow\downarrow \psi_{n+1} & & \phi_n \downarrow\downarrow \psi_n & & \phi_{n-1} \downarrow\downarrow \psi_{n-1} \\ P'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & P'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & P'_{n-1} \end{array}$$

Gemäss Voraussetzung gilt

$$\psi_{n-1} - \phi_{n-1} = \partial'_n\chi_{n-1} + \chi_{n-2}\partial_{n-1}\ .$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \partial'_n(\psi_n - \phi_n - \chi_{n-1}\partial_n) &= \partial'_n\psi_n - \partial'_n\phi_n - \partial'_n\chi_{n-1}\partial_n \\ &= \psi_{n-1}\partial_n - \phi_{n-1}\partial_n - \partial'_n\chi_{n-1}\partial_n \\ &= (\psi_{n-1} - \phi_{n-1} - \partial'_n\chi_{n-1})\partial_n \\ &= \chi_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Damit faktorisiert die Abbildung $\psi_n - \phi_n - \chi_{n-1}\partial_n$ über $K'_n = \ker \partial'_n$. Da die durch ∂'_{n+1} induzierte Abbildung $P'_{n+1} \to K'_n$ surjektiv ist, erlaubt es die Projektivität von P_n eine Abbildung $\chi_n : P_n \to P'_{n+1}$ zu definieren mit

$$\psi_n - \phi_n - \chi_{n-1}\partial_n = \partial'_{n+1}\chi_n\ .$$

Dies war zu beweisen.

Korollar 3.4 *Es seien* $\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{P}'$ *zwei projektive Auflösungen von* A*. Dann sind* $\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{P}'$ *homotopieäquivalent.*

Dies bedeutet, dass in der Kategorie der Kettenkomplexen und der *Homotopieklassen* der Kettenabbildungen die projektive Auflösung von einem Modul A bis auf (eindeutig bestimmte) Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

II.4. Derivierte Funktoren

Wir betrachten hier zwei Kategorien, nämlich einmal die Kategorie der Λ-Moduln $\mathbf{Mod}_\Lambda$ und die Kategorie der abelschen Gruppen $\mathbf{Ab}$.

Definition Ein (kovarianter) *Funktor* $F : \mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{Ab}$ legt für jeden Λ-Modul M eine abelsche Gruppe $F(M)$ fest und für jeden Λ-Modulhomomorphismus $\phi : M \to M'$ einen Homomorphismus $F(\phi) = \phi_* : F(M) \to F(M')$, wobei die Zuordnung den folgenden Gesetzen genügt:

(i) $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$

(ii) $F(1_M) = 1_{F(M)}$

Der Funktor F heisst *additiv*, wenn gilt $F(\phi + \psi) = F(\phi) + F(\psi)$.

Für einen additiven Funktor $F : \mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{Ab}$ gilt also, dass für Moduln A und B die Zuordung $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(F(A), F(B))$ homomorph ist.

Satz 4.1 *Es sei $F : \mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{Ab}$ ein additiver Funktor. Dann gilt $F(A \oplus B) = F(A) \oplus F(B)$ und $F(0) = 0$.*

Beweis Wir betrachten $A \oplus B$ zusammen mit den beiden Injektionen ι_A und ι_B und den beiden Projektionen π_A und π_B. Dann gilt $\pi_A\iota_A = 1_A$, $\pi_A\iota_B = 0$, $\pi_B\iota_A = 0$, $\pi_B\iota_B = 1_B$ und $\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B = 1_{A\oplus B}$. Wendet man den Funktor F auf diese Situation an, so erhält man eine abelsche Gruppe $F(A\oplus B)$ zusammen mit Abbildungen $F(\iota_A)$, $F(\iota_B)$, $F(\pi_A)$ und $F(\pi_B)$. Gemäss Voraussetzung gilt ferner $F(\pi_A\iota_A) = F(\pi_A)F(\iota_A) = F(1_A) = 1_{F(A)}$, $F(\pi_A\iota_B) = F(\pi_A)F(\iota_B) = 0$, $F(\pi_B)F(\iota_A) = 0$, $F(\pi_B)F(\iota_B) = 1_{F(B)}$, und

$$1_{F(A\oplus B)} = F(1_{A\oplus B}) = F(\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B) = F(\iota_A)F(\pi_A) + F(\iota_B)F(\pi_B) \ .$$

Es genügt also Folgendes zu zeigen: Es sei in einer Modulkategorie ein Objekt X gegeben zusammen mit Abbildungen ι_A, ι_B, π_A und π_B. Es gelte $\pi_A\iota_A = 1_A$, $\pi_A\iota_B = 0$, $\pi_B\iota_A = 0$, $\pi_B\iota_B = 1_B$ und $\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B = 1_X$. Dann folgt $X \simeq A \oplus B$.

Wir definieren $\phi : A \oplus B \to X$ durch $\phi(a, b) = \iota_A(a) + \iota_B(b)$ und $\psi : X \to A \oplus B$ durch $\psi(x) = (\pi_A(x), \pi_B(x))$. Dann gilt

$$\phi\psi(x) = \phi(\pi_A(x), \pi_B(x)) = \iota_A\pi_A(x) + \iota_B\pi_B(x) = (\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B)(x) = x$$

und

$$\psi\phi(a, b) = \psi(\iota_A(a)+\iota_B(b)) = (\pi_A(\iota_A(a)+\iota_B(b)), \pi_B(\iota_A(a)+\iota_B(b))) = (\pi_A\iota_A(a), \pi_B\iota_B(b)) = (a, b) \ .$$

Dies beweist die Behauptung.

Beispiele:

(a) Es sei ein Λ-Modul A gegeben. Wir ordnen jedem Λ-Modul B die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ zu und jedem Λ-Modulhomomorphismus $\phi : B \to B'$ den induzierten Homomorphismus $\phi_* : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B')$. Dies definiert nach unseren früheren Resultaten einen additiven Funktor $F : \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$.

(b) Es sei ein Λ-Modul B gegeben. Wir ordnen jedem Λ-Modul A die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ zu und jedem Λ-Modulhomomorphismus $\psi : A \to A'$ den induzierten Homomorphismus $\psi^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ (in der “umgekehrten” Richtung!). Mit Ausnahme der Tatsache, dass die induzierten Homomorphismen die “falsche” Richtung besitzen, erfüllt diese Zuordnung die Bedingungen eines (additiven) Funktors $G : \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$. Man sagt, G sei ein *kontravarianter* (additiver) Funktor von **Mod** nach **Ab**.

(c) Es sei ein (rechts) Λ-Modul A gegeben. Wir ordnen jedem (links) Λ-Modul B die abelsche Gruppe $A \otimes_\Lambda B$ zu und jedem Λ-Modulhomomorphismus $\phi : B \to B'$ den induzierten Homomorphismus $\phi_* : A \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B'$, der auf typischen Elementen des Tensorproduktes durch $\phi_*(a \otimes b) = a \otimes \phi(b)$ gegeben ist. Die Eigenschaften des Tensorproduktes zeigen, dass damit ein kovarianter und additiver Funktor von **Mod** nach **Ab** gegeben ist.

Als nächstes betrachten wir einen Kettenkomplex $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}$ von Λ-Moduln und wenden auf ihn den additiven Funktor F an. Es folgt aus der Funktoreigenschaft und aus der Tatsache, dass unter F der Nullhomomorphismus in den Nullhomomorphismus übergeht, dass $F(\mathbf{C}) = \{F(C_n), F(\partial_n)\}$ ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen ist. Ist $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ eine Kettenabbildung, so ist offenbar $F(\Phi) : F(\mathbf{C}) \to F(\mathbf{D})$ ebenfalls eine Kettenabbildung. Ist χ eine Homotopie zwischen den Kettenabbildungen $\Phi,\ \Psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, so ist $F(\chi)$ wegen der Additivität von F eine Homotopie zwischen den Kettenabbildungen $F(\Phi)$ und $F(\Psi)$. Wenn also insbesondere die Kettenkomplexe $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ homotopieäquivalent sind, so sind es auch die beiden Kettenkomplexe $F(\mathbf{C})$ und $F(\mathbf{D})$.

Wir wenden nun diese Überlegungen auf einen konkreten Fall an. Wir betrachten den Λ-Modul A und eine projektive Auflösung $\mathbf{P}$ von A. Da $\mathbf{P}$ bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt ist, ist für den additiven Funktor F der Kettenkomplex $F(\mathbf{P})$ ebenfalls bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt. Die Homologie des Kettenkomplexes $F(\mathbf{P})$ hängt also nicht von der Wahl der projektiven Auflösung $\mathbf{P}$ von A ab sondern einzig vom Modul A. Damit wird dem Modul A und jedem additiven Funktor F für jedes n eine wohlbestimmte abelsche Gruppe $H_n(F(\mathbf{P}))$ zugeordnet.

Wenn nun $\phi : A \to A'$ ein Λ-Modulhomomorphismus ist, so definieren wir einen induzierten Homomorphismus wie folgt. Es seien $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}'$ projektive Resolutionen von A bzw. A'. Wir wissen, dass sich ϕ zu einer Kettenabbildung $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ “hochheben” lässt. Ferner haben wir gezeigt, dass die Homotopieklasse der Kettenabbildung Φ eindeutig durch $\phi : A \to A'$ bestimmt ist. Damit ist aber auch die Homotopieklasse der Abbildung $F(\Phi) : F(\mathbf{P}) \to F(\mathbf{P}')$ eindeutig bestimmt. Dies impliziert seinerseits, dass der induzierte Homomorphismus in der Homologie eindeutig bestimmt ist. Es gehört folglich zu $\phi : A \to A'$ ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\phi_* : H_n(F(\mathbf{P})) \to H_n(F(\mathbf{P}'))$, $n \geq 0$.

Mit dieser nun auch auf den Homomorphismen definierten Zuordnung wird $A \rightsquigarrow H_n(F(\mathbf{P}))$, $n \geq 0$ zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der Λ-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen. Dieser Funktor nennt man den n-ten *links-derivierten Funktor* $L_n(F)$ von F.

Definition Der n-te links-derivierte Funktor $L_n(F) : \mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{Ab}$ des additiven Funktors $F : \mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{Ab}$ ist definiert durch

$$(L_nF)(A) = H_n(F(\mathbf{P})) \ ,$$

wo $\mathbf{P}$ eine (beliebige) projektive Auflösung von A ist.

Es bleibt noch, die beiden Funktoreigenschaften nachzuweisen. Dazu ist einmal zu zeigen, dass die Identität $1_A : A \to A$ die Identität in der Homologie $H_n(F(\mathbf{P})) = (L_nF)(A)$, induziert. Dies folgt sofort daraus, dass wir die Identität $1_A : A \to A$ durch die Identität der projektiven Resolution $\mathbf{P}$ von A "hochheben" können. Die induzierte Abbildung in der Homologie ist dann offensichtlich ebenfalls die Identität. – Ferner ist nachzuweisen, dass für eine Zusammensetzung von $\phi : A \to A'$ und $\phi' : A' \to A''$ gilt

$$(\phi' \circ \phi)_* = (\phi')_* \circ (\phi)_* : L_nF(A) \to L_nF(A'') \ .$$

Es seien $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ und $\mathbf{P}''$ projektive Auflösungen von A, A' und A''. Die Kettenabbildung $\Phi' \circ \Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}''$, die durch Zusammensetzen der Hochhebungen $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ von ϕ und $\Phi' : \mathbf{P}' \to \mathbf{P}''$ von ϕ' entsteht, eine Hochhebung der Zusammensetzung $\phi' \circ \phi$ ist. Die induzierten Abbildungen in der Homologie der Kettenkomplexe $F(\mathbf{P})$, $F(\mathbf{P}')$ und $F(\mathbf{P}'')$ haben dann ebenfalls diese Eigenschaft.

Schliesslich fügen wir an, dass der Funktor $L_nF : \mathbf{Mod}_\Lambda \to \mathbf{Ab}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ automatisch *additiv* ist. Es sei $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ eine Hochhebung von $\phi : A \to A'$ und $\Psi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ eine Hochhebung von $\psi : A \to A'$, dann ist $\Phi + \Psi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ eine Hochhebung von $\phi + \psi : A \to A'$. Da F ein additiver Funktor ist, gilt dann $(\Phi + \Psi)_* = \Phi_* + \Psi_* : F(\mathbf{P}) \to F(\mathbf{P}')$ für die induzierten Kettenabbildungen. Damit folgt auch $(\phi + \psi)_* = \phi_* + \psi_* : L_nF(A) \to L_nF(A')$ für die induzierten Homomorphismen in der Homologie.

Es lassen sich über die (links-)derivierten Funktoren eines Funktors F weitere allgemeine Eigenschaften herleiten. Wir ziehen es hier vor, diese Eigenschaften im nächsten Abschnitt direkt bei dem uns am meisten interessierenden konkreten Beispiel, nämlich dem Ext-Funktor aufzulisten.

Zum Schluss fügen wir hier noch einige Bemerkung zur Dualisierung und zur Terminologie an.

Nimmt man für den Modul A an Stelle einer *projektiven Auflösung* (nach links) eine *injektive Auflösung* (nach rechts), so definiert das analoge Verfahren für den kovarianten Funktor F die sogenannten *rechts-derivierten* Funktoren R^nF.

Die Terminologie wird etwas undurchsichtiger bei *kontra*varianten Funktoren. Hier hat sich folgende Sprachregelung durchgesetzt. Man betrachtet den kontravarianten Funktor G als *ko*varianten Funktor auf der *entgegengesetzten* Kategorie, die dadurch definiert ist, dass sie die gleichen Objekte wie die ursprüngliche Kategorie besitzt, in der aber die Morphismen gerade die umgekehrte Richtung aufweisen. Ein kontravarianter Funktor kann dann interpretiert werden als kovarianter Funktor auf der entgegengesetzten Kategorie, und eine *projektive* Resolution eines Objektes A

in der ursprünglichen Kategorie ist eine *injektive* Resolution des gleichen Objektes in der entgegengesetzen Kategorie. Interpretiert man das gesamte oben beschriebene Verfahren mit einer projektiven Resolution von A und dem *kontra*varianten Funktor G in der entgegengesetzten Kategorie, so liefert es dort die *rechts-derivierten* Funktoren von G. Diese Terminologie benützt man auch dann, wenn die entgegengesetzte Kategorie gar nicht erwähnt wird. Die mit Hilfe einer projektiven Resolution definierten derivierten Funktoren des kontravarianten Funktors G heissen deshalb in der homologischen Algebra die rechts-derivierten Funktoren von G; sie werden konsequenterweise mit R^nG bezeichnet.

In analoger Weise erhält man die *links-derivierten* Funktoren L_nG des *kontra*varianten Funktors G, wenn man für A eine *injektive* Resolution wählt.

II.5. Ext als derivierter Funktor.

Wir betrachten hier für einen gegebenen Λ-Modul B den Funktor $G : A \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$. Dieser Funktor von der Kategorie der Λ-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen ist additiv, aber *kontra*variant. Das im Abschitt 4 beschriebene Verfahren mit Hilfe einer projektiven Auflösung des Moduls A liefert gemäss unseren Festsetzungen zur Terminologie die rechts-derivierten Funktoren $R^n G$.

Wir wiederholen hier der Vollständigkeit halber die notwendigen Schritte:

1. Zum gegebenen Λ-Modul A wähle man eine projektive Auflösung $\mathbf{P}$. (Die Homotopieklasse von $\mathbf{P}$ ist eindeutig durch A bestimmt.)

2. Man wende den Funktor $G = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$, bilde also den *Co*kettenkomplex $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B)$. (Da G additiv ist, ist die Homotopieklasse von $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B)$ eindeutig bestimmt.)

3. Bilde in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B)$ die *Co*homologie $H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B))$. (Gemäss unserer Konvention haben wir einen *oberen* Index n geschrieben. Die Cohomologiegruppen sind unabhängig von der Auswahl der projektiven Auflösung $\mathbf{P}$ und eindeutig durch A (und B) bestimmt.)

4. Ein Homomorphismus $\phi : A \to A'$ gibt Anlass zu einer Kettenabbildung $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$. (Die Homotopieklasse der Kettenabbildung ist eindeutig durch $\phi : A \to A'$ bestimmt.)

5. Die Anwendung von G liefert eine *Co*kettenabbilung $\Phi^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}', B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B)$. (Man beachte die umgekehrte Richtung!) (Die Cokettenabbbildung Φ^* ist bis auf Homotopie eindeutig durch $\phi : A \to A'$ bestimmt.)

6. Die Cokettenabbildung Φ^* induziert einen Homomorphismus $\phi^* : H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}', B)) \to H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B))$. (Dieser Homomorphismus ist eindeutig durch $\phi : A \to A'$ bestimmt.)

Definition Es sei der Λ-Modul B gegeben. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ definieren wir den (kontravarianten) Funktor $A \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B)$, $n \geq 0$ als n-ten rechts-derivierten Funktor von $A \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$.

Im Rest dieses Abschnittes beschäftigen wir uns mit einigen weiteren Eigenschaften der Ext-Funktoren. Es sind dies Eigenschaften, die man *mutatis mutandis* ganz allgemein für derivierte Funktoren beweisen könnte; eine Ausnahme bildet einzig Punkt 5, wo eine für den Funktor Ext spezifische Eigenschaft behandelt wird. Wir überlassen die Formulierungen der allgemein gültigen Aussagen und deren Beweise als Übungsaufgaben dem Leser.

1. Wir betrachten den Beginn der projektiven augmentierten Auflösung von A, also die exakte Folge:

$$\cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

Es sei $K_0 = \ker \pi = \mathrm{im}\, \partial_1$. Da unser Ausgangsfunktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$ links-exakt ist, liefert seine Anwendung die exakten Folgen:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(K_0, B)$$

und

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(K_0, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, B) \to \cdots \ .$$

Die durch ∂_1 induzierte Abbildung δ_1^* ist die Zusammensetzung

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(K_0, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, B).$$

Um $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B)$ zu berechnen, haben wir die Cohomologie $H^0(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}, B))$ zu bilden. Es folgt also

$$\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B) = \ker \delta_1^* / \mathrm{im}\ \delta_0^* = \ker \delta_1^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)\ .$$

2. Es sei $A = P$ projektiv. Dann ist $0 \to P_0 \to 0$ mit $P_0 = P$ eine projektive Auflösung von A. Damit folgt $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) = 0$ für $n \geq 1$.

3. Es sei $\beta : B \to B'$ ein Λ-Modulhomomorphismus. Dann induziert β einen wohldefinierte Cokettenabbildung $\beta_* : \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B')$ Dies induziert für jedes n eine entsprechende Abbildung in der n-ten Cohomologiegruppen. Es ist leicht zu verifizieren, dass damit $B \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B)$, $n \geq 0$ zu einem (kovarianten) Funktor wird.

4. Es sei eine kurze exakte Folge

$$0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \to 0$$

gegeben. Ist $\mathbf{P}$ wie oben eine projektive Resolution von A, so erhält man eine kurze exakte(!) Folge von Cokettenkomplexen

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, B'') \to 0$$

Dies liefert – wie wir wissen – eine lange exakte Sequenz für die Cohomologie, also für die Ext-Gruppen. Sie lautet:

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B'') \\ & \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B'') \\ & \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \cdots \end{aligned}$$

5. Mit Hilfe der langen exakten Ext-Sequenz in der zweiten Variablen lässt sich sofort eine Charakterisierung projektiver Moduln angeben.

Satz 5.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) A *ist projektiv;*

(ii) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) = 0$ *für alle Moduln* B*;*

(iii) $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) = 0$ *für alle Moduln* B *und alle* $n \geq 1$*.*

Beweis In der Reihenfolge (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii)$\Rightarrow$ (i) ist wegen Punkt 2 nur noch die letzte Implikation zu beweisen. Aber die lange Ext-Sequenz (siehe Punkt 4 oben) zeigt in diesem Fall, dass für jede exakte Folge

$$0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B'' \to 0$$

die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B'') \to 0$$

exakt ist. Laut Definition ist somit A projektiv.

6. Wir zeigen hier, dass Ext auch eine lange exakte Folge in der *ersten* Variablen zulässt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine kurze exakte Folge

$$0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \to 0$$

Zu A' und A'' sei je eine projektive Auflösung gegeben:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & P_1' & \to & P_0' & \xrightarrow{\pi'} & A' & \to & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{\pi} & A & \to & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\to & P_1'' & \to & P_0'' & \xrightarrow{\pi''} & A'' & \to & 0
\end{array}$$

Wir versuchen, eine projektive Auflösung $\mathbf{P}$ von A zu definierten, so dass wir eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen erhalten. Wegen der Projektivität von P_n'' schliessen wir, dass notwendigerweise $P_0 = P_0' \oplus P_0''$ sein muss. Um die Abbildung $P_0 \to A$ zu definieren, finden wir zuerst $\phi : P_0'' \to A$ mit $\varepsilon\phi = \pi''$, was wegen der Projektivität von P_0'' möglich ist. Dann definieren wir $\pi : P_0 \to A$ durch $\pi(p_0', p_0'') = \mu\pi'(p_0) + \phi(p_0'')$. Die damit entstehenden Quadrate sind kommutativ. Ausserdem zeigt die ker-coker-Sequenz, dass π surjektiv ist und dass die Sequenz

$$0 \to \ker \pi' \to \ker \pi \to \ker \pi'' \to 0$$

exakt ist. Damit kann der nächste Schritt der Konstruktion von $\mathbf{P}$, nämlich die Konstruktion von P_1 zusammen mit den zugehörigen Abbildungen, in ganz analoger Weise vollzogen werden.

Man erhält mit dieser Konstruktion eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, die man $\mathbf{P}' \rightarrowtail \mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{P}''$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}' \oplus \mathbf{P}''$ schreiben kann, wobei man aber beachten muss, dass das Differential im Kettenkomplex $\mathbf{P}$ *nicht* durch die Summe der Differentiale in $\mathbf{P}'$ und $\mathbf{P}''$ gegeben ist.

Wir wenden nun auf diese kurze exakte Folge von Kettenkomplexen den Funktor $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, B)$ an. Wegen der Additivität erhält man als Resultat eine kurze exakte Folge von Cokettenkomplexen, welche in üblicher Weise eine lange exakte Folge in der Homologie liefert. Da die Homologiegruppen sich als Ext-Gruppen identifizieren lassen, erhält man die folgende exakte Ext-Folge:

$$\begin{aligned}
0 \quad \to \quad & \mathrm{Hom}_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A', B) \\
& \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A', B) \\
& \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A'', B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \cdots
\end{aligned}$$

7. Man stellt ohne grössere Schwierigkeiten fest, dass die exakten Ext-Folgen *natürlich* sind. Sowohl Abbildungen der zugrunde liegenden kurzen exakten Folgen wie auch Abbildungen des festen Moduls führen zu entsprechenden Abbildungen der langen exakten Folgen, so dass alle entstehenden Quadrate kommutativ sind.

8. Es sei $0 \to R \to P \to A \to 0$ eine projektive Präsentierung, d.h. eine kurze exakte Folge mit P projektiv. Dann liefert die unter 6. behandelte Ext-Sequenz zusammen mit 2., für $n \geq 2$ den Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) \simeq \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(R,B)$$

und für $n = 1$ erhält man die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R,B) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \to 0$$

Wir schliessen mit der folgenden Bemerkung. Wir haben bei unserem Vorgehen beim Hom-Funktor die Variable A ausgezeichnet, und für festes B vom so entstehenden kontravarianten Funktor die rechts-Derivierten als Ext-Funktoren definiert. Dual können wir im Hom-Funktor die Variable B auszeichnen und für festes A vom so entstehenden kovarianten Funktor $F : B \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ (mit Hilfe einer injektiven Resolution von B) die rechts-derivierten Funktoren R^nF bilden. Wir bezeichnen sie für den Zweck dieser Bemerkung mit $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda(A,B)$. Die hier in den Punkten 1 bis 8 für die Ext-Funktoren durchgeführten Überlegungen lassen sich in offensichtlicher Weise dualisieren und führen so zu analogen Resultaten für die $\overline{\mathrm{Ext}}^n$-Funktoren. Mit dieser Information lässt sich dann das überraschende Resultat beweisen, dass die $\overline{\mathrm{Ext}}^n$-Funktoren mit den oben definierten Ext^n-Funktoren übereinstimmen: sie sind für jedes n natürlich äquivalent. Ferner sind auch die verbindenden Homomorphismen in den langen exakten Sequenzen mit dieser natürlichen Äquivalenz (wenigstens bis auf das Vorzeichen!) verträglich. Die Details, die für diesen Nachweis notwendig sind, überlassen wir dem Leser.

Wir machen in der Folge von diesem Resultat Gebrauch, indem wir nur die Bezeichnung Ext benützen. Dieser Funktor kann also sowohl mit Hilfe einer projektiven Auflösung der ersten Variablen von Hom wie auch mit Hilfe einer injektiven Auflösung der zweiten Variabeln von Hom erhalten werden.

II.6. Modulerweiterungen

Es sei

$$E : 0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine kurze exakte Folge von Λ-Moduln. Wir setzen diese exakte Folge an die erste Stelle der langen Ext-Sequenz und setzen an die zweite Stelle den Modul A:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \xrightarrow{\omega_E} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \to \cdots$$

Die Identität $1_A : A \to A$ in $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$ wird unter ω_E in $\xi_E \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ abgebildet. Damit wird der kurzen exakten Folge E, einer *Erweiterung von C durch A*, das Element $\Delta(E) = \xi_E \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ zugeordnet.

Zwei Erweiterungen

$$E : 0 \to A \to B \to C \to 0$$

und

$$E' : 0 \to A \to B' \to C \to 0$$

von C durch A heissen *äquivalent*, wenn eine Abbildung $\phi : B \to B'$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow \phi & & \| & & \\ 0 & \to & A & \to & B' & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

kommutativ ist. Man beachte, dass in diesem Fall $\phi : B \to B'$ automatisch ein Isomorphismus ist.

Lemma 6.1 *Für zwei äquivalente Erweiterungen E und E' von C durch A gilt $\Delta(E) = \Delta(E') \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$.*

Beweis Die Natürlichkeit der langen exakten Ext-Sequenz liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) & \xrightarrow{\omega_E} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) & \to & \cdots \\ & & \uparrow \phi^* & & \| & & \| & & \\ \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B', A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) & \xrightarrow{\omega_{E'}} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) & \to & \cdots \end{array}$$

Daraus folgt sofort $\Delta(E) = \omega_E(1_A) = \omega_{E'}(1_A) = \Delta(E')$.

Lemma 6.2 *Zu $\xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ existiert eine Erweiterung $E : 0 \to A \to B \to C \to 0$ mit $\Delta(E) = \xi$.*

Beweis Wir wählen zu C eine projektive Präsentierung

$$P: \quad 0 \to R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0 \ .$$

Dies gibt Anlass zur exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R,A) \xrightarrow{\omega_P} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) \to 0 \ .$$

Zu gegebenem $\xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ existiert $\psi : R \to A$ mit $\omega_P(\psi) = \xi$. Wir konstruieren einen Modul B zusammen mit entsprechenden Abbildungen, so dass ein (kommutatives) Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} P:0 & \to & R & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow\psi & & \downarrow\phi & & \| & & \\ E:0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

entsteht. Wir definieren B durch $(A \oplus P)/\{(\psi(r),\mu(r)) \,|\, r \in R\}$, die Abbildung $A \to B$ durch $A \to A \oplus P \twoheadrightarrow B$ und die Abbildung $P \to B$ durch $P \to A \oplus P \twoheadrightarrow B$. Die so definierte Abbildung $A \to B$ ist injektiv. Ist nämlich $(a,0) = (0,0) \mod \{(\psi(r),\mu(r)) \,|\, r \in R\}$, so existiert $s \in R$ mit $a = \psi(s)$ und $\mu(s) = 0$, also $s = 0$ und damit $a = 0$. Ferner ergibt sich

$$B/A = (A \oplus P)/(\iota_A(A) + \{(\psi(r),\mu(r)) \,|\, r \in R\}) = P/\mu(R) \simeq C \ .$$

Dies liefert die noch fehlende Abbildung $B \to C$.

Wegen der Natürlichkeit erhält man aus dem obigen Diagramm mit Hilfe der langen Ext-Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(C,A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) & \xrightarrow{\omega_E} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) & \to & \cdots \\ & & \| & & \downarrow\phi^* & & \downarrow\psi^* & & \| & & \\ 0 & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(C,A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,A) & \xrightarrow{\omega_P} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) & \to & 0 \end{array}$$

Man liest dann ab:

$$\Delta(E) = \omega_E(1_A) = \omega_P\psi^*(1_A) = \omega_P(\psi) = \xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) \ .$$

Dies war zu beweisen.

Lemma 6.3 *Zwei Erweiterungen*

$$E: 0 \to A \to B \to C \to 0$$

und

$$E': 0 \to A \to B' \to C \to 0$$

mit $\Delta(E) = \Delta(E') \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ *sind äquivalent.*

Beweis Zum Beweis betrachten wir eine projektive Präsentierung

$$0 \to R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$$

und Abbildungen ϕ, ψ und ϕ', ψ', so dass die folgenden Diagramme kommutativ sind (wir werden in diesem Fall auch etwa von "Hochhebungen" der Identität 1_C sprechen):

$$\begin{array}{cccccccc} P:0 & \to & R & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \| & & \\ E:0 & \to & A & \xrightarrow{\kappa} & B & \xrightarrow{\tau} & C & \to & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccccccc} P:0 & \to & R & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow \psi' & & \downarrow \phi' & & \| & & \\ E':0 & \to & A & \xrightarrow{\kappa'} & B' & \xrightarrow{\tau'} & C & \to & 0 \end{array}$$

Wir werden später benötigen, dass ϕ und ϕ' surjektiv sind. Dies kann ohne weiteres erreicht werden, indem P "genügend" gross gewählt wird. Die zugehörigen langen exakten Ext-Sequenzen liefern dann die beiden Diagramme (die wir hier in *einem* Diagramm kombinieren)

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) & \xrightarrow{\omega_E,\omega_{E'}} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) & \to & \cdots \\ & & \psi^* \downarrow\downarrow \psi'^* & & \| & & \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,A) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) & \to & 0 \end{array}$$

Laut Voraussetzung gilt dann

$$\omega_E(1_A) = \Delta(E) = \Delta(E') = \omega_{E'}(1_A) \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\omega(\psi) = \omega\psi^*(1_A) = \omega\psi'^*(1_A) = \omega(\psi') \ .$$

Es existiert also $\chi : P \to A$ mit $\psi' - \psi = \mu^*(\chi) = \chi\mu$. Man ersetze nun im Diagramm für die Erweiterung $0 \to A \to B \to C \to 0$ die Abbildung ψ durch $\psi'' = \psi + \chi\mu = \psi'$ und ϕ durch $\phi'' = \phi + \kappa\chi$. Wegen

$$\kappa(\psi + \chi\mu) = \kappa\psi + \kappa\chi\mu = \phi\mu + \kappa\chi\mu = (\phi + \kappa\chi)\mu$$

liefert dann ϕ'' und ψ'' eine Hochhebung von 1_C.

Die beiden Diagramme für ϕ' und ψ' einerseits wie für ϕ'' und ψ'' andererseits unterscheiden sich wegen $\psi'' = \psi'$ nur unwesentlich: Man stellt insbesondere sofort fest, dass $\ker \phi' = \ker \phi''$. Da wir am Anfang dafür gesorgt haben, dass ϕ (damit auch ϕ'') und ϕ' surjektiv sind, gibt es zwischen $B \simeq P/\ker \phi''$ und $B' \simeq P/\ker \phi'$ einen mit den Abbildungen $\kappa, \kappa', \tau, \tau'$ kompatiblen Homomorphismus $\beta : B \to B'$, welcher sowohl in A wie auch in C die Identität induziert. Die Erweiterungen E und E' sind somit äquivalent. Damit haben wir das folgende Resultat erhalten:

Satz 6.4 *Die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von C durch A entspricht bijektiv der Gruppe* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$.

Wir schliessen einige Bemerkungen an.

1. Die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von C durch A trägt laut diesem Satz eine abelsche Gruppenstruktur.

2. Das Nullelement der Gruppe $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ entspricht der zerfallenden Erweiterung:

$$0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C \to 0\ .$$

Dies schliesst man unschwer aus der Tatsache, dass in der langen Ext-Sequenz $1_A \in \mathrm{Hom}^1_\Lambda(A,A)$ als Bild der Projektion $A \oplus C \to C$ auftritt.

3. Ist C projektiv, so zerfällt jede Erweiterung von C (was früher schon bekannt war).

Wir beschreiben zum Schluss noch, wie sich die induzierten Abbildungen in den Ext-Gruppen auf der Ebene der Erweiterungen darstellen.

Es sei zuerst das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \to & A & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

gegeben. Dies induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B',A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) & \xrightarrow{\omega'} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C',A) & \to & \cdots \\ & & \downarrow \beta^* & & \| & & \downarrow \gamma^* & & \\ \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) & \to & \cdots \end{array}$$

Die obere Erweiterung wird beschrieben durch $\xi = \omega(1_A)$ die untere durch $\xi' = \omega'(1_A)$. Wegen der Kommutativität des Diagrammes gilt $\gamma^*(\xi') = \xi$.

Ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \| & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

gegeben, so erhält man das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B',A') & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A',A') & \xrightarrow{\omega'} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A') & \to & \cdots \\ & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \alpha^* & & \| & & \\ \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A') & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A') & \xrightarrow{\overline{\omega'}} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A') & \to & \cdots \\ & & \uparrow \alpha_* & & \uparrow \alpha_* & & \uparrow \alpha_* & & \\ \cdots & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,A) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A) & \to & \cdots \end{array}$$

Die obere Erweiterung wird beschrieben durch $\xi = \omega(1_A)$, die untere durch $\xi' = \omega'(1_{A'})$. Aus der Kommutativität des Diagrammes folgt dann $\alpha_*(\xi) = \overline{\omega'}(\alpha) = \omega'(1_A)i = \xi'$.

II.7. Spezielle Ringe, Beispiele.

(a) Halbeinfache Ringe.

Definition Ein Ring Λ heisst *halbeinfach*, wenn jeder Λ-Modul halbeinfach ist.

Wir rufen in Erinnerung, dass ein Modul M halbeinfach ist, wenn jeder Untermoduln $U \subseteq M$ in M einen direkten Summanden U' besitzt. Man weist im allgemeinen *diese* Eigenschaft nach, wenn man zeigen will, dass ein Ring Λ halbeinfach ist. Zum Beispiel erhält man auf diese Weise:

(i) Ein Körper K ist halbeinfach.

(ii) Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ einer endlichen Gruppe ist halbeinfach.

(iii) Der volle Matrizenring $\mathbb{M}_n(K)$ über einem Körper K ist halbeinfach.

Im Zusammenhang mit dem Funktor Ext ergibt sich die folgende Charakterisierung der Halbeinfachheit eines Ringes.

Satz 7.1 *Es sei Λ ein Ring. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Der Ring Λ ist halbeinfach.*

(ii) *Für Λ-Moduln A, B gilt stets $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) = 0$.*

(iii) *Für Λ-Moduln A, B gilt stets $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) = 0$ für $n \geq 1$.*

Beweis Ist Λ halbeinfach, so besitzt jeder Untermodul einen direkten Summanden und umgekehrt. Dies ist äquivalent zur Aussage, dass jede kurze exakte Sequenz zerfällt, also $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) = 0$.

Es sei $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) = 0$ für alle Λ-Moduln A und B. Wir beweisen mit Induktion nach n, dass dies $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) = 0$ für alle Λ-Moduln A und B und $n \geq 2$ impliziert. Zu diesem Zweck wählen wir eine projektive Präsentierung, also eine kurze exakte Folge $0 \to R \to P \to A \to 0$ mit P projektiv. Dann folgt $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) = \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(R,B)$, aber letzteres verschwindet nach Induktionsvoraussetzung.

Korollar 7.2 *Es sei Λ halbeinfach. Dann ist jeder Λ-Modul projektiv.*

Beweis Zum Modul A wählen wir eine projektive Präsentierung $0 \to R \to P \to A \to 0$. Da Λ halbeinfach ist, zerfällt diese kurze exakte Folge. Damit ist A ein direkter Summand im projektiven Modul P, also selbst projektiv.

Satz 7.3 *Es sei A ein halbeinfacher Modul über dem (beliebigen) Ring Λ. Dann ist auch jeder Untermodul V von A und jeder Quotientenmodul A/V halbeinfach.*

Beweis Wir zeigen, dass jede exakte Folge $0 \to U \to V \to V/U \to 0$ zerfällt. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U & \to & V & \to & V/U & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \iota & & \\ 0 & \to & U & \to & A & \to & A/U & \to & 0 \end{array}$$

Da A halbeinfach ist, wird die untere Erweiterung durch $0 = \xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/U, U)$ beschrieben. Nach Abschnitt 6 wird die obere Erweiterung dann in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(V/U, U)$ durch $\iota^*(\xi) = \iota^*(0) = 0$ beschrieben. Damit zerfällt auch die obere Erweiterung. Es ist also jeder Untermodul von A wieder halbeinfach.

Um zu zeigen, dass jeder Quotientenmodul A/V halbeinfach ist, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U & \to & A & \to & A/U & \to & 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & U/V & \to & A/V & \to & A/U & \to & 0 \end{array}$$

Wie im obigen Fall wird die obere Erweiterung durch $0 = \xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/U, U)$ beschrieben. Die untere Erweiterung wird in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/U, U/V)$ demzufolge durch $\pi_*(\xi) = \pi_*(0) = 0$ beschrieben. Der Quotientenmodul A/V ist folglich halbeinfach.

(b) Abelsche Gruppen.

Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to 0$$

Dies ist für $q \neq 1$ eine nichtzerfallende Erweiterung. Sie ist gleichzeitig eine projektive Präsentierung von $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Es ergibt sich daraus die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{q^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0$$

Die Hom-Gruppen und die induzierten Homomorphismen lassen sich leicht bestimmen: die Sequenz lautet

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \to \mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0 \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \ .$$

Es gibt also neben der zerfallenden Erweiterung $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to 0$ noch $q-1$ andere Äquivalenzklassen nichtzerfallender Erweiterungen. Wenn q eine Primzahl ist, lässt sich leicht zeigen, dass diese Erweiterungen alle von der Form $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to 0$ sind, wo ϵ das Einselement von $\mathbb{Z}$ auf ein nichttriviales Element von $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ abbildet. Die einzelnen Äquivalenzklassen nichttrivialer Erweiterungen unterscheiden sich in diesem Fall einzig durch die *verschiedenen* surjektiven Homomorphismen ϵ. Man sieht an diesem Beispiel, dass die Erweiterungs*gruppen* als Gruppen isomorph sein können, auch wenn sie zu nichtäquivalenten Erweiterungen gehören. Wir überlassen es dem Leser, die den Fall zu diskutieren, wo q keine Primzahl ist.

Für abelsche Gruppen lässt sich zeigen, dass die höheren Ext-Gruppen ($n \geq 2$) alle verschwinden. Dies folgt aus dem folgenden Satz, den wir hier ohne Beweis zitieren.

Satz 7.4 *Ist U eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe, so ist U ebenfalls frei abelsch.*

Korollar 7.5 *Für abelsche Gruppen A und B ist $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ für alle $n \geq 2$.*

Beweis Wir wählen eine projektive Präsentierung $0 \to R \to P_0 \to A \to 0$ mit P_0 frei (abelsch). Dann ist nach dem obigen Satz R ebenfalls frei. Setzen wir also $P_1 = R$, so ist

$$0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

eine projektive Resolution. Berechnet man mit dieser die Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B)$, so folgt daraus direkt die Behauptung des Korollars.

(c) Der Ring $\Lambda = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Wir betrachten den Modul $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es lässt sich dafür sehr leicht eine projektive (sogar freie) Auflösung angeben:

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

indem man $P_n = \Lambda$, $n = 0, 1, \ldots$ setzt und das Differential ∂ durch $\partial(1_\Lambda) = p + p^2\mathbb{Z}$ definiert.

Für $B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ergibt sich daraus sofort

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

für $n = 0, 1, \ldots$.

(d) Der Ring kC_p.

Es sei C_p die zyklische Gruppe der Ordung p, p prim, und k ein Körper der Charakteristik p, z.B. $\mathbb{F}_p$. Ist t ein erzeugendes Element von C_p, so lassen sich die Elemente von kC_p schreiben als

$$\sum_{i=0}^{p-1} k_i t^i$$

Setzen wir $x = t - 1$, so gilt $x^p = 0$ und die Elemente x^i mit $i = 0, 1, \ldots, p-1$ sind linear unabhängig. Damit erhalten wir in $1 = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$ eine (neue) Basis von kC_p, und kC_p wird isomorph zum Ring $\Lambda = k[x]/(x^p)$.

Wir betrachten nun den (trivialen) Modul $A = k$. Dafür lässt sich wie folgt eine projektive (sogar freie!) Auflösung angeben. Wir setzen $P_n = \Lambda$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und definieren das Differential wie folgt

$$\partial_n(1_\Lambda) = \begin{cases} x & \text{für } n \text{ ungerade} \\ x^{p-1} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, hat man mit diesem Komplex eine projektive Auflösung $\mathbf{P}$ des Moduls $A = k$ definiert. Sie kann für die Berechnung der Ext-Gruppen (hier Vektorräume über k!) herangezogen werden. Setzen wir beispielsweise $B = k$. Dann ist $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_n, k) = k$ und das Differential ∂_n in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{P}, k)$ ist durchwegs trivial. Man erhält deshalb $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(k, k) = k$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

III. Endlich dimensionale Algebren, Gruppenalgebren

Im Kapitel III bezeichnet Λ die Gruppenalgebra kG einer endlichen Gruppe G. Die Resultate der Abschnitte III.1 und III.2 sind aber für eine beliebige endlich dimensionale Algebra über dem Körper k gültig; die Formulierung in diesen beiden Abschnitten ist dieser Tatsache angepasst.

III.1. Die Blöcke einer endlich dimensionalen Algebra

Definition Ein Λ-Modul M heisst *einfach*, wenn $M \neq 0$ und wenn aus $0 \neq N \subseteq M$ stets $N = M$ folgt.

Zu Λ definieren wir einen *Graphen* $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$ wie folgt: Die Ecken entsprechen eineindeutig den Isomorphieklassen der einfachen Λ-Moduln $M_1, M_2, \ldots$. Man hat eine Kante zwischen M_i und M_j genau dann, wenn $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_i, M_j) \neq 0$ oder $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_j, M_i) \neq 0$.

Wir sagen, die Moduln M_i und M_j liegen im selben *Block* von Λ, wenn M_i und M_j in der selben Zusammenhangskomponente von $\Gamma(\Lambda)$ liegen.

Beispiel Es sei Λ halbeinfach. Dann gilt für einfache Moduln M_i und M_j stets $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_i, M_j) = 0$. Damit bildet jeder einfache Λ-Modul einen Block für sich.

Wir werden im Folgenden nur Λ-Moduln betrachten, welche als k-Vektorraum eine endliche Dimension aufweisen. In diesem Fall existiert in A eine Kompositionsreihe, d.h. eine Reihe

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

von Untermoduln mit A_i/A_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$ einfach. Die Faktoren A_i/A_{i-1} sind nach dem Satz von Jordan-Hölder bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt. Man nennt A_i/A_{i-1} die *Kompositionsfaktoren* von A und n die *Kompositionslänge*.

Wir beweisen als Erstes das folgende Lemma.

Lemma 1.1 *Es seien A_1 und A_3 zwei Λ-Moduln endlicher k-Dimension. Es gelte: Ist M_1 ein Kompositionsfaktor von A_1 und M_3 ein Kompositionsfaktor von A_3, so liegen M_1 und M_3 nicht im selben Block von Λ. Dann zerfällt jede Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$.*

Beweis Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1)$ trivial ist. Wir beweisen dies mit Induktion nach der Summe der Kompositionslängen von A_1 und A_3. Sind A_1 und A_3 einfach, so folgt die Behauptung direkt aus der Definition der Blöcke.

Ist A_1 nicht einfach, so betrachten wir einen einfachen Untermodul $\overline{M}$ von A_1 und die zu der kurzen exakten Folge $0 \to \overline{M} \to A_1 \to A_1/\overline{M} \to 0$ gehörige lange Ext-sequenz:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, \overline{M}) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1/\overline{M}) \to \cdots$$

Gemäss Induktionsvoraussetzung gilt $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, \overline{M}) = 0$ und $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1/\overline{M}) = 0$, da die Summe der Kompositionslängen der beiden involvierten Moduln in beiden Fällen kleiner ist. Damit folgt wegen der Exaktheit der Sequenz auch $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3, A_1) = 0$.

Der Beweis für den Fall, wo A_3 nicht einfach ist, verläuft völlig analog. Wir verzichten auf die Details.

Satz 1.2 *Es sei A ein Λ-Modul mit $\dim_k A < \infty$. Dann lässt sich A schreiben als $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$, wobei gilt*

- *die Kompositionsfaktoren von A_i liegen alle im gleichen Block;*
- *die Kompositionsfaktoren von A_i und A_j mit $i \neq j$ liegen in verschiedenen Blöcken.*

Beweis Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach der Kompositionslänge von A. Es sei M ein einfacher Untermodul von A. Dann betrachten wir $0 \to M \to A \to A/M \to 0$. Da A/M kleinere Kompositionslänge besitzt als A, lässt sich A/M nach Induktionsvoraussetzung in der verlangten Art schreiben als $\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2 \oplus \cdots \oplus \overline{A}_m$.

Gibt es in A/M keinen Kompositionsfaktor, der im gleichen Block wie M liegt, so folgt die Behauptung sofort aus dem Lemma 1.1. Es ist dann $A = M \oplus \overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2 \oplus \cdots \oplus \overline{A}_m$.

Gibt es in A/M einen Kompositionsfaktor, der im gleichen Block wie M liegt, so dürfen wir annehmen, dass er in $\overline{A}_1$ liegt. In diesem Fall definieren wir $A_1 = \pi^{-1}(\overline{A}_1)$. Wir betrachten dann die kurze exakte Folge

$$0 \to A_1 \to A \to \overline{A}_2 \oplus \cdots \oplus \overline{A}_m \to 0 \ .$$

Gemäss dem Lemma 1.1 zerfällt diese Folge, so dass in diesem Fall gilt:

$$A = A_1 \oplus \overline{A}_2 \oplus \cdots \oplus \overline{A}_m \ .$$

Dies war zu beweisen.

Definition Der Modul A heisst *unzerlegbar*, wenn $A = A_1 \oplus A_2$ stets $A_1 = 0$ oder $A_2 = 0$ impliziert.

Es ist klar, dass einfache Moduln unzerlegbar sind; es gibt aber (bei nicht halbeinfachen Ringen) noch andere unzerlegbare Moduln,

Korollar 1.3 *Es sei A ein unzerlegbarer Modul. Dann liegen alle Kompositionsfaktoren von A im gleichen Block.*

Man sagt dann auch oft, der unzerlegbare Modul A liege im Block, zu dem seine Kompositionsfaktoren gehören.

Schliesslich erwähnen wir noch ohne Beweis den allgemeinen modultheoretischen Satz von Krull-Remak-Schmidt:

Satz 1.4 *Es sei A ein endlich dimensionaler Modul, $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ mit A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ unzerlegbar. Dann sind die Summanden $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

III.2. Die prinzipalen unzerlegbaren Moduln.

Wir schreiben den links-Modul Λ als direkte Summe von unzerlegbaren Moduln P_i, $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_m$. Die Moduln P_i heissen die *prinzipalen unzerlegbaren Moduln* von Λ. Nach Krull-Remak-Schmidt sind sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Als direkte Summanden in einem freien Modul sind sie ausserdem projektiv. Im folgenden werden wir die Struktur der prinzipalen unzerlegbaren Moduln etwas näher betrachten. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Satz 2.1 *Es sei A ein (über k) endlichdimensionaler Λ-Modul. Dann existiert ein kleinster Untermodul A' mit A/A' halbeinfach.*

Beweis Es sei $\mathcal{F}$ die Familie der Untermoduln B von A mit A/B halbeinfach. Man setze $A' = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$. Aus Dimensionsgründen kann man sich bei der Durchschnittsbildung auf endlich viele Moduln $B_1, B_2, \ldots, B_n$ beschränken. Wir behaupten das A/A' halbeinfach ist. In der Tat ist die Abbildung $A/A' \to \bigoplus_{i=0}^{n} A/B_i$ offensichtlich injektiv. Damit ist A/A' isomorph zu einem Untermodul eines halbeinfachen Moduls, also selber halbeinfach. Damit ist A' der gesuchte kleinste Untermodul mit A/A' halbeinfach.

Definition Das *Jacobson-Radikal* eines Λ-Moduls A ist definiert als kleinster Untermodul $JA = A'$ mit A/A' halbeinfach.

Der Quotient A/JA heisst auch etwa der *Kopf* von A. Es ist der grösste halbeinfache Quotient von A: Ist C halbeinfach und $\phi : A \to C$ ein surjektiver Homomorphismus, so folgt $JA \subseteq \ker \phi$ und $\phi : A \to C$ faktorisiert über $\phi' : A/JA \to C$. Da jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls wieder halbeinfach ist, gilt dies sogar für *beliebige* (und nicht nur surjektive) Homomorphismen $\phi : A \to C$.

Das Resultat kann auch mit Hilfe der Hom-Gruppen ausgedrückt werden: Ist $\pi : A \to A/JA$ die kanonische Projektion, so ist für jeden halbeinfachen Modul C der induzierte Homomorphismus

$$\pi^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(A/JA, C) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$$

ein Isomorphismus.

Satz 2.2 *Es sei P ein prinzipaler unzerlegbarer Modul. Dann ist P/JP einfach.*

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas.

Lemma 2.3 *Es sei Q ein unzerlegbarer Modul und $\psi : Q \to Q$ ein Endomorphismus. Dann ist ψ entweder ein Isomorphismus oder ψ ist nilpotent, d.h. es gibt eine Zahl m mit $\psi^m = 0$.*

Beweis Wir betrachten die Folge der Untermoduln $\mathrm{im}\,\psi \supseteq \mathrm{im}\,\psi^2 \supseteq \mathrm{im}\,\psi^3 \cdots$. Wegen der endlichen Dimension von Q muss die Folge dieser Untermoduln stationär werden. Es gibt also eine kleinste Zahl m mit $\mathrm{im}\,\psi^m = \mathrm{im}\,\psi^{m+1} = \mathrm{im}\,\psi^{m+2} = \cdots$.

Wir behaupten nun: $\ker \psi^m \cap \operatorname{im} \psi^m = 0$.

Es sei $a = \psi^m(b) \in \ker \psi^m$. Dann folgt $0 = \psi^m(a) = \psi^{2m}(b)$, d.h. $b \in \ker \psi^{2m}$. Aber $\ker \psi^{2m} = \ker \psi^m$, so dass $a = \psi^m(b) = 0$.

Aus Dimensionsgründen folgt daraus sofort $Q = \ker \psi^m \oplus \operatorname{im} \psi^m$. Dies steht im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit von Q, es sei denn, einer der beiden direkten Summanden ist 0. Im Fall $\ker \psi^m = 0$ ist ψ^m und damit ψ ein Isomorphismus, im Fall $\operatorname{im} \psi^m = 0$ ist ψ nilpotent.

Beweis des Satzes. Wir zeigen: Die Annahme $P/JP = M \oplus N$ mit $M \neq 0 \neq N$ führt zu einem Widerspruch. Die Annahme liefert surjektive Homomorphismen $\pi : P \to M$ und $\sigma : P \to N$. Es ist klar, dass σ Anlass gibt zu einem surjektiven Homomorphismus $\sigma' = \sigma|_Q : Q = \ker \pi \to N$. Da P projektiv ist, gibt es dann einen Homomorphismus $\phi : P \to Q$ mit $\sigma'\phi = \sigma$. Wir definieren $\psi : P \to P$ durch $\psi : P \xrightarrow{\phi} Q \subseteq P$. Da Q eine kleinere Dimension als P besitzt, ist ϕ und damit auch ψ nicht injektiv. Andererseits ist wegen $\sigma = \sigma\psi = \sigma\psi^2 = \cdots = \sigma\psi^n$ die Abbildung ψ nicht nilpotent. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage des Lemmas 2.3.

Satz 2.4 *Zu jedem einfachen Modul M gibt es einen prinzipalen unzerlegbaren Modul P mit $P/JP = M$.*

Beweis Es sei $0 \neq m \in M$. Definiere $\phi : \Lambda \to M$ durch $\phi(\lambda) = \lambda m$, $\lambda \in \Lambda$. Da M einfach ist, ist ϕ surjektiv. Wegen $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ muss mindestens ein P_i nichttrivial auf M abgebildet werden. Für dieses P_i gilt die Behauptung des Satzes.

Satz 2.5 *Es seien P_1 und P_2 zwei prinzipale unzerlegbare Moduln mit Kopf M. Dann gilt $P_1 \simeq P_2$.*

Bevor wir den Beweis für Satz 2.5 liefern, fassen wir die bisherigen Erkentnisse im folgenden Theorem zusammen.

Theorem 2.6 *Die Zuordnung $P \rightsquigarrow P/JP$ liefert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der prinzipalen unzerlegbaren Moduln und den Isomorphieklassen der einfachen Moduln.*

Für den *Beweis* des Satzes 2.5 verwenden wir das Lemma 2.3. Die Projektivität von P_1 liefert einen Homomorphismus $\beta_1 : P_1 \to P_2$ mit $\pi_2\beta_1 = \pi_1 : P_1 \to M$, und die Projektivität von P_2 liefert einen Homomorphismus $\beta_2 : P_2 \to P_1$ mit $\pi_1\beta_2 = \pi_2 : P_2 \to M$. Wir betrachten dann die Zusammensetzung $\psi = \beta_2\beta_1 : P_1 \to P_1$. Es gilt $\pi_1\psi = \pi_1$. Wir haben also einen Endomorphismus von P_1 gewonnen, der wegen $\pi_1 = \pi_1\psi = \pi_1\psi^2 = \cdots$ nicht nilpotent sein kann. Gemäss dem Lemma ist folglich ψ ein Isomorphismus. Dies bedeutet insbesondere, dass β_1 injektiv und β_2 surjektiv ist. Vertauscht man die Rollen von β_1 und β_2, so erhält man, dass β_1 surjektiv und β_2 injektiv ist. Damit folgt, dass sowohl β_1 wie auch β_2 Isomorphismen sind.

Im folgenden wird der Begriff der *Loewy-Reihe* eines Moduls eine Rolle spielen. Darunter versteht man die am schnellsten absteigenden Reihe von Untermoduln, deren sukzessive Faktoren halbeinfach sind. Für den Modul A lässt sich die Loewy-Reihe beschreiben durch

$$A \supset JA \supset J^2A \supset \cdots \supset J^{n-1}A \supset J^nA \supset \cdots \ ,$$

wo wir $J^{k+1}A = J(J^kA)$ gesetzt haben. Wegen der endlichen Dimension von A endet die Reihe immer mit 0. Es gibt also eine kleinste Zahl n mit $J^nA = 0$. Diese Zahl heisst die *Loewy-Länge* von A. Sie entspricht der Anzahl nichttrivialer *Loewy-Schichten* von A.

Satz 2.7 *Es seien M und N zwei einfache Λ-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(JP/J^2P,N),$$

wo P der prinzipale unzerlegbare Modul mit Kopf M ist. Insbesondere ist $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N)$ genau dann nichttrivial, wenn N als direkter Summand in JP/J^2P vorkommt.

Beweis Wir betrachten die kurze exakte Folge $0 \to JP \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ und den Beginn der dadurch induzierten langen Ext-Sequenz, wobei wir an zweiter Stelle den (einfachen) Modul N einsetzen:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P,N) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(JP,N) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \to 0 \ .$$

Es gilt dann

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P/JP,N)$$

und

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(JP,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(JP/J^2P,N) \ .$$

Da μ^* die Nullabbildung ist, entnimmt man aus der der exakten Folge den Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(JP/J^2P,N) \ .$$

Dies war zu beweisen.

III.3. Die Gruppenalgebra einer p-Gruppe.

Es sei G ein p-Gruppe, d.h. eine Gruppe deren Ordung eine Potenz der Primzahl p ist.

Satz 3.1 *Es sei G eine p-Gruppe und k ein Körper der Charakteristik p. Dann ist k der einzige einfache kG-Modul und kG ist unzerlegbar.*

Für den Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.2 *Es sei G eine p-Gruppe und k ein Körper der Charakterstik p. Ist M ein kG-Modul, $M \neq 0$, dann existiert $0 \neq b \in M$ mit $xb = b$ für alle $x \in G$.*

Beweis Man betrachte $0 \neq a \in M$ und die Unter*gruppe* A vom M erzeugt von allen xa, $x \in G$. Als homomorphes Bild von $\mathbb{F}_pA$ besitzt A eine p-Potenzordnung. Die Einteilung von A in Bahnkurven unter der G-Operation ergibt $A = A^G \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$, wo A^G die Fixelemente und C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ die Bahnkurven mit $|C_i| \geq 2$ bezeichnet. Da $|C_i|$ eine p-Potenz ist, folgt $|A| \equiv |A^G| \mod p$. Damit kann A^G nicht nur aus dem Nullelement bestehen. Es gibt also ein nichttriviales Fixelement $0 \neq b \in A^G$.

Beweis des Satzes 3.1. Es sei M ein einfacher kG-Modul. Nach Lemma 3.2 existiert ein nichttriviales Fixelement $b \in M$. Dann ist aber $kb \subseteq M$ ein nichttrivialer Untermodul von M. Da M einfach ist, folgt daraus $M = kb \simeq k$.

Um zu zeigen, dass kG unzerlegbar ist, betrachten wir die Projektion $\pi : kG \to kG/J(kG)$. Da k der einzige einfache kG-Modul ist, muss $kG/J(kG)$ eine direkte Summe von Kopien von k sein; insbesondere ist die Operation von G in $kG/J(kG)$ trivial. Für die Elemente $x - 1 \in kG$, $x \in G$ folgt daraus

$$\pi(x-1) = \pi(x) - \pi(1) = \pi(x \cdot 1) - \pi(1) = x\pi(1) - \pi(1) = \pi(1) - \pi(1) = 0 .$$

Die Elemente $x - 1$, $x \in G$ spannen aber in kG einen k-Unterraum der Codimension 1 auf. Da π nicht die Nullabbildung ist, folgt $\dim_k(kG/J(kG)) = 1$. Ist nun $kG = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_m$ die Zerlegung von kG in die prinzipalen unzerlegbaren Moduln, so folgt

$$kG/J(kG) = P_1/JP_1 \oplus P_2/JP_2 \oplus \cdots \oplus P_m/JP_m$$

Dies impliziert $m = 1$ und damit ist kG unzerlegbar.

Korollar 3.3 *Es sei G eine p-Gruppe mit $|G| = p^n$ und k sei ein Körper der Charakteristik p. Ist P ein projektiver kG-Modul, so ist P frei. Insbesondere ist $\dim_k P$ ein Vielfaches von p^n.*

Beweis Es sei P ein projektiver Modul über kG. Dann ist P direkter Summand in einem freien Modul und damit nach dem Satz von Krull-Remak-Schmidt eine direkte Summe von prinzipalen unzerlegbaren Moduln. In unserem Fall ist P also eine direkte Summe von Kopien von kG, also frei.

Wir werden weiter unten zeigen, dass auch die Umkehrung des Satzes 3.1 richtig ist: Genau dann ist G eine p-Gruppe, wenn k der einzige einfache kG-Modul ist, bzw. wenn kG unzerlegbar ist. Vorher betrachten wir aber noch kurz p'-Gruppen. Die Gruppe G heisst eine p'-Gruppe, wenn die Primzahl p die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt.

Satz 3.4 *Es sei k ein Körper der Charakteristik p und G eine p'-Gruppe. Dann ist kG halbeinfach.*

Beweis Es ist zu zeigen, dass jeder Untermodul B eines kG-Moduls A ein direktes Komplement besitzt. Zu diesem Zweck wählen wir eine k-lineare Abbildung $f : A \to B$ mit $f|_B = 1_B$; eine solche ergibt sich aus einer entsprechenden Basiswahl in A. Mit Hilfe von f definieren wir eine Abbildung $\phi : A \to B$ durch die Vorschrift

$$\phi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x f(x^{-1}a) \ .$$

Wir behaupten, dass ϕ ein kG-Modulhomomorphismus ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \phi(ya) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x f(x^{-1}ya) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} y(y^{-1}x) f(x^{-1}ya) \\ &= y\phi(a) \ . \end{aligned}$$

Ausserdem folgt für $b \in B$ wegen $f(b) = b$ sofort $\phi(b) = b$.

Damit ist ϕ ein linksseitiges Inverses der Einbettung $B \subseteq A$. Setzen wir $C = \ker \phi$, so folgt sofort $A \simeq B \oplus C$, so dass B in A in der Tat ein Komplement besitzt.

Aus diesem Resultat folgt, dass eine nichttriviale p'-Gruppe nichttriviale einfache kG-Moduln besitzt, d.h. einfache Moduln, die von k verschieden sind. Zerlegen wir nämlich kG in eine direkte Summe von einfachen Moduln, so muss unter diesen mindestens einer vorkommen, in dem die G-Operation nichttrivial ist. Denn sonst wäre die G-Operation in kG ebenfalls trivial.

Für die nächsten zwei Sätze, die beide wichtige Folgerungen aus dem obigen Resultat sind, benötigen wir das folgende einfache Lemma.

Lemma 3.5 *Es sei U eine Untergruppe von G. Dann ist kG, aufgefasst als kU-Modul, frei.*

Beweis Es sei $G = \bigcup_{i=1}^{m} U z_i$ eine Zerlegung von G in disjunkte U-Nebenklassen. Für kG, aufgefasst als kU-Modul, gilt dann offensichtlich

$$kG = \bigoplus_{i=1}^{m} (kU) z_i$$

Damit ist $z_1, z_2, \ldots, z_m$ eine kU-Basis von kG.

Wir beweisen nun zuerst die Umkehrung unseres Satzes 3.1 über p-Gruppen.

Satz 3.6 *Es sei k ein Körper der Charakteristik p. Genau dann ist G eine p-Gruppe, wenn k der einzige einfache kG-Modul ist.*

Beweis Es bleibt zu zeigen, dass es ausser k noch weitere einfache kG-Moduln gibt, falls G keine p-Gruppe ist. Wenn aber G keine p-Gruppe ist, gibt es neben p eine Primzahl q, $q \neq p$, die ein Teiler von $|G|$ ist. Nach dem Satz von Cauchy gibt es dann in G ein Element $e \neq y$ der Ordung q. Es bezeichne C die zyklische Untergruppe von G, die von y erzeugt wird. Wir betrachten nun kG als kC-Modul: nach obigen Satz ist kG frei über kC. Ferner haben wir gesehen, dass kC nichttriviale einfachen kC-Modul als direkte Summanden enthält. Unter den kC-Kompositionsfaktoren von kG gibt es also nichttriviale. Natürlich erhalten wir die kC-Kompositionsfaktoren von kG auch, indem wir zuerst die kG-Kompositionsfaktoren von kG betrachten, und diese dann auf kC einschränken. Wir sehen also, dass sich unter den kG-Kompositionsfaktoren von kG solche befinden müssen, in denen kC nichttrivial operiert. Dies war zu beweisen.

Der letzte Satz dieses Abschnittes liefert eine überraschende Information über die Dimension der prinzipalen unzerlegbaren Moduln.

Satz 3.7 *Es sei p eine Primzahl, k ein Körper der Charakteristik p und G eine Gruppe der Ordnung $p^n q$ mit p und q teilerfremd. Ist P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul, so ist* $\dim_k P$ *ein Vielfaches von p^n.*

Beweis Es sei S eine p-Sylowuntergruppe von G; bekanntlich ist die Ordung von S gerade p^n. Ist nun P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul, so existiert ein kG-Modul Q mit $P \oplus Q = kG$. Als kS-Modul ist also P ein direkter Summand des freien kS-Moduls kG. Als kS-Modul ist deshalb P ebenfalls projektiv, und da S eine p-Gruppe ist, ist P eine direkte Summe von Kopien von kS. Die k-Dimension von P ist also ein Vielfaches von der Ordung von S, dh. von p^n. Dies war zu beweisen.

III.4. Der duale Modul.

Es seien A und B zwei kG-Moduln. Das Tensorprodukt $A \otimes_k B$ wird durch die Festsetung

$$x(a \otimes b) = xa \otimes xb \ , \quad a \in A,\ b \in B,\ x \in G$$

zu einem kG-Modul. Ebenso wird die Homomorphismengruppe $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ durch die Festsetzung

$$(xf)(a) = x(f(x^{-1}a)), \quad a \in A,\ x \in G \ , \quad f : A \to B$$

zu einem kG-Modul. In beiden Fällen sprechen wir von der *diagonalen* Operation von G. Wenn wir im Folgenden die Symbole "$A \otimes_k B$" und "$\mathrm{Hom}_k(A, B)$" verwenden, so bezeichnen wir damit die entsprechenden kG-Moduln.

Der zu A *duale Modul* A^* ist definiert durch $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$. Nach obigem ist die kG-Operation in A^* gegeben durch

$$(xf)a = f(x^{-1}a) \ , a \in A,\ x \in G,\ f : A \to k \ .$$

Natürlich gilt $A^{**} = A$.

Der Vollständigkeit halber merken wir an: $A \otimes_k k \simeq A \simeq k \otimes_k A$ und $\mathrm{Hom}_k(k, B) = B$. Ferner gilt $A \otimes_k B \simeq B \otimes_k A$.

Für den dualen Modul gelten offenbar die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ ist genau dann exakt, wenn die duale Folge $0 \to A_3^* \to A_2^* \to A_1^* \to 0$ exakt ist. Sind die beiden Folgen exakt, so zerfällt die eine genau dann, wenn die andere zerfällt.

(b) Der Modul A ist genau dann einfach, wenn A^* einfach ist.

(c) Der Modul A ist genau dann unzerlegbar, wenn A^* unzerlegbar ist.

Als nächstes beweisen wir den folgenden grundlegenden Satz.

Satz 4.1 *Es seien A, B, C drei kG-Moduln. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_k(B, C)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B, C)$$

definiert durch

$$(\Phi\varphi)(a \otimes b) = (\varphi(a))(b) \ , \quad a \in A \ , \quad b \in B \ , \quad \varphi : A \to \mathrm{Hom}_k(B, C)$$

einen natürlichen Isomorphismus.

Beweis Wir weisen zuerst nach, dass $\Phi\varphi : A \otimes_k B \to C$ ein kG-Modulhomomorphismus ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}(\Phi\varphi)(x(a \otimes b)) &= (\Phi\varphi)(xa \otimes xb) \\ &= (\varphi(xa))(xb) \\ &= (x(\varphi(a)))(xb) \\ &= x((\varphi(a))(x^{-1}xb)) \\ &= x((\varphi(a))(b)) \\ &= x((\Phi\varphi)(a \otimes b)) \ .\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass Φ ein Isomorphismus ist, geben wir das Inverse Ψ an. Dieses ist definiert durch

$$((\Psi g)(a))(b) = g(a \otimes b) \ , \quad a \in A \ , \quad b \in B \quad g : A \otimes_k B \to C \ .$$

Wir überlassen es dem Leser die Gleichungen $\Psi\Phi = 1$ und $\Phi\Psi = 1$ nachzuweisen. Damit ist Φ ein Isomorphismus.

Dieses einfache Resultat führt zu einer Reihe von interessanten Folgerungen. Als erstes merken wir das folgende Korollar an.

Korollar 4.2 *Für kG-Moduln A und B gelten natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B)) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, A^*) \ .$$

Beweis Wir erhalten der Reihe nach

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(k \otimes_k A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B))$$

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(A, B^{**}) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_k(B^*, k)) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B^*, k)$$

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(B^* \otimes_k A, k) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, \mathrm{Hom}_k(A, k)) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(B^*, A^*) \ .$$

Eine analoge Aussage gilt dann konsequenterweise auch für $\mathrm{Ext}^*_{kG}(-,-)$ (der Stern steht für irgend eine natürliche Zahl $1, 2, \ldots$) anstelle von $\mathrm{Hom}_{kG}(-,-)$.

Korollar 4.3 *Für kG-Moduln A und B gelten natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(A, B) \simeq \mathrm{Ext}^*_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A, B)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{kG}(A \otimes_k B^*, k) \simeq \mathrm{Ext}^*_{kG}(B^*, A^*) \ .$$

Beweis Es sei

$$\mathbf{P} \ : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots P_1 \to P_0 \to 0$$

eine projektive Resolution des kG-Moduls k. Dann gilt nach Satz 4.1

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P} \otimes_k A, B) &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P}, \mathrm{Hom}_k(A, B)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P} \otimes_k A \otimes_k B^*, k) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P} \otimes_k B^*, A^*) \ .\end{aligned}$$

Wenn wir nun zeigen können, dass für einen projektiven kG-Modul P und einen kG-Modul C das Tensorprodukt $P \otimes_k C$ wiederum projektiv ist, so ergibt die Homologiebildung in den obigen Komplexen die Behauptung des Korollars.

Die Tatsache, dass $P \otimes_k C$ projektiv ist, weisen wir nach, indem wir zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k C, -)$$

ein exakter Funktor ist. Es sei also $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ eine exakte Folge. Da k ein Körper ist, ist die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(C, B_1) \to \mathrm{Hom}_k(C, B_2) \to \mathrm{Hom}_k(C, B_3) \to 0$$

ebenfalls exakt. Anwendung von $\mathrm{Hom}_{kG}(P, -)$ liefert, da P projektiv ist, die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(P, \mathrm{Hom}_k(C, B_1)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P, \mathrm{Hom}_k(C, B_2)) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P, \mathrm{Hom}_k(C, B_3)) \to 0$$

Nach Satz 4.1 stimmt diese Folge mit

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k C, B_1) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k C, B_2) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P \otimes_k C, B_3) \to 0$$

überein. Da diese exakt ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Schliesslich beweisen wir den folgenden überraschenden Satz.

Satz 4.4 *Die Abbildung $\Psi : kG \to (kG)^*$ definiert durch*

$$(\Psi(x))(y) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } y = x \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus von kG -Moduln.

Beweis Wir bemerken zuerst, dass Ψ der durch die Gruppenelemente gegebenen Basis des k-Vektorraums kG die dazu duale Basis zuordnet. Wegen der endlichen Dimension ist Ψ ein Isomorphismus (von k-Vektorräumen). Es bleibt somit nur zu zeigen, dass Ψ ein kG-Modulhomomorphismus ist. Benützten wir das aus der linearen Algebra bekannte Kronecker-Delta sinngemäss, so erhalten wir:

$$(\Psi(zx))(y) = \delta_{zx,y} = \delta_{x,z^{-1}y} = (\Psi(x))(z^{-1}y) = (z(\Psi(x)))(y) \ .$$

Dies war zu beweisen.

Korollar 4.5 *Ist P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul, so ist auch P^* ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul.*

Beweis Definitionsgemäss ist P ein unzerlegbarer direkter Summand von kG. Dann ist aber P^* ein unzerlegbarer direkter Summand von $(kG)^*$, also nach unserem Satz von kG. Dies war zu beweisen.

Korollar 4.6 *Es sei P ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul. Dann besitzt P nur einen einzigen einfachen Untermodul.*

Beweis Es seien M_1 und M_2 zwei verschiedene einfache Untermoduln von P. Dann gibt es eine Einbettung $0 \to M_1 \oplus M_2 \to P$. Dies liefert eine Projektion $P^* \to M_1^* \oplus M_2^* \to 0$. Da P^* ein prinzipaler unzerlegbarer kG-Modul ist, und die Moduln M_1^* und M_2^* einfach sind, ist dies ein Widerspruch.

Man nennt allgemein den grössten halbeinfachen Untermodul eines Moduls A den *Sockel* von A. In dieser Terminologie besagt Korollar 4.6, dass der Sockel eines prinzipalen unzerlegbaren Moduls einfach ist. (Man kann mit etwas grösserem Aufwand sogar zeigen, dass der Sockel und der Kopf eines prinzipalen unzerlegbaren Moduls zueinander isomorph sind. Darauf gehen wir hier nicht ein.)

Korollar 4.7 *Es sei P ein projektiver kG-Modul. Dann ist auch P^* projektiv.*

Beweis Es ist P eine direkte Summe von prinzipalen unzerlegbaren kG-Moduln. Dann ist P^* die direkte Summe der dazu dualen prinzipalen unzerlegbaren Moduln. Da jeder davon wieder ein prinzipaler unzerlegbarer Modul ist, ist P^* als direkte Summe von projektiven Moduln projektiv.

Korollar 4.8 *Es sei P ein projektiver kG-Modul. Dann ist für jede exakte Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ die induzierte Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_3, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_2, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_1, P) \to 0$$

exakt.

Beweis Nach obigem ist P^* projektiv. Da die Folge

$$0 \to A_3^* \to A_2^* \to A_1^* \to 0$$

exakt ist, folgt, dass die induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(P^*, A_3^*) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P^*, A_2^*) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P^*, A_1^*) \to 0$$

exakt ist. Diese stimmt aber mit der Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_3, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_2, P) \to \mathrm{Hom}_{kG}(A_1, P) \to 0$$

überein.

In der homologischen Algebra bezeichnet man einen Λ-Modul I als *injektiv*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, I)$ exakt ist, dh. wenn jede kurze exakte Folge $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ in eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_3, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_2, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_1, I) \to 0$$

übergeführt wird. (Wir erinnern daran, dass diese Folge – *mit Ausnahme der Null am rechten Ende* – für beliebige Moduln I exakt ist.) Das obige Korollar sagt also in dieser Terminologie, dass für $\Lambda = kG$ ein projektiver Modul P auch *injektiv* ist. In der Tat sind für $\Lambda = kG$ die beiden Begriffe *projektiv* und *injektiv* gleichbedeutend.

III.5. Restriktion und Induktion

Es sei U eine Untergruppe von G. Ein kG-Modul A kann in offensichtlicher Weise als kU-Modul angesehen werden, indem man nur die Operation der Untergruppe U in A betrachtet. In den meisten Fällen ist aus dem Zusammenhang ersichtlich, ob A als kG-Modul oder als kU-Modul aufzufassen ist. In einigen Fällen wird es aber notwendig sein, dies explizit zu machen; dann bezeichnen wir den zum kG-Modul gehörigen kU-Modul mit $A{\downarrow_U}$. der Übergang von A zu $A{\downarrow_U}$ heisst *Restriktion* (von G auf die Untergruppe U).

In der umgekehrten Richtung ordnet man dem kU-Modul B den kG-Modul $B\uparrow^G$ zu; dieser Übergang heisst *Induktion* (von der Untergruppe U zu G). Der induzierte Modul ist durch

$$B{\uparrow^G} = kG \otimes_{kU} B$$

definiert, wobei für das Tensorprodukt kG als Rechtsmodul aufzufassen ist. Die kG-Operation in $B{\uparrow^G}$ ist durch die kG-Linksmodulstruktur von kG gegeben.

Lemma 5.1 *Ist $G = \bigcup_{i=1}^{l} y_i U$ eine disjunkte Zerlegung von G in U-Nebenklassen, so ist $B{\uparrow^G}$ als k-Vektorraum die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^{l} y_i \otimes B$.*

Beweis Jedes Element $x \in G$ lässt sich in eindeutiger Weise als $y_i u$ schreiben für ein gewisses i, $i = 1, 2, \ldots, l$, und ein gewisses $u \in U$. Indem man die Basis von kG entsprechend gruppiert, erhält man $kG = \bigoplus_{i=1}^{l} y_i kU$. Damit folgt $kG \otimes_{kU} B = \bigoplus_{i=1}^{l} y_i kU \otimes_{kU} B = \bigoplus_{i=1}^{l} y_i \otimes B$.

Zwischen der Restriktion und der Induktion besteht ein enger Zusammenhang, welchen wir im folgenden Satz (Frobenius-Reziprozität) beschreiben.

Satz 5.2 *Es sei U eine Untergruppe von G, ferner sei A ein kG Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kU}(B, A{\downarrow_U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kG}(B{\uparrow^G}, A) \ ,$$

gegeben durch

$$(\Phi(\beta))(x \otimes b) = x(\beta(b)) \ , \quad x \in G \ , \quad b \in B \ , \quad \beta : B \to A{\downarrow_U} \ .$$

Beweis Wir begnügen uns damit, die Umkehrabbildung Ψ zu definieren und überlassen den Beweis der weiteren Details wie die Natürlichkeit des Isomorphismus Φ dem Leser. Für $\alpha : B{\uparrow^G} \to A$ und $b \in B$ ist $\Psi(\alpha) : B \to A{\downarrow_U}$ definiert durch

$$(\Psi(\alpha))(b) = \alpha(1_G \otimes b) \ .$$

Es ist dann nachzuweisen, dass $\Phi(\beta)$ ein kG-Modulhomomorphismus ist und dass sowohl $\Psi\Phi = 1$ wie auch $\Phi\Psi = 1$ gilt.

In der Sprache der Kategorientheorie besagt dieser Satz, dass der Funktor $B \rightsquigarrow B\!\uparrow^G$ linksadjungiert zum sogenannten "Vergissfunktor" $A \rightsquigarrow A\!\downarrow_U$ ist.

Der obige Satz impliziert ein analoges Resultat für die Ext-Gruppen.

Satz 5.3 *Es sei U eine Untergruppe von G, ferner sei A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Ext}^*_{kU}(B, A\!\downarrow_U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{kG}(B\!\uparrow^G, A) \ .$$

Beweis Um den Isomorphismus zu erhalten, wähle man eine kU-projektive Resolution $\mathbf{P}$ von B, bilde den Komplex $\mathrm{Hom}_{kU}(\mathbf{P}, A\!\downarrow_U)$ und wende auf die einzelnen Gruppen den Homomorphismus Φ des Satzes 5.2 an. Nun ist der Komplex $\mathbf{P}\!\uparrow^G = \{kG \otimes_{kU} P_n\}$ eine projektive Resolution von $kG \otimes_{kU} B$. Wir erhalten als Homologie von $\mathrm{Hom}_{kU}(\mathbf{P}, A\!\downarrow_U)$ die Ext-Gruppen auf der linken Seite und als Homologie von $\mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P}\!\uparrow^G, A)$ die Ext-Gruppen auf der rechten Seite. Dies war zu beweisen.

Im Rest dieses Abschnittes betrachten wir noch den Fall, wo die Untergruppe ein Normalteiler ist.

Lemma 5.4 *Es sei N ein Normalteiler von G und B ein kN-Modul. Für jedes $y \in G$ ist*

$$y \otimes B = \{y \otimes b \mid b \in B\} \subseteq B\!\uparrow^G$$

ein kN-Untermodul von $B\!\uparrow^G\!\downarrow_N$.

Der kN-Untermodul $y \otimes B$ heisst der unter $y \in G$ zu B *konjugierte Modul*.

Beweis Es sei $u \in N$. Dann gilt unter Berücksichtigung der kG-Modulstruktur von $B\!\uparrow^G$ für $b \in B$

$$u(y \otimes b) = y(y^{-1}uy) \otimes b = y \otimes (y^{-1}uy)b \ .$$

Der k-Unterraum $y \otimes B$ von $B\!\uparrow^G$ ist somit unter der kN-Operation stabil. Dies war zu beweisen.

Zusammen mit den Lemmas 5.1 und 5.4 erhalten wir das folgende Resultat.

Lemma 5.5 *Es sei N ein Normalteiler von G, B ein kN-Modul und $G = \bigcup_{i=1}^l y_i N$ eine Zerlegung von G in N-Nebenklassen. Dann gilt*

$$B\!\uparrow^G\!\downarrow_N = \bigoplus_{i=1}^l y_i \otimes B \ .$$

Damit sind wir in der Lage, den Satz von Clifford zu beweisen, welcher eine Aussage über die Restriktion von einfachen Moduln auf Normalteiler beinhaltet.

Satz 5.6 *Es sei N ein Normalteiler von G und A sei ein einfacher kG-Modul. Dann ist $A\downarrow_N$ halbeinfach und es gilt*

$$A\downarrow_N = \bigoplus_{i=1}^{l} B_i \ ,$$

wo B_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ zueinander konjugierte einfache kN-Moduln sind.

Beweis Es sei B_0 ein einfacher kN-Untermodul von $A\downarrow_N$. Wir betrachten $B_0\uparrow^G$. Ist $G = \bigcup_{i=1}^{l} y_i N$ eine Zerlegung von G in N-Nebenklassen, so ist nach dem Lemma

$$B_0\uparrow^G\downarrow_N = \bigoplus_{i=1}^{l} y_i \otimes B_0 \ .$$

Da B_0 einfach ist, ist auch jeder zu B_0 konjugierte Modul einfach, so dass $B_0\uparrow^G\downarrow_N$ halbeinfach ist. Der Satz 5.2 liefert den k-Vektorraumisomorphismus

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{kN}(B_0, A\downarrow_N) \to \mathrm{Hom}_{kG}(B_0\uparrow^G, A) \ .$$

Der Einbettung $B_0 \subseteq A\downarrow_N$ entspricht unter Ψ somit eine nichttriviale Abbildung $\beta : B_0\uparrow^G \to A$. Da A einfach ist, muss β surjektiv sein. Dies bedeutet, dass $A\downarrow_N$ ein Quotient des halbeinfachen Moduls $B_0\uparrow^G\downarrow_N$, also insbesondere selbst halbeinfach ist. Ausserdem können als direkte Summanden von $A\downarrow_N$ nur direkte Summanden von $B_0\uparrow^G\downarrow_N$ auftreten, also zu B_0 konjugierte kN-Moduln.

Für Anwendungen wollen wir jetzt spezielle Normalteiler der Gruppe G ansehen, Normalteiler, die in der modularen Darstellungstheorie eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Ist G eine Gruppe und p eine Primzahl, so nennen wir den Normalteiler N von G einen p-Normalteiler, wenn N eine p-Gruppe ist. Sind N und N' zwei p-Normalteiler von G, so ist offenbar auch NN' ein p-Normalteiler von G. Es ist nämlich $NN'/N \simeq N'/N' \cap N$. Mit $|N|$ und $|N'|$ ist damit auch $|NN'|$ eine p-Potenz. Der grösste p-Normalteiler von G, d.h. das Produkt aller p-Normalteiler von G wird mit O_pG bezeichnet.

Auf analoge Weise heisst ein Normalteiler $\overline{N}$ von G ein p'-Normalteiler, wenn $\overline{N}$ eine p'-Gruppe ist. Wie oben zeigt man, dass ein grösster p'-Normalteiler von G existiert, er wird mit $O_{p'}G$ bezeichnet.

Diese Bildungen lassen sich iterieren; z.B. ist $O_{p'p}G$ definiert durch die Gleichung

$$O_{p'p}G/O_{p'}G = O_p(G/O_{p'}G) \ .$$

Als Anwendung beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 5.7 *Es sei A ein einfacher kG-Modul. Dann operiert O_pG trivial in A.*

Beweis Setze $N = O_pG$. Dann ist $A\downarrow_N$ nach dem Satz von Clifford (Satz 5.6) halbeinfach. Da N eine p-Gruppe ist, muss $A\downarrow_N$ eine direkte Summe von Kopien des trivialen Moduls k sein; insbesondere ist $A\downarrow_N$ ein trivialer kN-Modul. Dies bedeutet aber, dass N trivial in A operiert.

Wir machen hier noch einige **Zusätze**, welche die Resultate in der ersten Hälfte des Abschnittes III.5 in einen allgemeineren Zusammenhang stellen.

Satz 5.8 *Es sei U eine Untergruppe von G, ferner sei A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kU}(A\downarrow_U, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kG}(A, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B))$$

gegeben durch

$$((\Phi(\alpha))(a))(x) = \alpha(xa) \ .$$

Beweis Wie im Beweis des Satzes 5.2 begnügen wir uns damit, die inverse Abbildung anzugeben und überlassen die weiteren Details dem Leser. Für $\beta : A \to \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)$ und $a \in A$ definieren wir $(\Psi(\beta))(a) = (\beta(a))(1_G)$. Es gilt dann $\Psi\Phi = 1$ und $\Phi\Psi = 1$.

In der Sprache der Kategorientheorie besagt dieser Satz, dass der Funktor $B \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)$ rechtsadjungiert ist zum Vergissfunktor $A \rightsquigarrow A\downarrow_U$.

Wie oben impliziert dieser Satz ein Resultat für die Ext-Gruppen.

Satz 5.9 *Es sei U eine Untergruppe von G, ferner sei A ein kG-Modul und B ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^*_{kU}(A\downarrow_U, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_{kG}(A, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)) \ .$$

Beweis Um die rechte Seite zu berechnen, wählt man eine kG-projektive Resolution $\mathbf{P}$ von A, bildet den Komplex $\mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P}, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B))$ und berechnet die Homologie.Gemäss Satz 5.8 gilt $\mathrm{Hom}_{kG}(\mathbf{P}, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B)) = \mathrm{Hom}_{kU}(\mathbf{P}\downarrow_U, B)$. Da $\mathbf{P}\downarrow_U$ offensichtlich auch eine kU-projektive Resolution von $A\downarrow_U$ ist, folgt die Behauptung.

Die obigen Sätze, lassen sich nicht nur für die Gruppenalgebra kG einer Gruppe G und die Gruppenalgebra kU einer Untergruppe U beweisen, sondern in einem viel allgemeineren Zusammenhang, nämlich für einen Ring Λ und einen Unterring Λ' (wobei gewisse leicht zu formulierende Eigenschaften erfüllt sein müssen). Wir wollen uns hier damit nicht beschäftigen; näheres kann man in Büchern über Homologische Algebra nachlesen. Das folgende durchaus überraschende Resultat ist hingegen stark von ganz speziellen Eigenschaften der Gruppenalgebren abhängig.

Satz 5.10 *Es sei U eine Untergruppe von G, ferner sei A ein kU-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kU}(kG, A) \xrightarrow{\sim} kG \otimes_{kU} A$$

definiert durch

$$\Phi(\varphi) = \sum_{x \in G} x^{-1} \otimes \varphi(x) \ .$$

Beweis Wir beschränken uns hier auf knappe Hinweise. Es ist zuerst zu zeigen, dass Φ wohldefiniert ist. Da die Dimensionen der Vektorräume auf der linken und rechten Seite übereinstimmen, ist dann zu prüfen, dass kein nichttriviales φ in Null übergeht und das Φ ein Homomorphismus von kG-Moduln ist. Schliesslich ist die Natürlichkeit noch nachzuweisen.

Der Satz 5.10 besagt, dass im betrachteten Fall die beiden zum Vergissfunktor $B \rightsquigarrow B\!\downarrow_U$ links- und rechtsadjungierte Funktoren natürlich äquivalent sind.

Satz 5.11 *Es sei U eine Untergruppe von G und B sei ein kU-Modul. Dann sind die kG-Moduln $\mathrm{Hom}_{kU}(kG, B^*)$ und $(kG \otimes_{kU} B)^*$ zueinander isomorph.*

Beweis Für den kG-Modul A betrachen wir den Isomorphismus (gemäss Satz 5.2)

$$\mathrm{Hom}_{kU}(B, A\!\downarrow_U) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(kG \otimes_{kU} B, A)$$

und den Isomorphismus (gemäss Korollar 4.2 und Satz 5.8)

$$\mathrm{Hom}_{kU}(B, A\!\downarrow_U) \cong \mathrm{Hom}_{kU}((A\!\downarrow_U)^*, B^*) \cong \mathrm{Hom}_{kU}((A^*)\downarrow_U, B^*) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A^*, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B^*)) \ .$$

Aus Satz 5.10 folgt, wiederum zusammen mit Korollar 4.2

$$\mathrm{Hom}_{kG}(A^*, (kG \otimes_{kU} B)^*) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(A^*, \mathrm{Hom}_{kU}(kG, B^*))$$

Wählt man $A^* = kG$, so folgt die Behauptung.

III.6. Normalteiler und Blockzugehörigkeit

Es sei N ein Normalteiler von G und Q die zugehörige Faktorgruppe G/N. Ist A ein kQ-Modul, so kann offensichtlich A auch als kG-Modul aufgefasst werden: ein Element $x \in G$ operiert in A wie sein Bild in Q in A operiert. Ist A als kQ-Modul einfach, so ist A natürlich auch als kG-Modul einfach. Ist umgekehrt B ein kG-Modul, in dem die Elemente von N trivial, dh. als Identität operieren, so kann B offensichtlich als kQ-Modul aufgefasst werden. Wiederum gilt, dass, wenn B als kG-Modul einfach ist, dann ist B auch als kQ-Modul einfach. Unser erster Satz gibt ein Resultat über die Blockzugehörigkeit dieser Moduln.

Satz 6.1 *Es seien A und B zwei einfache kQ-Moduln im selben Block von kQ. Dann liegen A und B auch im selben Block von kG.*

Beweis Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(A,B) \neq 0$ stets $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) \neq 0$ impliziert. Dies ist aber klar, wenn man mit Erweiterungen arbeitet. Ist $0 \to B \to E \to A \to 0$ eine (nicht zerfallende) Erweiterung von kQ-Moduln, so kann sie auch als (nichtzerfallende) Erweiterung von kG-Moduln aufgefasst werden. Da die Blockzugehörigkeit via Erweiterungen definiert ist, beweist diese Überlegung die Behauptung.

Die in diesem Beweis benützte Überlegung liefert für kQ-Moduln A und B eine injektive Abbildung

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(A,B) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B)\ .$$

Über diese Abbildung – auch in einem etwas allgemeineren Rahmen – wollen wir in diesem Abschnitt eine stärkere Aussage herleiten. Insbesondere werden wir sehen, unter welchen Bedingungen diese Abbildung surjektiv ist. All dies verlangt eine Reihe von Vorbereitungen und neue Bezeichnungen.

Es sei A ein kG-Modul. Wir betrachten die Menge der Elemente von A, die unter der Operation des Normalteilers N fix bleiben; wir setzen also

$$A^N = \{a \in A \mid xa = a \text{ für alle } x \in N\}\ .$$

Einige Eigenschaften von A^N werden im folgenden Lemma zusammengestellt.

Lemma 6.2 *Für einen kG-Modul A gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *A^N ist ein kG-Untermodul von A, in dem N trivial operiert. Insbesondere ist A^N ein kQ-Modul.*

(b) *Genau dann operiert N trivial in A, wenn gilt $A^N = A$.*

(c) $A^N = \mathrm{Hom}_{kN}(k, A)\ .$

Beweis (a) Offensichtlich ist A^N ein k-Unterraum von A, in dem N definitionsgemäss trivial operiert. Für $y \in G$ und $u \in N$ gilt für alle $a \in A^N$

$$u(ya) = y(y^{-1}uy)a = ya \ ,$$

da $y^{-1}uy \in N$ trivial in A^N operiert. Damit ist A^N ein kG-Untermodul von A.

(b) Dies ist klar.

(c) Dem Element $a \in A^N$ ordnen wir den Homomorphismus $\phi : k \to A$ definiert durch $\phi(1) = a$ zu. Da a unter N fix bleibt ist ϕ ein kN-Modulhomomorphismus. Umgekehrt ordnen wir dem kN-Modulhomomorphismus $\phi : k \to A$ das Element $a = \phi(1)$ zu. Es gilt für $u \in N$

$$a = \phi(1) = \phi(u1) = u\phi(1) = ua \ ,$$

so dass a unter der Operation von N fix bleibt, $a \in A^N$. Die Zusammensetzungen der beiden so definierten Abbildungen sind offensichtlich jeweils die Identität. Damit ist die Aussage (c) bewiesen.

Lemma 6.3 *Es sei A ein einfacher kG-Modul. Dann gilt $A^N = 0$ oder N operiert trivial in A.*

Beweis Da A^N ein kG-Untermodul von A ist, gilt wegen der Einfachheit von A entweder $A^N = 0$ oder $A^N = A$. Im zweiten Fall operiert N trivial in A.

Zentral für das Folgende ist das Theorem, welches für bestimmte Ext-Gruppen über kG, kN und kQ das gegenseitige Verhältnis beschreibt.

Theorem 6.4 *Es sei N ein Normalteiler von G und A ein kG-Modul. Dann ist die folgende Sequenz exakt*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) \to \operatorname{Ext}^1_{kG}(k, A) \to \operatorname{Ext}^1_{kN}(k, A\!\downarrow_N) \ .$$

Der Beweis dieses Resultates ist nicht ganz einfach und er verlangt einige Vorbereitungen.

Lemma 6.5 *Es sei A ein kG-Modul und B ein kQ-Modul. Dann gilt*

$$\operatorname{Hom}_{kQ}(B, A^N) = \operatorname{Hom}_{kG}(B, A) \ .$$

Beweis Offensichtlich gibt jeder kQ-Modulhomomorpismus $\beta : B \to A^N$ Anlass zu einem kG-Modulhomomorphismus $\alpha : B \to A^N \to A$. Somit bleibt zu zeigen, dass jeder kG-Modulhomomorphismus $\alpha : B \to A$ über A^N faktorisiert. Dies ist aber klar, da die Elemente von N in B und deshalb auch im Bild trivial operieren.

Lemma 6.6 *Es gilt $kG \otimes_{kN} k \simeq kQ$ als kG-Moduln.*

Beweis Es sei $\pi : G \to Q$ die kanonische Projektion. Wir definieren eine Abbildung $\sigma : kG \otimes_{kN} k \to kQ$ durch $\sigma(y \otimes a) = \pi(y)$, $y \in G$, $a \in k$. Die Abbildung σ ist offensichtlich wohldefiniert, surjektiv und ein kG-Modulhomomorphismus. Da nach Lemma 3.5 die k-Dimension von $kG \otimes_{kN} k$ gleich der Ordung von Q ist, ist σ ein Isomorphismus.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Beweis des Theorems zu.

Beweis Wir betrachten die sogenannte Augmentierung $\epsilon : kQ \to k$ der Gruppenalgebra kQ, es ist dies der Algebrahomomorphismus, der durch $\epsilon(y) = 1$, $y \in G$ definiert wird. Der Kern $IQ = \ker \epsilon$ wird auch etwa Augmentierungsideal von kQ genannt. Es ist offensichtlich ein kQ-Untermodul der Codimension 1 in kQ. Damit erhalten wir eine kurze exakte Folge von kQ-Moduln

$$0 \to IQ \to kQ \to k \to 0 \ .$$

Auf diese wenden wir einmal den Funktor $\mathrm{Hom}_{kQ}(-, A^N)$ an. Ferner fassen wir die Sequenz als kurze exakte Folge von kG-Moduln auf und wenden darauf den Funktor $\mathrm{Hom}_{kG}(-, A)$ an. Wir erhalten damit das folgende Diagramm, in dem die senkrechten Isomorphismen nach Lemma 6.5 gegeben sind.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_{kQ}(k, A^N) & \rightarrowtail & \mathrm{Hom}_{kQ}(kQ, A^N) & \to & \mathrm{Hom}_{kQ}(IQ, A^N) & \to & \mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) & \to & 0 \\
\| & & \| & & \| & & & & \\
\mathrm{Hom}_{kG}(k, A) & \rightarrowtail & \mathrm{Hom}_{kG}(kQ, A) & \to & \mathrm{Hom}_{kG}(IQ, A) & \to & \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) & \to & \mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A)
\end{array}$$

Wegen der Exaktheit der Zeilen ergibt sich daraus sofort die Exaktheit der Folge

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A)$$

Es bleibt

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(kQ, A) \simeq \mathrm{Ext}^1_{kN}(k, A{\downarrow_N}) \ .$$

zu zeigen. Nach Lemma 6.6 gilt $kQ = k{\downarrow_N}{\uparrow^G}$. Damit folgt diese letztere Behauptung direkt aus Satz 5.3.

Im Rest des Abschnittes diskutieren wir einige Folgerungen der exakten Sequenz des Theorems.

Satz 6.7 *Es sei A ein einfacher kG-Modul mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \neq 0$. Dann operiert $O_{p'p}G$ trivial in A.*

Beweis Es sei $N = O_{p'}G$. Da kN halbeinfach ist, gilt $\mathrm{Ext}^1_{kN}(k, A{\downarrow_N}) = 0$. Mit Theorem 6.4 folgt dann

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, A^N) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \ .$$

Die Voraussetzung $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, A) \neq 0$ impliziert folglich $A^N \neq 0$. Da A einfach ist, bedeutet dies $A^N = A$, so dass N trivial in A operiert. Der Modul A ist folglich ein einfacher $k(G/O_{p'}G)$-Modul. Nach unserem Satz 5.7 operiert dann $O_p(G/O_{p'}G)$ trivial im $k(G/O_{p'}G)$-Modul A, also operiert $O_{p'p}G$ trivial im kG-Modul A.

Korollar 6.8 *Es sei $G = O_{p'p}G$. Dann besteht der Hauptblock nur aus dem trivialen Modul k.*

Beweis Wäre k nicht der einzige einfache Modul im Hauptblock von G, so würde ein nichttrivialer einfacher kG-Modul A existieren mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k,A) \neq 0$ oder $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,k) \neq 0$. Es gilt aber $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,k) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k^*,A^*) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(k,A^*)$. In beiden Fällen hätte man damit wegen $G = O_{p'p}G$ einen Widerspruch zur Aussage des Satzes 6.7.

Satz 6.9 *Es sei A ein einfacher kG-Modul im Hauptblock von kG. Dann operiert $O_{p'p}G$ trivial in A.*

Beweis Wir setzen $N = O_{p'p}G$. Nach der Definition des Hauptblockes genügt es, das Folgende zu zeigen: Es seien A und B zwei einfache kG-Moduln mit $\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) \neq 0$. Operiert N trivial in A, so operiert N auch trivial in B. (Der Fall $\mathrm{Ext}^1_{kG}(B,A) \neq 0$ lässt sich darauf zurückführen, indem man zu den dualen Moduln A^* und B^* übergeht.)

Wir betrachten den kG-Modul $\mathrm{Hom}_k(A,B)$. Es gilt $(\mathrm{Hom}_k(A,B))^N = \mathrm{Hom}_{kN}(A,B)$. Ist nämlich $f : A \to B$ fix unter der Operation von N, so gilt

$$f(a) = (uf)(a) = u(f(u^{-1}a)) \ , \quad u \in N \ , \quad a \in A \ ,$$

mit anderen Worten, f ist ein kN-Modulhomomorphismus.

Theorem 6.4 liefert die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, \mathrm{Hom}_{kN}(A,B)) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A,B)) \to \mathrm{Ext}^1_{kN}(k, (\mathrm{Hom}_k(A,B))\downarrow_N) \ .$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{Ext}^1_{kG}(k, \mathrm{Hom}_k(A,B)) = \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,B) \neq 0$. Wegen der Exaktheit muss also mindestens eine der anderen Gruppen ebenfalls nichttrivial sein. Wir betrachten diese beiden Fälle getrennt.

1. Es gelte $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(k, \mathrm{Hom}_{kN}(A,B)) \neq 0$. Dann gilt *a fortiori* $\mathrm{Hom}_{kN}(A,B) \neq 0$. Nach Voraussetzung operiert N trivial in A. Ist $\alpha : A \to B$ ein kN-Modulhomomorphismus so folgt also $\mathrm{im}\, \alpha \subseteq B^N$. Wir erhalten $B^N \neq 0$, also, da B einfach ist, $B^N = B$. Dies bedeutet aber, dass N trivial auf B operiert. Dies war zu beweisen.

2. Es sei $0 \neq \mathrm{Ext}^1_{kN}(k, \mathrm{Hom}_k(A,B)) = \mathrm{Ext}^1_{kN}(A\downarrow_N, B\downarrow_N)$. Nach Voraussetzung ist $A\downarrow_N$ eine direkte Summe von Kopien von k. Setzen wir ferner $B\downarrow_N = \bigoplus B_i$, B_i einfach, so folgt aus der Additivität von Ext, dass ein j existiert mit $\mathrm{Ext}^1_{kN}(k, B_j) \neq 0$. Wegen $N = O_{p'p}G$ bedeutet dies aber nach Satz 6.7 $B_j = k$. Damit folgt aber $0 \neq B_j \subseteq B^N$, und da B einfach ist, folgt daraus wie im ersten Fall $B^N = B$, so dass N in B trivial operiert.

Korollar 6.10 *Es sei P ein prinzipaler unzerlegbarer Modul im Hauptblock von kG. Dann operiert $O_{p'}G$ trivial in P.*

Beweis Setze $R = O_{p'}G$. Nach Satz 3.4 ist $P\downarrow_R$ halbeinfach. Die darin vorkommenden direkten Summanden C_i lassen sich auch erhalten, indem man die kG-Kompositionsfaktoren M_j von P auf R restringiert. Aber jedes M_j ist ein einfacher Modul im Hauptblock von kG. Nach unserem Satz 6.9 operiert $R = O_{p'}G \subseteq O_{p'p}G$ trivial in M_j, also auch trivial in C_i. Damit operiert R trivial in ganz P.