

Aufgaben: Quaternionen

1. Zeige, dass im Allgemeinen die Lipschitz Quaternionen $\mathbb{Z}[1, i, j, k]$ keinen grössten gemeinsamen Rechtsteiler besitzen. Betrachte dazu alle Rechtsteiler von 2 und $1 + i + j + k$.
2. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i, j, k, \xi]$ zwei Hurwitz Quaternionen, sodass $N(\alpha)$ und $N(\beta)$ nicht teilerfremd in \mathbb{Z} sind. Besitzt dann α, β notwendigerweise einen gemeinsamen Rechtsteiler, welcher keine Einheit ist?
3. Das Produkt PQ eines Polynomes $P \in \mathbb{Q}[X]$, welches sich als Summe von drei Quadraten von Polynomen in $\mathbb{Q}[X]$ schreiben lässt, mit einem Polynom $Q \in \mathbb{Q}[X]$, welches sich als Summe von fünf Quadraten von Polynomen in $\mathbb{Q}[X]$ schreiben lässt, lässt sich als Summe von 15 Quadraten von Polynomen in $\mathbb{Q}[X]$ schreiben. Zeige, dass PQ sich sogar als Summe von sieben Quadraten von Polynomen in $\mathbb{Q}[X]$ schreiben lässt.