

# Mathematik für Maschinen- und Werkstoffingenieure an der ETH-Zürich

Urs Stammbach, ETH Zürich

Vortrag im Rahmen des Didaktik Workshop: Mathematik-Ausbildung für Ingenieure, Technische Universität Berlin; 27./28. November 1998

Vor rund 500 Jahren hat in der weiteren Umgebung von Berlin jemand Weltgeschichte gemacht, indem er einige Thesen formuliert und sie an die Türe der Schlosskirche zu Wittenberg angebracht hat. Die Versuchung war gross die "Reformierung des Mathematikunterrichts für Ingenieure", so der Titel dieser Tagung, in einer ähnlichen Weise anzugehen. Aber da Sie mir keine Schlosskirche zur Verfügung stellen und auch keine Türe, bei der das Nägeleinschlagen erlaubt ist, will ich darauf verzichten:

Ich will nicht Thesen formulieren und diese zu einer Sache des Glaubens machen, sondern ich will einige Probleme des Mathematikunterrichts für Ingenieure ansprechen und sagen, wie ich in meinem eigenen Unterricht auf diese Probleme reagiere.

Ich bin der festen Überzeugung, dass beim Thema Unterricht, Pädagogik, Didaktik keine "Entweder-Oder"-Antworten gesucht werden sollten. Denn die beste Art zu Unterrichten gibt es nicht: die eine Art ist für den Studenten X am besten, die andere für die Studentin Y. Etwas anderes scheint mir wichtiger als feste Antworten: Wir haben als Mathematiker – so glaube ich – ein zu unserer Beschäftigung gehörendes Interesse am Lehren, an der Weitergabe von Wissen. Es geht bei Bemühungen um die Verbesserung des Unterrichts m.E. darum, dieses natürliche Interesse zu stärken, den Lehrenden anzuregen, die Stoffvermittlung auch aus der Sicht der Lernenden und der Kunden anzusehen und zu beurteilen. Wenn dies mit Ernst und Ehrlichkeit geschieht, dann hat der Unterricht gewonnen. Wenn es keine beste Art des Unterrichtens gibt, so lässt sich doch in jedem Fall die Art des Unterrichtes verbessern.

Bevor ich nun einige Fragen aufgreife, die sich im Zusammenhang mit dem Mathematikunterricht für Ingenieure ergeben, will ich zuerst sagen, worauf ich meine Aussagen abstützte. Ich bin seit vielen Jahren an der ETH in Zürich im Unterricht für Ingenieure tätig, sehr oft habe ich dabei einen stundenmässig gut dotierten Kurs Analysis I/II für die Maschinen- und Werkstoffingenieure gehalten. Der Name des Kurses ist etwas hochtrabend: es handelt sich einfach um einen einführenden Kurs in die Differential- und Integralrechnung, der zum Normalstudienplan des ersten Studienjahres gehört. Die hohe Stundendotierung von 5 Stunden Vorlesung und 3 Stunden Übungen über zwei volle Semester entspricht dem Umfang des zu behandelnden Stoffes, wie er für die Ingenieurausbildung von diesen beiden Abteilungen

als wichtig erachtet wird. Inhalt des Kurses ist die Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer und mehrerer Variablen, inklusive Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen.

**Ansprüche von aussen an die Lehrveranstaltung** Das Ziel der Lehrveranstaltung Analysis I/II besteht darin, im Bereich der Differential- und Integralrechnung die Grundlagen für die anderen Vorlesungen im Studium des Maschinen- und Werkstoffingenieurs und für dessen spätere Berufstätigkeit zu erarbeiten. Sie ist darüber hinaus der Ort, Anwendung der Mathematik in Naturwissenschaft und Technik exemplarisch darzustellen. Was den *Inhalt* angeht, so hat sich dieser im Laufe der Jahre stetig ausgedehnt. Ferner liegen heute die *Ansprüche* der betroffenen Ingenieurabteilungen, etwa was den Abstraktionsgrad des präsentierten Stoffes betrifft, spürbar höher als früher. Schliesslich hat sich mit der Verfügbarkeit des Computers die *Stossrichtung* des Kurses geändert. Dazu ist anzufügen, dass die betroffenen Abteilungen für die numerische Mathematik gesonderte Lehrveranstaltungen vorgesehen haben. Auf die Analysis-Lehrveranstaltung wirken sich deshalb die Fortschritte im Bereich der numerischen Methoden nur mittelbar aus. Hingegen zwingt natürlich die Verfügbarkeit von leistungsfähigen Computer-Algebra- und Graphik-Systemen, den Kurs an modifizierte Zielsetzungen anzupassen.

**Die äussere Form der Lehrveranstaltung** Die Lehrveranstaltung setzt sich zusammen aus der Vorlesung (5 Wochenstunden, 250 Studierende), den Übungen (3 Wochenstunden, in Gruppen von 25 Studierenden), dem Skript und neuerdings einem Internet-Teil.

Klassisch sind natürlich der Vorlesungs- und Übungsteil. In der Vorlesung gehe ich davon aus, dass die Studierenden folgen können und den Faden *nicht* verlieren. Ich weise die Studierenden auch immer wieder darauf hin, dass ein Verhalten nicht effizient ist, das darin besteht, dass man zwar in der Vorlesung anwesend ist, aber etwas anderes denkt oder macht. Einige der Studierenden glauben mir, nicht alle!

Ich gehe davon aus, dass rund  $2/3$  der Übungen in den drei Wochenstunden bearbeitet werden können, die dafür vorgesehen sind. Die Übungen sollen dazu dienen, den eben gelernten Stoff besser zu verankern, dann aber auch dazu, diesen Stoff in konkreten Problemen anzuwenden. Ich achte darauf, dass möglichst viele Übungsaufgaben einen wie auch immer gearteten Bezug zur Welt besitzen, am liebsten zur Ingenieurwelt des Maschinenbauers.

Die klassische Art des Unterrichts an der Hochschule, also Vorlesungen und Übungen werden oft als veraltet hingestellt. Ich glaube, sie sind auch heute noch eine der effektivsten Methoden, wenn sie richtig eingesetzt werden, vom Dozierenden und vom Studierenden her. “Mitdenken”, “mitarbeiten”, “üben”, “selber Probleme an-

packen”, das sind immer noch Forderungen, die jeder Lernforschung standhalten:

*Es gibt in der Lernforschung ein Grundgesetz, das besagt, dass ein Lernerfolg nur durch eigene Aktivität ... zu erzielen ist. Wenn man ein Problem gelöst haben will, muss man es selber anpacken.*

**Skript** Besondere Aufmerksamkeit verdient zweifellos die zur Lehrveranstaltung gehörige Dokumentation. Seit 91 besteht zu meiner Vorlesung ein spezielles, ausführliches Skript, das seit 95 in Buchform erhältlich ist (Analysis I/II, Teile A/B/C, total 580 Seiten). Die Umfrageergebnisse zeigen, dass das Skript sehr geschätzt und auch intensiv benützt wird: die Studierenden antworten, dass zu ihrem Verständnis des Stoffes die Vorlesung, die Übungen und das Skript je zu einem Drittel beigetragen haben. Eine genauere Analyse zeigt, dass es eine ganze Reihe von Studierenden gibt, die sich fast gänzlich auf das Skript abstützen, den Stoff also mit Hilfe des Skriptes erarbeiten. Ich halte dies für eine bemerkenswerte Entwicklung, indem die Einführung eines lehrbuchbasierten Kurses zu Recht immer wieder zur Diskussion steht. Offenbar ist diese Möglichkeit im Kurs Analysis I/II für ein Segment der Studierenden bereits Realität. Man geht allerdings kaum fehl, wenn man davon ausgeht, dass Studierende sich nur deshalb für diese Arbeitsart entscheiden können, weil sie, erstens, die Gewissheit haben, dass die Vorlesung dem Skript genau folgt und dass sie, zweitens, jederzeit die Möglichkeit haben, wieder in die Vorlesung zurückzukehren.

**Umfragen** Wie bereits gelegentlich erwähnt, wurden die Studierenden zu diesen Lehrveranstaltungen häufig befragt. In der Tat fanden in nahezu allen Jahreskursen Umfragen statt, entweder mit einem privaten Fragebogen oder im Rahmen der standardisierten Umfragen, wie sie an der ETH Zürich seit vielen Jahren veranstaltet werden.

Die Ergebnisse dieser Umfragen zur Lehrveranstaltung waren ausnahmslos sehr positiv. Im Vergleich mit den anderen Lehrveranstaltungen für Maschinenbauer wurde meine Lehrveranstaltung überdurchschnittlich bewertet.

Ich finde Umfragen äusserst nützlich, um einen Feedback von der Seite der Studierenden zu erhalten. Aus diesem Grunde habe ich nie ganz verstanden, dass es Kollegen gibt, die sich gegen Umfragen wehren. Wenn ich den Zeitgeist richtig interpretiere, so wird überall eine wie auch immer geartete Evaluation der Lehre eingeführt. In dieser Situation scheint mir Widerstand kontraproduktiv. Es scheint mir wichtiger zu sein, dafür zu sorgen, dass tatsächlich eine Evaluation der Lehre und keine Schönheitskonkurrenz stattfindet. Da gibt es leider schlechte Beispiele, die man unter keinen Umständen nachahmen sollte.

Auf den vierten Teil, den wir seit kurzem via Internet anbieten komme ich später

zu sprechen. Ich möchte lieber zuerst noch einige andere Punkte abhandeln.

**Prüfungsmisserfolg** Die Resultate der Prüfungen sind ein Feedback anderer Art. Unsere Studierenden unterziehen sich nach ihrem ersten Studienjahr einer Prüfung, dem sogenannten 1. Vordiplom, das neben dem Fach Analysis (3) sechs weitere Fächer umfasst (Mechanik (3), Werkstoffe (2), Chemie (1), Lineare Algebra (1) Informatik (1), Biologie und Umwelt (1)) (in Klammern die Notengewichte). Die Prüfung findet vor Semesterbeginn im Herbst statt, so dass die Studierenden sich in den Wochen zwischen Semesterende und Prüfungsbeginn auf die Prüfung vorbereiten können.

Die Prüfung in den Abteilungen IIIA/D gilt unter den Studierenden als eine hohe Hürde. In der Tat ist eine Durchfallquote von über 30% die Regel. Es zeigt sich beim genaueren Hinsehen, dass der Misserfolg nur in den wenigsten Fällen einem Fach allein angelastet werden kann; meistens sind es zwei, sehr oft drei Noten, die ungenügend sind.

Aus Umfragen und Interviews gewannen wir über die Prüfungen interessante und zum Teil überraschende Einsichten.

Man hört etwa die Vermutung, dass ein Prüfungsmisserfolg vor allem der schlechten Vorbildung anzulasten sei, besonders wenn von Mathematiklehrveranstaltungen die Rede ist. Diese Vermutung lässt sich durch unsere Umfragen in dieser Form nicht bestätigen. Es zeigte sich zum Beispiel, dass sich eine schlechte Mathematik-Vorbildung nicht so sehr in der Analysis-Lehrveranstaltung sondern eher in den anderen Lehrveranstaltungen (wie Mechanik) negativ auswirkt. Der Grund ist wohl darin zu suchen, dass dort von allem Anfang an mathematisches Wissen vorausgesetzt wird, während wir in der Analysis-Lehrveranstaltung den Gymnasial-Stoff noch einmal bearbeiten, sozusagen von einem höheren Standpunkt aus. Schlechte Vorbildung wurde zwar öfter als Faktor für einen Prüfungsmisserfolg genannt, mindestens ebenso oft aber ein Mangel an effizienter Arbeitstechnik und -disziplin. Eine überraschend grosse Anzahl von Kandidaten führt ihren Prüfungsmisserfolg auf die persönliche Studiensituation im ersten Studienjahr zurück. Erstaunlich oft war dabei eine aufwendige Freizeitbeschäftigung beteiligt. Drittens stellten wir fest, dass ein seriöses Studienverhalten während des Semesters mit einem positiven Prüfungsergebnis korreliert, und zwar in einem Ausmass, das selbst für mich völlig überraschend war, der ich doch so etwas erwartet hatte. In aller Regel haben sich Kandidaten mit einem positiven Resultat in Analysis weit seriöser, disziplinierter und intensiver mit dem Fach beschäftigt als die Kandidaten mit einem negativen Resultat, und zwar sowohl während des Semesters wie auch während der Prüfungsvorbereitung selbst.

**Was wollen die Ingenieure?** Das ist zweifellos eine der ersten Fragen, die sich ein Dozent einer Mathematik Lehrveranstaltung für Ingenieure stellen muss. Es ist gleichzeitig eine der schwierigsten Fragen. Jeder einzelne Ingenieur weiss zwar ziemlich genau, was er, zum Beispiel für seine eigene Lehrveranstaltungen, an Mathematik voraussetzen möchte. Aber die Wünsche der verschiedenen Ingenieure gehen oft weit auseinander, oder sie widersprechen sich sogar. Es gibt, so glaube ich, in dieser Sache nichts Besseres als die Ingenieure zu fragen, sorgfältig zuzuhören und dann selbst zu versuchen, das Gehörte aus unserer Sicht in sinnvoller Weise umzusetzen. Fragen zu stellen und zuzuhören ist jedenfalls immer wertvoll!

Viele Ingenieure sind ausgezeichnete Mathematiker, viele von ihnen haben aber vergessen, wie schwierig es auch für sie war, sich die Mathematik anzueignen: *Post festum* ist alles klar und einfach! Und sie verlangen aus diesem Grunde oft einen unrealistisch grossen Stoffumfang, der in keinem Verhältnis zur Zeit steht, die sie dafür im Studienplan zur Verfügung stellen. Dabei geht es nicht um die Dozenten: Mathematikdozenten können ein Gebiet fast beliebig kurz und kompakt darstellen, sondern es geht um die Studierenden. Nicht der Umfang und die Vielfalt der Inhaltsangabe der mathematischen Lehrveranstaltungen ist wichtig, sondern wichtig ist im Grunde genommen doch nur, was im Kopf des Studierenden ankommt, dort verankert wird und nachher zu weiterem Gebrauch zur Verfügung steht.

Man profitiert als Dozent einer mathematischen Lehrveranstaltung für Ingenieure viel, wenn man sich einmal die Zeit nimmt, Arbeiten von Ingenieuren zu studieren, die viel Mathematik gebrauchen. Ich empfehle dazu etwa Arbeiten von Codierungstheoretikern oder Wavelet-Leuten. Da lernt man die Mathematik von einer oft neuen Seite kennen! Man nimmt bald einmal zur Kenntnis, dass für die Ingenieure die Mathematik einen anderen Stellenwert hat als für uns: für den Mathematiker ist die Mathematik ein Steinbruch wichtiger Erkenntnisse, für Ingenieure ist sie ein Werkzeug. Man erkennt, dass die mathematisch interessierten Ingenieure nicht deshalb "gut" sind, weil sie die "epsilon-delta" Definition der Stetigkeit blindlings hinschreiben können und Beispiele von stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktionen kennen, sondern weil sie die *Anwendung* des Werkzeuges Mathematik beherrschen. Daraus ergibt sich natürlich, dass für den Ingenieur der Normfall einen ungleich grösseren Stellenwert hat als der Ausnahmefall und das Gegenbeispiel. Für den Mathematiker ist das anders; für ihn ist der Ausnahmefall und das Gegenbeispiel fast ebenso interessant und wichtig, denn oft lässt sich ja erst daran die Bedeutung und Tragweite einer mathematischen Definition und eines mathematischen Satzes erkennen.

Besonders interessant sind Äusserungen zum Thema *Was wollen die Ingenieure?* von berühmten mathematisch interessierten und erfolgreichen Ingenieuren, z.B. von Henry Pollak:

*Because memorizing the formula or the method and turning the crank is fine for the standard textbook, and for solving yesterday's problem, but it simply does not work often enough in the real world... Understanding is essential to applying mathematics well.*

Aus dieser Äusserung und aus vielen anderen ähnlichen Inhalten wird klar, dass bei Mathematikkursen für Ingenieure das Schwergewicht auf das “Verständnis” und die “Einsicht” gelegt werden sollte und nicht auf das Formelwissen und die (höhere) Rechenfertigkeit. Dies wird auch deutlich aus dem Buch von Richard Hamming, das kurz vor seinem Tod erschienen ist. Hamming war bekanntlich nicht nur einer der ersten Codierungstheoretiker, sondern auch ein sehr prominenter Computerexperte, der lange Jahre in führender Stellung bei den Bell Laboratories gearbeitet hat. Seine Hinweise, die er in Vorlesungen gegenüber Ingenieurstudenten gemacht hat, sind auch für uns interessant. Auch hier wird deutlich, dass für den (guten) Ingenieur die “Einsicht” wichtig ist, die er aus der mathematischen Formulierung in die Natur des Problems gewinnt. Hamming leitet aus dieser Erkenntnis eine Reihe von Forderungen ab, die sich auf den Erwerb mathematischen Wissens durch die Studenten richten. Zum Beispiel die folgende: *It is obvious that you need many “hooks” on the knowledge if you are to use it in new situations.* Die “Zusammenhänge” sind gefragt und nicht die isolierten Fakten als solche. Und er beschreibt auch gleich, wie das zu erreichen ist: Der bewegliche Zugriff auf das Wissen werde dadurch gefördert, sagt er, dass man die Lehrinhalte schon beim erstmaligen Lernen aus verschiedenen Richtungen beleuchte und bearbeite und erst dann abspeichere. Hamming sagt deutlich, dass dies eine besondere Anstrengung von Seiten des Studierenden bedingt: er soll nicht den einfachen Weg des direkten Memorierens wählen, sondern den des Verstehens aus verschiedenen Blickwinkeln. Diese Anstrengung zahle sich aus, wenn auch vielleicht nicht direkt, so sicher längerfristig. Ich füge hinzu, dass ein entsprechender Unterricht diesen Prozess wohl wesentlich unterstützen kann. Der Dozent muss dafür nur die Ratschläge von Hamming aktiv befolgen. Hamming spart gerade in diesem Zusammenhang auch nicht mit Kritik an die Adresse der Mathematiker. Er bedauert: *Little or no effort goes into trying to convert what to many students are just “chicken tracks on paper” into meaningful concepts which are applicable to the real world.*

Ich glaube, wir Mathematiker sollten uns gerade dieses letzte Zitat zu Herzen nehmen. Ich will konkret werden und Beispiele anfügen: Die Kettenregel der Ableitung bei Funktionen von mehreren Variablen, wir nennen sie die verallgemeinerte Kettenregel, wird oft einfach gelehrt als eine formale Regel, und die Anwendungen sind ebenso formal. In meinem Kurs skizziere ich statt dessen als Erstes ein einfaches Problem, das auf natürliche Weise auf die verallgemeinerte Kettenregel führt: Die Bodenstation eines Wetterballons zeichnet den Temperaturverlauf als Funktion der Zeit auf. Was ist die Steigung der aufgezeichneten Kurve? Wenn die Temperatur-

verteilung im Raum bekannt ist und der Weg des Ballons, so ist die Antwort durch die verallgemeinerte Kettenregel gegeben.

Ein anderes Beispiel: Die Jacobi-Matrix ist für Ingenieurstudenten eine recht abstrakte und komplizierte Bildung. Wenn der Ingenieurstudent sieht, dass sie bei der Steuerung von Robotern automatisch auftritt, so haben wir in seinem Gedächtnis einen Haken im Sinne Hamming angebracht und Zusammenhänge verankert. Konkret und das Beispiel etwas variierend: wenn eine Radarstation die zeitliche Veränderung der drei Kugelkoordinaten eines fliegenden Objekts misst, so liefert die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation von den Kugelkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten daraus die Geschwindigkeit des Flugobjektes.

Oder lineare Differentialgleichungen. In traditionellen Kursen treten lineare Differentialgleichungen als eine der vielen Klassen auf, die man noch geschlossen integrieren kann. Das mag zwar für den Unterrichtenden lokal von einem gewissen Interesse sein, wichtig ist es aber für den Ingenieur kaum. Für ihn ist wichtig, dass die linearen Differentialgleichungen gerade diejenigen sind, deren Lösungen Superpositionen zulassen. Denn diese Eigenschaft - und nicht die Lösbarkeit - ist der Grund für die vielen wichtigen Anwendungen der linearen Differentialgleichungen in den Ingenieurwissenschaften und der Physik.

**Beweise** Oft entzünden sich Auseinandersetzungen über die Art des Unterrichts für Ingenieure an der Frage, ob in der Vorlesung Beweise zu geben sind oder nicht. Ich finde, die Frage ist so falsch gestellt. Historisch hatten die Beweise doch u.a. die Rolle, das Gegenüber von der Richtigkeit eines Sachverhaltes zu überzeugen, der nicht unmittelbar einsichtig war. Wenn wir Beweise so auffassen, und sie für den Erkenntnisgewinn einsetzen und für das Aufzeigen von Zusammenhängen, dann sind gewisse Beweise durchaus auch in Ingenieurvorlesungen sinnvoll. Gewisse Beweise sage ich, sicher nicht alle! Es gibt mathematische Beweise, die einem Ingenieur kaum neue Einsicht verschaffen, es gibt aber auch Beweise, die dem Zuhörer die Augen öffnen. Wie sagt Manin: *Good proofs are proofs that make us wiser.*

Ein Beispiel: Der vollständige Beweis des Satzes von Gauss der Vektoranalysis ist ausserordentlich involviert und selbst Mathematikstudierende stöhnen, wenn man ihnen den ganzen Beweis vorführt. Ich glaube nicht, dass für den Ingenieurstudenten dabei viel an neuer Einsicht zutage tritt. Wenn ich hingegen den Spezialfall eines achsenparallelen Quaders betrachte und daran in wenigen Minuten zeigen kann, dass der Satz von Gauss die direkte Verallgemeinerung ist des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung, dann hat der Ingenieurstudent eine wichtige neue Einsicht gewonnen: der Satz von Gauss ist kein isoliertes Resultat mehr, keine Zauberei, sondern steht genau auf der natürlichen logischen Entwicklungslinie der Mathematik, die vom Eindimensionalen ins Mehrdimensionale führt. Der In-

genieurstudent wird dann wohl auch von Anfang an ein grösseres Interesse für den Satz aufbringen, denn er hat ja vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Erfahrung mitgenommen, dass dies ein wichtiges Resultat ist, das viele neue Probleme lösbar macht.

Ein ganz ähnliches Beispiel liefern die gewöhnlichen Differentialgleichungen und die zugehörigen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für die Lösungen. Auch diese Beweise bringen dem Ingenieur kaum etwas, hingegen ist das Resultat als solches natürlich auch für ihn wichtig.

**Computer** Für den Aussenstehenden dürften diejenigen Modifikationen der Lehrveranstaltung Analysis am interessantesten zu verfolgen sein, die mit dem Computer zu tun haben. Wie bereits erwähnt, haben sich die bei uns betroffenen Abteilungen in ihrem Studienplan dafür entschieden, die numerischen von den mehr theoretischen Aspekten der Mathematik zu trennen und dafür verschiedene Lehrveranstaltungen vorzusehen. Der Einfluss von Computerseite auf “unsere” Lehrveranstaltung ist also mittelbar. Mit dem Aufkommen leistungsfähiger Computer-Algebra-Systeme (CAS) hat sich die *Stossrichtung* der Stoffvermittlung geändert. Ein Beispiel zur Illustration: das früher beliebte ausführliche Üben von Substitutionsregeln für die Integration macht kaum mehr Sinn, wenn Computer diese Integrale auf Knopfdruck liefern können. Das Lehrziel der Lehrveranstaltung verschiebt sich aus diesem Grund von der Rechenfertigkeit weg in Richtung des abstrakten Verständnisses des Stoffes und der Modellbildung, etc. Die Verfügbarkeit leistungsfähiger Computer ermöglicht es ferner in hohem Mass, komplizierte mathematische Sachverhalte *graphisch* zu illustrieren. Wiederum ein Beispiel: Es scheint wenig sinnvoll zu sein, sich in der Vorlesung auf zittrige und ungenaue Wandtafelzeichnungen abzustützen, wenn computergenerierte Figuren zur Verfügung stehen. Die graphischen Möglichkeiten des Computers kann man auch trefflich verwenden, um abstrakte mathematische Sachverhalte und Begriffe, wie Konvergenz, Ableitung, bestimmtes Integral, Lösungen von Differentialgleichungen, gedämpfte Schwingungen, etc. visuell erfassbar zu machen.

Inzwischen haben wir an der ETH auch die Möglichkeit, den Studierenden Zugang zu CAS-Systemen zu ermöglichen. Wir tun dies – ausser für sehr gut vorbereitete Studierende – allerdings erst relativ spät, nämlich zu Beginn des zweiten Semesters. Es gibt Universitäten, wo man beim Einsatz von Computeralgebra-Systemen wesentlich weiter geht als bei uns, und den ganzen einführenden Kurs auf solche Systeme abstützt. Ich bin in dieser Beziehung skeptisch. Für viele Studierende ist das Lösen von vielen Übungsaufgaben, das Rechnen und das Untersuchen von Beispielen ein wichtiger Bestandteil des Erarbeitens abstrakter Konzepte. Fällt das Üben weg, wie es ein Computeralgebra-System dem Studierenden eben nahe legt, so ist für diesen der Weg zum abstrakten Konzept wesentlich schwieriger geworden,



und nicht leichter! Ich staune im übrigen immer wieder über die grenzenlose Zuversicht derjenigen, die propagieren, Differential- und Integralrechnung vollständig auf ein Computeralgebra-System abzustützen und sich dabei Vorteile vor allem für die schwächeren Studierenden ausrechnen. Studierende, die im “klassischen” Unterricht Mühe haben, werden m.E. auch beim Unterricht mit einem Computeralgebrasystem Mühe haben. Wem das Rechnen mit Klammersausdrücken Schwierigkeiten macht, wird wahrscheinlich nicht einmal in der Lage sein, solche Ausdrücke korrekt einzutippen.

Ich habe davon gesprochen, dass es das Ziel des Mathematikunterrichts ist, Zusammenhänge sichtbar zu machen und Einsicht in Probleme zu gewinnen. Gerade in diesen Punkten bringt ein Computeralgebra-System a priori wenig. David Gale drückt das so aus: *They tell us what is true, but don't tell us why. They supply lots of information but little insight.*

Computer-Algebra-Systeme können andererseits zweifellos gerade für die Ziele ein sehr hilfreiches Instrument sein, die wir in diesem Zusammenhang als wichtig erkannt haben: Verständnis und Einsicht in Zusammenhänge. Wie drückte das Helge Jensen aus Dänemark am Europäischen Kongress für Mathematiker 1996 aus: *What really matters, in my opinion, is the ability to understand the mathematical concepts and the meaning of the mathematical results, and the ability to carry out mathematical thinking at an abstract level. The computer should be used as a tool to train this ability and not as a tool to avoid it.*

**Zur Motivation der Studierenden** Für den typischen Ingenieur-Studierenden ist Mathematik ein abstraktes Fach, dessen Nutzen und Stellenwert am Anfang des Studiums unklar ist. Die falsche Vorstellung, dass es für Ingenieure genüge zu wissen, wie man mit der Formelsammlung und einigen Computerprogrammen umzugehen hat, ist unter den neu eintretenden Studierenden weit verbreitet. Hier gilt es – nicht zuletzt von der Mathematik und insbesondere von der Analysis her – den Studierenden begreiflich zu machen, in welchem Ausmass heutzutage die Mathematik die physikalisch-technische Naturbeschreibung beherrscht und wie Mathematik bereits bei der Formulierung und Modellierung eines Problems eingesetzt wird. Erst dann, wenn das dem Studierenden bewusst geworden ist, wird er auch für die Mathematik motiviert sein.

Wir glauben, dass ein Studierender den abstrakten Stoffinhalt unserer Lehrveranstaltung besser lernt und ihn leichter und dauerhafter in sein Wissen integrieren kann, wenn er vom Sinn dieser Anstrengung überzeugt ist. Wie drückt es Brigitte Berendt aus: *Ohne Motivation zum Lernen findet kein erfolgreiches Lernen statt.* Es ist dem Lernprozess jedenfalls nicht förderlich, wenn der Studierende den Eindruck hat, Dinge lernen zu müssen, die für ihn nie eine Rolle spielen. Dies ist der

Grund dafür, dass wir in unserer Lehrveranstaltung immer wieder Bezüge suchen zu anderen Fachgebieten, besonders natürlich zu solchen, die im Studium der Studierenden eine Rolle spielen, so zum Beispiel zur Mechanik, Robotik, Regelungstechnik, Thermodynamik und Physik.

Ich füge ein konkretes Beispiel an: Wer noch nie Ingenieurstudenten unterrichtet hat, glaubt kaum, dass diese sich vor der Beschäftigung mit komplexen Zahlen gerne drücken. Aber auf den ersten Blick hat ja diese Einstellung etwas für sich, Ingenieure beschäftigen sich schliesslich mit realen (reellen) Dingen und nicht mit imaginären. Man muss ihnen deshalb zeigen, dass komplexe Zahlen und Funktionen in der Elektrotechnik, in der Strömungsmechanik, etc. intensiv gebraucht werden und dort durchaus so reale Objekte beschreiben wie einen elektrischen Strom und das Strömungsfeld eines Fluids. Für meine Vorlesung habe ich einige Seiten aus entsprechenden Skripten meiner Ingenieurkollegen herauskopiert und zeige die Folien zu gegebener Zeit: Man muss die staunenden Augen der Studierenden gesehen haben, die dieses Vorgehen erzeugt, damit man wirklich glaubt, dass solche Übungen notwendig sind.

Zum Schluss dieses Abschnitts zur Motivation noch eine Bemerkung etwas anderer Art zu diesem Thema. Verena Steiner, die bei uns an der ETH Kurse veranstaltet, in denen die Studierenden lernen, wie man lernt, hat einmal das Folgende erzählt: Sie habe an der Schule, an der sie tätig war, Umfragen über den Lehrerfolg durchgeführt und als Antwort eines Schülers dann die Aussage erhalten: *Die Motivation des Schülers kann nicht grösser sein, als die Motivation des Lehrers*. Ich denke, hier hat die Umfrage etwas Positives geliefert, hier konnte für einmal der Lehrer vom Schüler etwas lernen.

**Heterogenität der Vorbildung** Seit Jahren ist die Vorbildung der eintretenden Studierenden sehr heterogen. Diese Tatsache bildet für die in Frage stehende Vorlesung eine zusätzliche Schwierigkeit. Allerdings wird diese oft – und nicht nur von den Studierenden – falsch geortet. Meine Erfahrung hat gezeigt, dass viele Neueintretende ihre wesentlichen Schwierigkeiten nicht direkt auf die mangelnde Vorbildung zurückführen müssen, sondern auf eine mangelnde Arbeitseinstellung und/oder -technik. Sehr oft waren zeitintensive Nebenbeschäftigungen im Spiel sowie die mangelnde Fähigkeit, Schwierigkeiten in gewissen Fächern rechtzeitig zu erkennen und das Studienverhalten entsprechend zu modifizieren.

Ein weiterer Aspekt betrifft die Tragfähigkeit der mathematischen Vorbildung auch “gut” vorbereiteter Studierender. Es zeigt sich sehr oft, dass sich die “Qualität” auf die Rechenfertigkeit und das rein positive Wissen bezieht, während die begrifflichen Grundlagen für die weitere Entwicklung der Theorie nicht genügend tragfähig sind. So ist beispielsweise leider auch heute noch der Begriff der mathematischen Funk-

tion bei vielen eintretenden Studierenden nicht in genügender Schärfe und nicht in genügender Allgemeinheit vorhanden, um die anschliessenden Teile der Lehrveranstaltung Analysis darauf abzustützen (Funktionen mehrerer Variablen, Vektorfelder, komplexe Zahlen, etc). Aus diesem Grund lege ich bei meiner Lehrveranstaltung Wert darauf, diese elementaren Dinge noch einmal anzusprechen.

Es ist klar, dass bei diesem Konzept sehr gut vorbereitete Studierende am Anfang Dinge hören, die sie im Prinzip schon kennen. Diese Studierenden haben deshalb am Anfang des Studiums wohl noch Kapazitäten frei, um anderes zu tun. Wir haben erstmals im vergangenen Jahr für diese Gruppe (etwa 10% des ganzen Semesters) einen Mathematica-Kurs organisiert. Im Gegenzug wurden ihnen einige Übungen erlassen. Die Teilnehmer äusserten sich dazu sehr positiv, einige sogar enthusiastisch. Gegen Schluss dieses Kurses erarbeiteten Gruppen von Teilnehmern zu vorgegebenen Themen Computerdemonstrationen (Epi- und Hypozykloiden, Schubkurbelgetriebe). Diese instruktiven graphischen Demonstrationen haben die Autoren kurz vor Weihnachten in einer Vorlesungsstunde dem ganzen Semester vorgeführt. Diese Demonstration, bei der gleichzeitig die technischen Bezüge angesprochen wurden, fand sehr grosses Interesse und wurde wiederholt durch Applaus unterbrochen.

**Internet** Wir haben im vergangenen Sommersemester begonnen, der Lehrveranstaltung mit Vorlesungen, Übungen und Skript ein viertes Bein zu geben. Dazu bieten wir auf dem Internet eine Begleitung der Lehrveranstaltung an, die mit dem kommerziellen Softwarpaket WebCT realisiert wurde. Die Studierenden erhalten so neben Vorlesung, Übungen und Skript eine *weitere Möglichkeit*, sich mit dem Stoff auseinanderzusetzen. Die Teilnahme ist *freiwillig*. Es geht uns insbesondere darum, die Möglichkeiten des neuen Mediums auszuloten und die Akzeptanz zu testen. (Nebenbei sei hier erwähnt, dass wir schon längere Zeit, unabhängig von diesem Pilotprojekt, die Musterlösungen der Übungen auf dem Internet verfügbar machen.)

Konkret besteht dieser Internet-Teil aus den folgenden Elementen:

- Der *Hauptteil* wird gebildet aus einer wöchentlichen Repetition des Vorlesungsstoffes in der Form einer Zusammenfassung mit gezielten Fragen. Daneben bieten wir jede Woche eine Anzahl von multiple-choice-Fragen eher leichterer Art an, die den Studierenden erlauben sollen, ihren eigenen Wissenstand zu testen.
- An einigen Stellen benützen wir das Medium, um für besonders interessierte und fähige Studierende *Zusatzstoff* anzubieten.
- Regelmässig benützen wir das *Bulletin Board* des WebCT für Mitteilungen (Druckfehler im Skript oder in den Übungen, Angabe der Testatbedingungen, etc.)
- Schliesslich steht den Studierenden via WebCT auch eine *email-Verbindung* offen.

Diese erlaubt es, Fragen von Studierenden auch ausserhalb der Kontaktstunden verzugslos zu beantworten und allfällige Missverständnisse zu klären. In einigen Fällen wurden wir per email von Studentenseite auch auf Fehler in Vorlesung oder Übungen aufmerksam gemacht.

Es gab am Anfang eine ganze Reihe von technischen Schwierigkeiten, die den Zugang erschwerten und die sicherlich bei einigen Studierenden zu Frustrationserscheinungen geführt haben. Unter Berücksichtigung dieser technischen Schwierigkeiten ist die *Akzeptanz* bei den Studierenden erstaunlich hoch. Sowohl die Umfragen wie auch der persönliche Kontakt mit regelmässigen Benutzern zeigen, dass das Angebot inhaltsmässig geschätzt wird.

In den ersten Wochen dieses Wintersemesters zählten wir wöchentlich mehr Zugriffe als es in diesem Kurs Studierende gibt. (Das System ist passwortgeschützt.) Das ist zweifellos für einen als freiwillig bezeichneten Teil ausserordentlich hoch. Wir interpretieren dies als Ausdruck eines grossen Interesses und auch eines grossen Bedürfnisses von Seiten der Studierenden für derartige Angebote.

**Visionen** Was sind meine Visionen für die Vermittlung mathematischen Wissens an Ingenieurstudierende? Ich gehe davon aus, dass der Ingenieur auch in Zukunft für seine Forschungs- und Entwicklungsarbeit ein breites mathematisches Wissen benötigt. Wahrscheinlich werden die Ansprüche höher sein als jetzt und abstrakter. Wenn man z.B. an die Verarbeitung digitaler Information denkt und an die algebraischen Methoden, die man neuerdings in diesem Gebiet einsetzt und die bis vor kurzem kaum zur Standard-Mathematik des Ingenieurs gehört haben, so liegt dies fast auf der Hand. Ich bin überzeugt: Der Anspruch der Ingenieure an die Mathematik wird bleiben. Allerdings bin ich ebenso überzeugt davon, dass die Ingenieure den Unterricht in Mathematik für ihre Studierenden in Zukunft selber übernehmen werden, wenn die Mathematiker den Unterricht nicht in einer Weise erteilen, die den Intentionen der Ingenieure entgegenkommt. Ich wünsche mir, dass die Mathematiker in dieser Beziehung ein offenes Ohr haben.

Das ist ein *Wunsch*, ich habe auch eine *Vision* und einen *Traum*:

Die Vision: Ich denke, dass in Zukunft Lehren und Lernen via Internet und Computer stark an Bedeutung gewinnen wird: die Unabhängigkeit von Ort und Zeit der Wissensvermittlung und die beliebige Wiederholbarkeit spricht deutlich für diesen Trend. Oft wird in diesem Zusammenhang auch ein Sparpotential ausgemacht; daran glaube ich nicht. In Pilotprojekten, die wir in Zürich durchgeführt haben, hat es sich gezeigt, dass die Vorbereitungen für derartige Kurse viel aufwendiger sind als für traditionelle Kurse. Das Argument mit der einmaligen Investition für wiederholbare Kurse, trägt deshalb nicht, weil die Systeme und auch die Inhalte der Kurse sich rasch ändern. Trotzdem: für mich ist klar, dass sich in dieser Richtung rasche

Entwicklungen ergeben werden, die in ihrem Ausmass einer Revolution nahe kommen. Ich darf anfügen, dass in dieser Sache auch die Verwaltungen der Hochschulen gefordert sind, nicht nur, weil für diese Art des Unterrichts teure Informatikmittel unabdingbar sind, sondern auch, weil die Betreuer bei der Umstellung ausserordentlich stark beansprucht sein werden, ungleich stärker als bei einer "klassischen" Lehrveranstaltung. Der Einsatz in der Lehre wird an der Hochschule dementsprechend eine höhere Anerkennung erhalten müssen, als dies bisher der Fall gewesen ist.

Und der Traum: I have a dream that one day ... Ich wünsche mir Studierende, die Interesse mitbringen, wenn nicht für alles, so doch für das Fachgebiet, das sie sich für ihren späteren Beruf ausgesucht haben. Ich komme mir als Lehrender manchmal vor, als stosse ich an einem Seil, an dem meine Studenten eigentlich ziehen sollten. Ich wünschte, sie würden wirklich ziehen. Ich bin dabei nicht der einzige: In der Diskussion der sogenannten *Calculus Reform* der Vereinigten Staaten habe ich den Stossseufzer gefunden: *We don't need a Calculus Reform, we need a Student Reform.* Aber eben: *You can lead a horse to water, but you cannot make it drink.*

Wie bereits bemerkt, habe ich, zusammen mit einigen freiwilligen Mitarbeitern, im vergangenen Jahr, und auch dieses Jahr wieder, mit einer Anzahl von gut vorbereiteten Studierenden einen Mathematica Kurs durchgeführt. Es war eine Freude, mit diesen Leuten zu arbeiten: teamfähig, gegenseitig hilfsbereit, wissbegierig, leistungsbereit. Ich träume manchmal davon, es wären alle Studierenden im Kurs so. Aber ausserhalb des Traumes bin ich mir bewusst, dass die anderen Studierenden von unserem Lehrverhalten vielleicht mehr profitieren können; auf diese sollten wir deshalb unsere Aufmerksamkeit in gleicher Weise richten.

Prof. U. Stammbach  
Mathematik  
ETH-Zentrum  
CH-8092 Zürich