Theorem 2. *Sei $s \in \mathbb{C}$. Falls $\mathrm{Re}(s) > 1$, so konvergiert die Reihe*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

absolut. Des Weiteren ist die Abbildung $s \mapsto \zeta(s)$ auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ holomorph. Diese Abbildung wird Riemannsche Zetafunktion genannt.

Theorem 4. *Die Riemannsche Zetafunktion ist eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ fortsetzbar, und sie besitzt einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum 1.*

Theorem 5. (*Euler-Identität*). Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{\text{p ist Primzahl}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Sei nun K ein Zahlkörper und s eine komplexe Zahl. Falls $\mathrm{Re}(s) > 1$, so konvergiert die Reihe

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$$

absolut, wobei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein ganzes Ideal von $\mathcal{O}_K$ ist. Wir nennen die Abbildung $s \mapsto \zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion.

Euler-Identität Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}}$$

Theorem 6. *Die Dedekindsche Zetafunktion ist eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ fortsetzbar, und sie besitzt einen einfachen Pol bei $s = 1$.*

Bsp $s = 2$ Basler-Problem

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Bem: Aus der Euler-Identität folgt, dass ζ keine NS für $\mathrm{Re}(s) > 1$ besitzt. NS von der Form $-2n$, $n \in \mathbb{N}$, nennen wir trivialen NS der Riemannschen Zetafunktion.
Die nichttrivialen NS sind $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1\}$
Riemannsche Vermutung nichttrivialen NS Realteil $1/2$

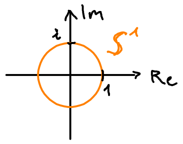
Absolutnorm $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]$, $\mathfrak{a} \neq 0$ Ideal

Verallgemeinerte R. Vermutung NS welche im kritischen Streifen sind, haben Realteil $\frac{1}{2}$

Definition 8. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Dirichlet-Charakter modulo n ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Wir bezeichnen mit dem trivialen Dirichlet-Charakter χ_0 modulo n, den Charakter, der konstant eins ist. Der triviale Charakter modulo 1 wird auch Hauptcharakter genannt.



Wir können eine Dirichlet-Charakter χ modulo n zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{Z}$ ausweiten. Wir definieren $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch

$$\chi(m) = \begin{cases} \chi(m \mod n) & \mathrm{ggT}(n,\ m) = 1 \\ 0 & \mathrm{ggT}(n,\ m) \neq 1. \end{cases}$$

Bsp:

1) $\chi_4(\bar{1}) = 1$, $\chi_4(\bar{3}) = -1$

2) p ungerade Primzahl

<u>Beh</u> $\chi(\bar{a}) = \left(\frac{\bar{a}}{p}\right)$ D-Char. modulo p

<u>Bew</u>

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \equiv 0 \mod p \\ 1 & \text{falls } a \equiv b^2 \mod p,\ b \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{~~falls~~ sonst} \end{cases}$$

$\left(\frac{\bar{a}}{p}\right) \in \mathbb{S}^1$

$\bar{a}, \bar{b} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

$$\chi(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{p}\right) = \left(\frac{\bar{a}}{p}\right)\cdot\left(\frac{\bar{b}}{p}\right) = \chi(\bar{a})\cdot\chi(\bar{b}) \quad \square$$

<u>Jacobi-Symbol</u>

$n \in \mathbb{N}$ ungerade

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \begin{cases} \chi(a \mod n) & \mathrm{ggT}(a,n) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} -1 & a \equiv 3,5 \mod 8 \\ 1 & a \equiv 1,7 \mod 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{-1}\right) = \begin{cases} -1 & a < 0 \\ 1 & a \geq 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{0}\right) = \begin{cases} 1 & a = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\right) = \left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{d}\right)\cdot\left(\frac{b}{d}\right)$$

<u>Kronecker-Symbol</u>

Sei a eine quadratfreie Zahl in $\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$. Für einen quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ ist der Dirichlet-Charakter von der Form $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$, wobei d die Diskriminante ist. Die Diskriminante ist gegeben durch

$$d = \begin{cases} a & \text{falls } a \equiv 1 \bmod 4 \\ 4a & \text{falls } a \equiv 2 \text{ oder } 3 \bmod 4. \end{cases} \longleftarrow$$

Definition 14. *Die Dirichletsche L-Reihe ist definiert durch*

$$L(s,\ \chi) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wobei $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ein Dirichlet-Charakter. Falls $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert die Dirichletsche L-Reihe absolut, da $|\chi(n)| \leqslant 1$. Wir nennen diese holomorphe Funktion die Dirichletsche L-Funktion zu χ.

Theorem 16. (Euler-Identität) Sei $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ein Dirichlet-Charakter. Sei $s \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$. Falls $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1+\delta$, so konvergiert die Reihe $L(s,\ \chi)$ absolut und gleichmässig. Des Weiteren ist die Abbildung $s \mapsto L(s,\ \chi)$ auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ holomorph. Es gilt folgende Produktdarstellung:

$$L(s,\ \chi) = \prod_{\text{p ist Primzahl}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Bsp: $a = -1$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(i)$

$a \equiv 3 \bmod 4$

$d = 4(-1) = -4$

$\chi_4(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)$

Bem: $\chi = \varepsilon$ Hauptcharakter

$$L(s, \varepsilon) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-\varepsilon p^{-s}} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s)$$

Bsp: $s = 1$, $\chi_4(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)$

$$L(1, \chi_4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-4}{n}\right)}{n^1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots$$

$$L(1, \chi_4) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Theorem 21. *Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper, dann ist die Dedekindsche Zetafunktion von der Form*

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi),$$

wobei der Dirichlet-Character χ von der Form $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ ist.

Bem: Falls $K = \mathbb{Q}$ $\quad \zeta_K(s) = \zeta(s)$

Bsp: $K = \mathbb{Q}(i)$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$

Bis auf Assoziiertheit haben wir folgende Primideale in $\mathbb{Z}[i]$:

- $\to$ $1+i$, $\quad \mathcal{N}(1+i) = 1^2+1^2 = 2$
- $\to$ $a+ib$, $a > |b| > 0$, $a^2+b^2 = p$, $p \in \mathbb{Z}$ prim, $p \equiv 1 \mod 4$
  $\mathcal{N}(a+ib) = a^2+b^2 = p$
- $\to$ p, $p \in \mathbb{Z}$ prim, $p \equiv 3 \mod 4$
  $\mathcal{N}(p) = p^2$

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} (1-\mathcal{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}$

$$= (1-2^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (1-p^{-s})^{-2} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv 3 \bmod 4}} \underline{(1-p^{-2s})^{-1}}$$

$(1-p^{-s})^{-1}(1+p^{-s})^{-1}$

$$= (1-2^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (1-p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv 3 \bmod 4}} (1-p^{-s})^{-1}$$

$$\cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (1-p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv 3 \bmod 4}} (1+p^{-s})^{-1}$$

$$= \zeta(s) \cdot \prod_{p \text{ prim}} (1-\chi_4(p)p^{-s})^{-1}$$

$$= \zeta(s) \cdot L(s, \chi_4)$$

Theorem 23. (Dirichletsche Klassenzahlformel) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ eine quadratische Zahlkörper, dann gilt

$$h = \begin{cases} \frac{w\sqrt{|d|}}{2\pi} L(1,\ \chi) & \text{falls } d < 0 \longleftarrow \\ \frac{\sqrt{d}}{\ln \epsilon} L(1,\ \chi) & \text{falls } d > 0, \end{cases}$$

wobei h die Klasenzahl, w die Anzahl Einheitswurzeln und ϵ gegeben ist durch

$$\epsilon = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{d}).$$

Hier sind t, u die Fundamentaleinheit der Pell Gleichung.

Bemerkung 24. Der Körper K hat Klassenzahl $h = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{O}_K$ ein Haupitdeal ist. Des Weiteren existieren nur neun imaginär-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ die Klassenzahl $h = 1$ besitzen. Diese neun Werte sind:

$$d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.$$

Es wird vermutet, dass unendlich viele reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ die Klassenzahl $h = 1$ besitzen.

Bsp: $K = \mathbb{Q}(i)$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$ Hauptidealring

$h = 1$

$d = -4$, $w = 4$, $L(1, \chi_4) = \frac{\pi}{4}$

$h = \frac{\cancel{4}\sqrt{\cancel{|-4|}}}{\cancel{2}\cancel{\pi}} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}} = 1$!!

Definition 28. *Sei K ein Zahlkörper und M eine Menge von Primidealen von K. Dann heisst*

$$\delta(M) = \lim_{x\to\infty} \frac{|\{\mathfrak{p} \in M \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \leqslant x\}|}{|\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \leqslant x\}|}$$

die natürliche Dichtigkeit von M, falls der Limes existiert.

Bsp: $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\delta(A) = \frac{1}{2}$

Bem: $0 \leq \delta(M) \leq 1$

Eine endliche Menge von Primzahlen hat Dichte 0

Chebotarev's Dichtigkeitssatz

Sei L eine endliche Galoissche Erweiterung über dem Körper $K = \mathbb{Q}$. Sei $G = L/\mathbb{Q}$ die dazugehörende Galoisgruppe. Sei $C \subset G$ Konjugationsinvariant. Des Weiteren sei die Menge aller unverzweigten Primideale von $\mathbb{Q}$ gegeben durch

$$A_C = \left\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid (p) \text{ unverzweigt in } L \text{ und } \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{p}}\right) \in C \text{ für ein Primideal über } (p)\right\},$$

wobei $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{p}}\right)$ der Frobeniusautomotphismus von $\mathfrak{p}$ über $\mathbb{Q}$. Dann hat die Menge A_C die natürliche Dichtigkeit

$$\delta(A_C) = \lim_{x\to\infty} \frac{|\{(p) \in A_C \mid \mathfrak{N}(p) \leqslant x\}|}{|\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid \mathfrak{N}(p) \leqslant x\}|} = \frac{|C|}{|G|}.$$

Theorem 31. (Dirichletscher Primzahlsatz). Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann existieren unendlich viele Primzahlen die kongurent zu a modulo n sind. Die Menge der Primzahlen, die kongurent zu a modulo n sind, besitzen die natürliche Dichte $\delta(\{p \text{ ist Primzahl} \mid p \equiv a \bmod n\}) = \frac{1}{\varphi(n)}$, wobei $\varphi(n) = |\{b \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant b \leqslant n \text{ und } \operatorname{ggT}(b,n) = 1\}|$ die Eulersche Phi-Funktion ist.

Bew: $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, ζ_n primitive n-te Einheitswurzel

$G \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

$G \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

$(\zeta_n \mapsto \zeta_n^a) \mapsto (a \bmod n)$

Menge aller verzweigten Primideale endlich

$\mathfrak{P}$ ein unverzweigtes Primideal über einem Primideal (p), $p \nmid n$

$$\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right)\zeta_n = \zeta_n^p \Rightarrow \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right) \equiv p \bmod n$$

G abelsch $\Rightarrow$ Konjugationsklasse hat ein Element

$C = \{a\}$ Konjugationsklasse von a, $|C| = 1$

$$A_C = \left\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid (p) \text{ unverzweigt in } L \text{ und } \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right) \in C\right\}$$

$$= \{a \equiv p \bmod n\}$$

$$\delta(A_C) = \lim_{x\to\infty} \frac{|\{a \equiv p \bmod n \mid p \leq x\}|}{|\{p \leq x\}|} = \frac{|C|}{|G|} = \frac{1}{|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|} = \frac{1}{\varphi(n)}$$

Äquivalenzrelation

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{a \equiv p \bmod n \mid p \leq x\}|}{\varphi(n)\,|\{p \leq x\}|} = 1$$

$$|\{a \equiv p \bmod n \mid p \leq x\}| \sim \frac{1}{\varphi(n)}\,\underline{|\{p \leq x\}|}$$

$\square$

1) Was ist ein Dirichlet - Charakter und wie können wir damit die Dirichletsche L- Funktion definieren ?

2) Wie ist die Dedekindsche Zetafunktion definiert ?
Wie sieht die Dedekindsche Zetafunktion für einen quadratischen Zahlkörper, wie zum Beispiel $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, aus ?

3) Wie hilft uns Chebotarev's Dichtigkeitssatz den Dirichletschen Primzahlsatz zu beweisen ?