Aufgaben: Binäre Quadratische Formen

1. Bestimme alle reduzierten binären positiv definiten quadratische Formen mit ganzen Koeffizienten und Diskriminante gleich -7. Sind jene äquivalent? Repräsentiert die Form $Q(X,Y) = 11X^2 + 31XY + 22Y^2$ die Zahlen 0, 5, 22, und 29 primitiv?

   Lösung:

   Wir benutzen die Ungleichungen, die wir in der Vorlesung hergeleitet haben. Eine reduzierte binäre quadratische Form $P(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ mit Diskriminante -7 erfüllt $|a|, |b| \leq \sqrt{7/3} < 2$. Da die Form auch positiv definit sein soll, muss auch $c \geq a > 0$ gelten. Das durchtesten aller Fälle, so finden wir, dass $b^2 - 4ac = -7$ nur lösbar ist für $(a,b,c) = (1, \pm 1, 2)$. Wir finden ferner

$$\rho\left(X^2 - XY + 2Y^2, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = X^2 + XY + 2Y^2,$$

   d.h. die zwei Formen sind äquivalent. Es gibt also bis auf Äquivalenz nur eine positive definite binäre quadratische Form mit ganzen Koeffizienten und Diskriminante -7.

   Wir berechnen die Diskriminante von Q als -7. Dies ist aber kein Quadrat, d.h. Q repräsentiert 0 nicht primitiv. Wir sehen auch leicht, dass $Q(0,1) = 22$. Es bleibt also noch 5 und 29 zu betrachten. $-7 \equiv 2 \mod (5)$ ist kein Quadrat modulo 5, da die einzigen Quadrate modulo 5 sind $0, 1, 4$, wie man leicht nachrechnet. Dies heisst, dass -7 kein Quadrat modulo $4 \cdot 5$ sein und somit kann Q 5 nicht primitiv repräsentieren, nach einem Lemma in der Vorlesung. Nach einer kleiner Rechnung, sehen wir, dass $-7 \equiv 15^2 \mod (29)$ und $-7 \equiv 1^2 \mod (4)$, es folgt nach dem chinesischen Restsatz, dass -7 ein Quadrat modulo $4 \cdot 29$ ist. Mit Hilfe eines Lemma der Vorlesung wir 29 also von einer binären (positiven definiten) quadratischen Form mit Diskriminante -7 dargestellt. Jene muss aber äquivalent zu Q sein nach dem ersten Teil der Aufgabe. Wieder folgt mit einem Lemma aus der Vorlesung, dass dann auch Q 29 primitiv darstellt, da die Formen äquivalent sind.

   Alternativ findet nach ein bisschen herumprobieren, dass $1^2 + (-4) + 2(-4)^2 = 29$, sodass $X^2 + XY + 2Y^2$ 29 primitiv repräsentiert. Da $X^2 + XY + 2Y^2$ äquivalent zu Q ist folgert man wie vorhin. Zum Schluss bemerken wir noch, dass falls man herumprobieren möchte, dann sollte man dies nur mit einer (positiven) definiten reduzierten Form machen, denn dort ist es einfacher zu zeigen, dass mögliche Lösungen nicht zu gross sein können:

$$\begin{aligned} 29 &= X^2 + XY + 2Y^2 = \tfrac{7}{8}X^2 + 2(\tfrac{1}{4}X + Y)^2 \geq \tfrac{7}{8}X^2, \\ 29 &= X^2 + XY + 2Y^2 = (X + \tfrac{1}{2}Y)^2 + \tfrac{7}{4}Y^2 \geq \tfrac{7}{4}Y^2, \end{aligned}$$

   folglich $6 \geq |X|$ und $5 \geq |Y|$.