Analysis III

Mass und Integral

Prof. Michael Struwe

Vorlesung im Frühlingssemester 2013

ETH Zürich

Motivation

Warum benötigen wir einen feineren Massbegriff als denjenigen, den wir mit dem Jordanschen Mass bereits zur Verfügung haben?

Aus Sicht der **Geometrie** sind wir vielleicht daran interessiert, möglichst viele Mengen auf natürliche Weise "messen" zu können. Dafür benötigen wir ein Mass, mit dem wir auch *abzählbare* Vereinigungen messbarer Mengen messen können. Das Jordansche Mass kann dies nicht, wie das folgende Beispiel einer verallgemeinerten Cantor-Menge zeigt.

Beispiel: *Entferne aus dem Intervall* $I_1^{(0)} = [0,1]$ *ein zentriertes Teilintervall* $\Omega_1^{(1)}$ *der Länge* γ_1*, aus den entstehenden Teilintervallen* $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}$ *jeweils ein zentriertes Teilintervall* $\Omega_l^{(1)}$ *der Länge* γ_2*, u.s.w., wobei wir im* k*-ten Schritt aus den verbleibenden Teilintervallen* $I_l^{(k-1)}$*,* $1 \leq l \leq 2^{k-1}$ *jeweils ein zentriertes Teilintervall* $\Omega_l^{(k)}$ *der Länge* γ_k *entfernen, mit* $\gamma_k \leq 3^{-k}, k \in \mathbb{N}$.

Sei $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{2^{k-1}} \Omega_l^{(k)}$ *die Vereinigung aller Zentralintervalle,* $C = [0,1] \setminus \Omega$*. Dann ist* C *abgeschlossen, nirgends dicht, also* $C^\circ = \emptyset$*, und es gilt*

$$\underline{\mu}(C) = 0,\ \overline{\mu}(C) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\gamma_k,$$

wobei

$$\underline{\mu}(C) = \sup\{\mu(E),\ E \subset C,\ E \text{ Elementarfigur}\},$$

bzw.

$$\overline{\mu}(C) = \sup\{\mu(G),\ G \supset C,\ G \text{ Elementarfigur}\}$$

das innere, bzw. äussere Jordansche Mass bezeichnen. Dabei genügt es zur Bestimmung des äusseren Jordanschen Masses offenbar, offene Mengen $G \supset C$ *zu betrachten. Für jedes derartige* G *gilt dann*

$$\delta := \operatorname{dist}(C, [0,1] \setminus G) > 0,$$

und für $k_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $2^{-k_0} < \delta$ *folgt* $\bigcup_{l=1}^{2^{k_0}} I_l^{(k_0)} \subset G$*; also*

$$\mu(G) \geq \mu(\bigcup_{l=1}^{2^{k_0}} I_l^{(k_0)}) = 1 - \sum_{k=1}^{k_0} 2^{k-1}\gamma_k \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\gamma_k.$$

Somit ist C *und damit auch* $\Omega = [0,1] \setminus C$ *nicht Jordan-messbar, falls für ein* $k \in \mathbb{N}$ *gilt* $\gamma_k < 3^{-k}$*; vergleiche Satz 9.3.1 der Vorlesung "Analysis I-II". Das heisst, es gibt sogar offene, nicht Jordan-messbare Teilmengen von* $\mathbb{R}$*!*

Aus Sicht der **Analysis** ist es beispielsweise für Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes wichtig, in vollständigen normierten Räumen arbeiten zu können. Versehen wir jedoch den Raum $C^0_{pw}([0,1])$ mit der Norm

$$||f||_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|\ dt,$$

so zeigt das Beispiel der aus den Mengen $(I_l^{(k)})_{1\le l\le 2^k}$ in der obigen Konstruktion einer allgemeinen Cantor-Menge abgeleiteten Folge $f_k = \sum_{l=1}^{2^k} \chi_{I_l^{(k)}}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $||f_j - f_k||_{L^1} \to 0$ $(j,k \to \infty)$ und $f_k \to \chi_C$ $(k \to \infty)$, dass der so erhaltene Raum nicht vollständig ist.

Schliesslich ist die abstrakte Masstheorie auch von fundamentaler Bedeutung für das Gebiet der **Stochastik**, da das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten nur in der Sprache der Masstheorie möglich ist.

Literatur: Die Vorlesung stützt sich hauptsächlich auf die folgenden neueren Lehrbücher zur Masstheorie:

Amann-Escher: *Analysis III*, Birkhäuser,
Evans-Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press,
Wheeden-Zygmund: *Measure and integral*, Dekker.

In diesen Büchern wird der klassische Stoff aus verschiedenen Richtungen und mit unterschiedlichen Zielsetzungen beleuchtet. Daneben gibt es noch eine Vielzahl weiterer Texte und Lehrbücher.

Dank: Die vorliegende aktualisierte Fassung dieses Skripts entstand parallel zu meiner Vorlesung im Frühlingssemester 2013, aufbauend auf meinen Vorlesungen in den Jahren 2002 und 2007. Ich danke den Studierenden meiner Vorlesung im Sommersemester 2002 für die aufmerksame Fehlersuche in der ersten Version dieses Skripts. Den Studierenden meiner Vorlesung im Sommersemester 2007, insbesondere Frau Sabrina Gross, möchte ich ebenfalls danken für weitere Anregungen und wertvolle Hinweise, welche in die Version vom April 2008 eingegangen sind.

Trotz aller Mühe fanden sich aber auch in der Fassung von 2008 noch Fehler und Ungenauigkeiten, die ich nun hoffentlich beheben konnte. Dabei haben mir wiederum die Kommentare der Studierenden sowie der Assistierenden geholfen, was ich dankbar vermerke.

Zürich, im Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

σ-Algebren und Masse

1.1 Der abstrakte Rahmen

Sei X eine beliebige Menge, 2^X die Potenzmenge von X.

Definition 1.1.1. *Eine Abbildung $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$ heisst ein* **Mass** *auf X, falls gilt:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, *sofern* $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Beispiel 1.1.1. i) Sei $X \neq \emptyset$. Definiere $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(A) = 1,\ \text{falls } A \neq \emptyset.$$

Dann ist μ ein Mass auf X.

ii) Das Zählmass

$$\mu(A) = \#A \leq \infty,\ \text{die Anzahl der Elemente von } A,$$

definiert ein Mass auf jeder Menge X.

Bemerkung 1.1.1. Die Eigenschaft ii) aus Definition 1.1.1 impliziert insbesondere die **σ-Subadditivität**

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Bemerkung 1.1.2. Weiter folgt die **Monotonie** des Masses

$$\mu(A) \leq \mu(B),\ \text{falls } A \subset B.$$

Beweis. In ii) wähle $A_1 = B$, $A_k = \emptyset$ für $k \geq 2$ und beachte i). □

Bemerkung 1.1.3. Das äussere Jordansche “Mass” auf $\mathbb{R}$ ist kein Mass gemäss der obigen Definition. Betrachte dazu

$$A = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_k; k \in \mathbb{N}\}, \ A_k = \{q_k\}, k \in \mathbb{N},$$

mit $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $\overline{\mu}(A) = 1 \not\leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_k) = 0$.

Definition 1.1.2. *(Carathéodory) $A \subset X$ heisst μ-**messbar**, falls für alle $B \subset X$ gilt*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.1.1}$$

Bemerkung 1.1.4. Wegen der Subaddivität des Masses ist (1.1.1) äquivalent zur Bedingung

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.1.2}$$

Beispiel 1.1.2. i) Sei $X \neq \emptyset$, und sei $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$ wie in Beispiel 1.1.1.i) definiert. Dann ist $A \subset X$ genau dann μ-messbar, wenn $A = \emptyset$ oder $A = X$.

ii) Bezüglich dem Zählmass ist jede Menge messbar.

Beweis. i) Falls $A \subset X$ μ-messbar, so gilt gemäss Definition 1.1.2 für die Testmenge $B = X$ die Gleichheit

$$1 = \mu(X) = \mu(X \cap A) + \mu(X \setminus A) = \mu(A) + \mu(A^c),$$

und die rechte Seite ist strikt grösser als 1, falls $\emptyset \neq A \neq X$.

ii) ist klar. □

Bemerkung 1.1.5. Manche Autoren bezeichnen eine σ-subadditive Mengenfunktion zunächst als **äusseres Mass**, deren Einschränkung auf die Familie der messbaren Mengen als Mass.

Definition 1.1.3. *Eine Familie $\mathcal{A} \subset 2^X$ heisst **Algebra**, falls gilt*

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$,

iii) $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{A}$.

*$\mathcal{A}$ heisst σ-**Algebra**, falls iii) auch für abzählbare Vereinigungen gilt.*

Bemerkung 1.1.6. Ist $\mathcal{A}$ σ-Algebra, so gilt auch

iv) $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Beweis. Mit ii), iii) folgt dies sofort aus der Darstellung $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c$ nach de Morgan. □

Beispiel 1.1.3. i) Sei $X \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ eine Algebra.

ii) Für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{A} = 2^X$ eine σ-Algebra.

Satz 1.1.1. *Sei $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$ ein Mass. Dann ist*

$$\Sigma = \{A \subset X; A \text{ ist } \mu\text{-messbar}\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. *i)* $X \in \Sigma$, da für $B \subset X$ gilt

$$\mu(B \cap X) + \mu(B \setminus X) = \mu(B) + \mu(\emptyset) = \mu(B).$$

ii) Für $A \in \Sigma$ folgt $A^c \in \Sigma$, da für $B \subset X$ gilt

$$B \cap A^c = B \setminus A,\ B \setminus A^c = B \cap A,$$

also

$$\mu(B \cap A^c) + \mu(B \setminus A^c) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) = \mu(B).$$

iii) Seien $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma$. Mit Induktion nach m zeigen wir $\bigcup_{k=1}^m A_k \in \Sigma$.

$m = 1$: o.k.

$m-1 \Rightarrow m$: Sei $A = \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k$. Nach Induktionsannahme ist A μ-messbar. Für $B \subset X$ gilt daher $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Da auch A_m bzgl. μ messbar ist, gilt andererseits

$$\mu(B \setminus A) = \mu((B \setminus A) \cap A_m) + \mu((B \setminus A) \setminus A_m).$$

Mit $B \cap (A \cup A_m) = (B \cap A) \cup ((B \setminus A) \cap A_m)$ folgt

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)\\ &= \mu(B \cap A) + \mu((B \setminus A) \cap A_m) + \mu((B \setminus A) \setminus A_m)\\ &\geq \mu(B \cap (A \cup A_m)) + \mu(B \setminus (A \cup A_m));\end{aligned}$$

also ist $\bigcup_{k=1}^m A_k = A \cup A_m$ nach Bemerkung 1.1.4 messbar.

iv) Seien $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$. OBdA dürfen wir annehmen $A_k \cap A_l = \emptyset$ $(k \neq l)$. (Sonst betrachte $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{k-1} A_l \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{k=1}^\infty \tilde{A}_k = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$.) Da jedes A_l messbar, gilt für alle m die Identität

$$\begin{aligned}\mu(B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) &= \mu((B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) \cap A_m) + \mu((B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) \setminus A_m)\\ &= \mu(B \cap A_m) + \mu(B \cap \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k) = \ldots = \sum_{k=1}^m \mu(B \cap A_k).\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Mit der Monotonie von μ (nach Bemerkung 1.1.2) und iii) folgt

$$\mu(B) = \mu(B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) + \mu(B \setminus \bigcup_{k=1}^m A_k) \geq \sum_{k=1}^m \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A).$$

Grenzübergang $m \to \infty$ und σ-Subadditivität liefern:

$$\mu(B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A);$$

also ist A messbar nach Bemerkung 1.1.4. $\square$

Definition 1.1.4. *Falls $\mu\colon 2^X \to [0, \infty]$ ein Mass auf X, Σ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen, so heisst (X, Σ, μ) ein* **Massraum***.*

Satz 1.1.2. *Seien $A_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Beziehungen.*

i) $A_k \cap A_l = \emptyset \ (k \neq l) \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *(σ-Additivität).*

ii) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

iii) $A_1 \supset \ldots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \ldots, \ \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Beweis. *i)* Aus (1.1.3) folgt mit $B = X$ für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k). \tag{1.1.4}$$

Mit Monotonie und σ-Subadditivität folgt

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

ii) Zerlege disjunkt $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$, wobei $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $k \geq 2$. Mit i) und (1.1.4) folgt:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(\tilde{A}_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

iii) Betrachte $\tilde{A}_k = A_1 \setminus A_k$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\emptyset = \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \ldots$. Beachte

$$\mu(A_1) = \mu(\tilde{A}_k) + \mu(A_k), k \in \mathbb{N}.$$

Mit (1.1.4), Teil ii) des Beweises und Bemerkung 1.1.6 folgt

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu(\tilde{A}_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k) \\ &= \mu(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k).\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 1.1.4. Sei $X = \mathbb{N}$, und sei μ das Zählmass, $A_k = \{k, k+1, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A_k \supset A_{k+1}$, $\mu(A_k) = \infty$, $k \in \mathbb{N}$, aber für $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$ gilt $\mu(A) = 0$. Die Annahme $\mu(A_1) < \infty$ in Satz 1.1.2 ist daher im Allg. notwendig.

Definition 1.1.5. *$N \subset X$ heisst μ-**Nullmenge**, falls $\mu(N) = 0$.*

Satz 1.1.3. *Sei N eine μ-Nullmenge. Dann ist N bezüglich μ messbar.*

Beweis. Für beliebiges $B \subset X$ gilt

$$\mu(B \cap N) + \mu(B \setminus N) \le \mu(N) + \mu(B) = \mu(B).$$

Die Behauptung folgt mit Bemerkung 1.1.4. □

1.2 Konstruktion von Massen

Sei $X \neq \emptyset$ beliebig.

Definition 1.2.1. *$\mathcal{K} \subset 2^X$ heisst **Überdeckungsklasse** für X, falls*

i) $\emptyset \in \mathcal{K}$,

ii) $\exists (K_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$: $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

Beispiel 1.2.1. i) Die offenen Intervalle $I = \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[$ mit $a_k \le b_k \in \mathbb{R}$ bilden eine Überdeckungsklasse für $X = \mathbb{R}^n$, desgleichen die abgeschlossenen oder die halboffenen Intervalle; vergleiche Definition 1.3.1.

ii) Jede Algebra $\mathcal{A} \subset 2^X$ auf einer Menge X ist Überdeckungsklasse für X, da $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

Satz 1.2.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine Überdeckungsklasse für X, $\lambda\colon \mathcal{K} \to [0, \infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Dann wird durch*

$$\mu(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_j); K_j \in \mathcal{K}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\} \tag{1.2.1}$$

ein Mass auf X definiert.

Beweis. Offenbar ist μ wohldefiniert, $\mu \ge 0, \mu(\emptyset) = 0$.

Sei $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Zu $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ wähle $(K_{jk})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ mit $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{jk}$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_{jk}) < \mu(A_k) + 2^{-k}\varepsilon.$$

Da A von den abzählbar vielen Mengen K_{jk}, $j,k \in \mathbb{N}$, überdeckt wird, folgt

$$\mu(A) \le \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda(K_{jk}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die σ-Subadditivität von μ. □

Beispiel 1.2.2. Sei $X \neq \emptyset$, $\mathcal{K} = \{\emptyset, X\}$, und sei $\lambda\colon \mathcal{K} \to [0,\infty]$ gegeben mit $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(X) = 1$. Dann stimmt das von λ gemäss Satz 1.2.1 induzierte Mass μ offenbar überein mit dem in Beispiel 1.1.1.i) definierten Mass mit

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(A) = 1,\ \text{falls } A \neq \emptyset.$$

Falls $\mathcal{K} = \mathcal{A} \subset 2^X$ eine Algebra und $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ endlich additiv, so stellt sich die Frage, ob das von λ gemäss Satz 1.2.1 induzierte Mass μ eine σ-additive Erweiterung von λ definiert. Eine notwendige Bedingung hierfür finden wir in der folgenden Definition.

Definition 1.2.2. *Sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine Algebra. Eine Abbildung $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heisst ein* **Prämass***, falls gilt:*

i) $\lambda(\emptyset) = 0$,

ii) $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$, welches eine disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ besitzt mit $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$.

*λ heisst σ-***endlich***, falls eine Überdeckung $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ existiert mit $S_k \in \mathcal{A}$ und $\lambda(S_k) < \infty$ für alle k. (OBdA dürfen wir $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjunkt annehmen; verfahre sonst wie im Beweis von Satz 1.1.1, Teil iv).)*

Bemerkung 1.2.1. Analog zum Beweis von Satz 1.1.1, Teil iv) erhalten wir in der Definition des vom Prämass λ gemäss (1.2.1) induzierten Masses

$$\mu(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{A}\}. \tag{1.2.2}$$

für jedes A und jede Überdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ durch Wahl von $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l \in \mathcal{A}$, $k \ge 2$, eine Überdeckung mit disjunkten Mengen, wobei $\lambda(\tilde{A}_k) \le \lambda(A_k) = \lambda(A_k \setminus \tilde{A}_k) + \lambda(\tilde{A}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, gemäss Definition 1.2.2.

Satz 1.2.2. *(Carathéodory-Hahn Erweiterungssatz) Es sei $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Prämass auf X, μ wie in (1.2.2) erklärt. Dann gilt:*

i) $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$ ist ein Mass;

ii) $\mu(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$;

iii) Jedes $A \in \mathcal{A}$ ist μ-messbar.

Beweis. *i)* Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.2.1 und Beispiel 1.2.1.ii).

ii) Für beliebiges $A \subset X$ gilt offenbar $\mu(A) \leq \lambda(A)$. Für $A \in \mathcal{A}$ zeigen wir nun auch die umgekehrte Ungleichung.

Sei dazu $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$. Gemäss Bemerkung 1.2.1 dürfen wir annehmen, dass $A_k \cap A_l = \emptyset$ $(k \neq l)$. Setze $\tilde{A}_k = A_k \cap A \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$. Offenbar ist die Familie $(\tilde{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjunkt mit $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$. Da λ Prämass, folgt

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\tilde{A}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Nach Übergang zum Infimum bezüglich $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ folgt

$$\lambda(A) \leq \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{A}\} = \mu(A).$$

iii) Sei $A \in \mathcal{A}$, und sei $B \subset X$ beliebig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $B_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Da $A, B_k \in \mathcal{A}$, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\lambda(B_k) = \lambda(B_k \cap A) + \lambda(B_k \setminus A).$$

Mit $B \cap A \subset (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A))$, $B \setminus A \subset (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \setminus A))$ folgt nach Definition von μ

$$\begin{aligned}\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k \setminus A) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung aus Bemerkung 1.1.4. $\square$

Satz 1.2.3. *Sei* $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *wie in Satz 1.2.2 zusätzlich* σ*-endlich,* μ *das von* λ *induzierte Mass,* Σ *die* σ*-Algebra der* μ*-messbaren Mengen, und sei* $\tilde{\mu}\colon 2^X \to [0, \infty]$ *ein Mass mit* $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \lambda$*. Dann gilt* $\tilde{\mu}_{|\Sigma} = \mu$*; das heisst, die Carathéodory-Hahn Erweiterung ist eindeutig.*

Beweis. *i)* Sei $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$. Mit der σ-Subadditivität von $\tilde{\mu}$ folgt:

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k);$$

nach Übergang zum Infimum bezüglich $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ also

$$\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A).$$

ii) Falls $A \in \Sigma$, gilt auch die umgekehrte Ungleichung. Betrachte dazu zunächst $A \subset S \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(S) < \infty$. Mit i) erhalten wir

$$\tilde{\mu}(S \setminus A) \le \mu(S \setminus A) \le \mu(S) = \lambda(S) < \infty. \tag{1.2.3}$$

Da $A \in \Sigma$, $S \in \mathcal{A} \subset \Sigma$, folgt mit Subadditivität von $\tilde{\mu}$ zudem

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A) \le \mu(A) + \mu(S \setminus A) = \mu(S) \\ &= \lambda(S) = \tilde{\mu}(S) \le \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A). \end{aligned}$$

Damit gilt überall Gleichheit, und mit i) und (1.2.3) folgt $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$.

Im Allgemeinen sei $X \subset \bigcup_{k=1}^\infty S_k$, wobei $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjunkt, $S_k \in \mathcal{A}$, $\lambda(S_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Betrachte die disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, $A_k = A \cap S_k$, $k \in \mathbb{N}$. Wie soeben gezeigt, gilt für alle m die Gleichheit

$$\tilde{\mu}(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^m A_k).$$

Mit der Monotonie von $\tilde{\mu}$ gemäss Bemerkung 1.1.2 und mit Satz 1.1.2.ii) erhalten wir dann

$$\tilde{\mu}(A) \ge \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \mu(A),$$

wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 1.2.2. i) In Satz 1.2.3 bleibt offen, ob jedes $A \in \Sigma$ auch bezüglich $\tilde{\mu}$ messbar ist.

ii) Die Eindeutigkeitsaussage lässt sich im Allgemeinen nicht verbessern, wie das folgende Beispiel zeigt; vergleiche auch die Übungen.

Beispiel 1.2.3. Sei $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, und seien das Prämass $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ wie in Beispiel 1.2.2 gegeben, μ das davon induzierte Mass mit $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = 1$ für alle $A \neq \emptyset$. Gemäss Beispiel 1.1.2.i) gilt $\Sigma = \{\emptyset, X\} = \mathcal{A}$. Das im nächsten Abschnitt konstruierte Lebesguesche Mass $\mathcal{L}^1$ ist ebenfalls eine Erweiterung von λ mit $\mathcal{L}^1 \neq \mu$, da z.B. $\mathcal{L}^1([0,1/2]) = 1/2 \neq \mu([0,1/2]) = 1$.

1.3 Das Lebesgue-Mass

Das Lebesgue-Mass erhalten wir durch Erweiterung des Elementarinhalts von Quadern und Elementarfiguren.

Definition 1.3.1. *i) Für $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ setze*

$$\begin{aligned} &]a,b[= \prod_{k=1}^n]a_k, b_k[, \ \textit{falls } a_k < b_k, 1 \le k \le n, \\ &]a,b[= \emptyset, \ \textit{sonst;} \end{aligned}$$

analog definieren wir Intervalle $[a,b],]a,b], [a,b[$, etc. Im Falle (halb-)offener Intervalle $]a_k, b_k[$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ lassen wir $a_k = -\infty$ oder $b_k = +\infty$ zu.

ii) Der **Elementarinhalt eines Intervalls** *ist*

$$\mathrm{vol}([a,b]) = \mathrm{vol}(]a,b[) = \mathrm{vol}(]a,b]) = \mathrm{vol}([a,b[) = \cdots =$$
$$= \begin{cases} \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \infty, & \text{falls } a_k < b_k, 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

iii) Eine **Elementarfigur** *ist die Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle $I_1, \dots, I_m$, mit* **Elementarinhalt**

$$\mathrm{vol}(\bigcup_{k=1}^{m} I_k) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(I_k).$$

Bemerkung 1.3.1. Offenbar bilden die Elementarfiguren im $\mathbb{R}^n$ eine Algebra, und *vol* ist endlich additiv, σ-endlich, nicht negativ und daher auch monoton.

Bemerkung 1.3.2. Der Elementarinhalt *vol* definiert sogar ein Prämass auf der Algebra der Elementarfiguren in $\mathbb{R}^n$. Falls eine Elementarfigur I sich darstellen lässt als disjunkte Vereinigung $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ von Elementarfiguren $I_k, k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\mathrm{vol}(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k).$$

Beweis. Wegen $I \supset \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ und der Monotonie sowie der endlichen Additivität von *vol* gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{vol}(I) \ge \mathrm{vol}(\bigcup_{k=1}^{m} I_k) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(I_k).$$

Mit $m \to \infty$ folgt "$\ge$".

Umgekehrt seien oBdA I und I_k, $k \in \mathbb{N}$, Intervalle mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k) < \infty$ sowie $0 \in I$. Sei $\bar{I}$ der Abschluss von I, $I^L = \bar{I} \cap [-L, L]^n$, $L \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt

$$\mathrm{vol}(I^L) \to \mathrm{vol}(I) \ (L \to \infty).$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Beachte, dass $\bar{I} \subset (1+\varepsilon)I = \bigcup_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon)I_k$. Betrachte offene Intervalle $\tilde{I}_k \supset (1+\varepsilon)I_k$ mit

$$\mathrm{vol}(\tilde{I}_k) < (1+\varepsilon)^n \, \mathrm{vol}(I_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Endlich viele Intervalle $\tilde{I}_k$, $1 \le k \le m = m(L)$, überdecken die kompakte Menge I^L, und

$$\mathrm{vol}(I^L) \le \mathrm{vol}(\bigcup_{k=1}^{m} \tilde{I}_k) \le \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(\tilde{I}_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(\tilde{I}_k) \le (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_k) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0, L \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Definition 1.3.2. *Das* **Lebesguesche Mass** $\mathcal{L}^n$ *ist die Carathéodory-Hahn Erweiterung des Elementarinhalts.*

Satz 1.3.1. *Jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ ist abzählbare Vereinigung disjunkter Intervalle $I_l, l \in \mathbb{N}$, nach Satz 1.1.1 und 1.2.2 also $\mathcal{L}^n$-messbar.*

Beweis. Unterteile $\mathbb{R}^n$ durch sukzessiv verfeinerte achsenparallele Gitter der Maschenweite $2^{-k}, k \in \mathbb{N}$, in disjunkte halboffene Kuben I_l^k der Kantenlänge 2^{-k}. Wähle im k-ten Schritt diejenigen Kuben $I_l^k \subset G$ aus, die zu allen in den Schritten 1 bis $k-1$ ausgewählten Kuben disjunkt sind. Die so erhaltene abzählbare Schar disjunkter, achsenparalleler Kuben schöpft G aus. □

Folgerung 1.3.1. Die σ-Algebra der $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen umfasst die von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte **Borelsche** σ-Algebra $\mathcal{B}$.

Definition 1.3.3. *Ein Mass μ auf $\mathbb{R}^n$ heisst* **Borelsch**, *falls jede Borelmenge μ-messbar ist.*

Damit können wir Folgerung 1.3.1 auch so ausdrücken: $\mathcal{L}^n$ ist ein Borel-Mass.

Satz 1.3.2. *Für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf_{G \supset A, G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(G).$$

Beweis. "$\leq$" folgt unmittelbar aus der Monotonie, da für jedes $G \supset A$ gilt $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(G)$.

"$\geq$": Zu $\varepsilon > 0$ wähle Intervalle $(I_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $A \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l$ und

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_l) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Wähle offene Intervalle $I_l^* \supset I_l$ mit

$$\operatorname{vol}(I_l^*) < \operatorname{vol}(I_l) + \varepsilon \cdot 2^{-l}, l \in \mathbb{N}.$$

Setze $G = \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l^*$. G ist offen, $A \subset G$, und

$$\mathcal{L}^n(G) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_l^*) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_l) + \varepsilon \leq \mathcal{L}^n(A) + 2\varepsilon.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. □

Definition 1.3.4. *Ein Borelmass μ auf $\mathbb{R}^n$ heisst* **Borel regulär**, *falls zu jedem $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge $B \supset A$ existiert mit $\mu(A) = \mu(B)$.*

Folgerung 1.3.2. $\mathcal{L}^n$ ist Borel regulär.

Beweis. OBdA sei $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. (Sonst wähle $B = \mathbb{R}^n$.) Wähle G_k offen gemäss Satz 1.3.2 mit $G_k \supset A$ und

$$\mathcal{L}^n(G_k) < \mathcal{L}^n(A) + 1/k, k \in \mathbb{N};$$

insbesondere $\mathcal{L}^n(G_1) < \mathcal{L}^n(A) + 1 < \infty$. OBdA gelte zudem $G_k \supset G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Setze $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Dann ist B Borelsch, und mit Satz 1.1.2 folgt

$$\mathcal{L}^n(B) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(G_k) = \mathcal{L}^n(A).$$

□

Satz 1.3.3. *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

i) A ist $\mathcal{L}^n$-messbar,

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists G \supset A,\ G$ offen : $\mathcal{L}^n(G \setminus A) < \varepsilon$.

Beweis. *i) ⇒ ii)* Sei zunächst $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $G \supset A, G$ offen gemäss Satz 1.3.2 mit

$$\mathcal{L}^n(G) < \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Da A bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar, folgt nach Wahl von $B = G$ im Messbarkeitskriterium, Definition 1.1.2, die Gleichung

$$\mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(G \cap A) + \mathcal{L}^n(G \setminus A) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(G \setminus A),$$

also

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) = \mathcal{L}^n(G) - \mathcal{L}^n(A) < \varepsilon.$$

Falls $\mathcal{L}^n(A) = \infty$, setze $A_k = A \cap [-k,k]^n, k \in \mathbb{N}$, mit $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $G_k \supset A_k, G_k$ offen mit

$$\mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) < \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ offen, $G \supset A$, und

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) < \varepsilon,$$

da

$$G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A_k).$$

ii) ⇒ i) Zu $\varepsilon > 0$ wähle $G \supset A, G$ offen mit

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Da G nach Satz 1.3.1 bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar, folgt für $B \subset \mathbb{R}^n$ unter Beachtung der Beziehung $B \setminus A \subset (B \setminus G) \cup (G \setminus A)$ mit Monotonie und Subadditivität des Masses (Bemerkung 1.1.1 und 1.1.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(B) &= \mathcal{L}^n(B \cap G) + \mathcal{L}^n(B \setminus G)\\ &\ge \mathcal{L}^n(B \cap A) + \mathcal{L}^n(B \setminus A) - \mathcal{L}^n(G \setminus A).\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ und Bemerkung 1.1.4 folgt, A ist $\mathcal{L}^n$-messbar. □

Folgerung 1.3.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar, falls sich A gut von innen und aussen "einschachteln" lässt im Sinne:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset A \subset G,\ F \text{ abg.}, G \text{ offen: } \mathcal{L}^n(G \setminus A) + \mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon. \tag{1.3.1}$$

Beweis. Aus (1.3.1) folgt offenbar Bedingung ii) in Satz 1.3.3 und damit die Messbarkeit von A. Sei umgekehrt A und damit auch A^c bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\Omega \supset A^c, \Omega$ offen mit

$$\mathcal{L}^n(\Omega \setminus A^c) < \varepsilon$$

gemäss Satz 1.3.3. Setze $F = \Omega^c \subset A$. Dann ist F abgeschlossen mit

$$\mathcal{L}^n(A \setminus F) = \mathcal{L}^n(A \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(\Omega \setminus A^c) < \varepsilon,$$

und (1.3.1) folgt mit Satz 1.3.3. □

Vielleicht noch handlicher ist die folgende äquivalente Umschreibung von (1.3.1).

Folgerung 1.3.4. $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F \subset A \subset G,\ F \text{ abg.}, G \text{ offen: } \mathcal{L}^n(G \setminus F) < \varepsilon. \tag{1.3.2}$$

Beweis. Wir benutzen die aus der Zerlegung $G \setminus F = (G \setminus A) \cup (A \setminus F)$ für $F \subset A \subset G$ folgenden Inklusionen und die Monotonie des Masses.

(1.3.1) $\Rightarrow$ (1.3.2): Dies folgt aus $G \setminus F \subset (G \setminus A) \cup (A \setminus F)$.

(1.3.2) $\Rightarrow$ (1.3.1): Beachte $(G \setminus A) \subset G \setminus F$, sowie $(A \setminus F) \subset G \setminus F$. □

Zum Abschluss vergleichen wir das Lebesgue-Mass mit dem Jordanschen "Mass", wobei nach Definition eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ **Jordan-messbar** heisst, falls $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$, wobei

$$\underline{\mu}(A) = \underline{\int_{\mathbb{R}^n}} \chi_A \, d\mu = \sup\{\text{vol}(E);\ E \subset A,\ E \text{ Elementarfigur}\},$$
$$\overline{\mu}(A) = \overline{\int_{\mathbb{R}^n}} \chi_A \, d\mu = \inf\{\text{vol}(E);\ A \subset E,\ E \text{ Elementarfigur}\}.$$

Satz 1.3.4. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.*

i) Es gilt stets $\underline{\mu}(A) \le \mathcal{L}^n(A) \le \overline{\mu}(A)$.

ii) Falls A Jordan-messbar, so ist A auch $\mathcal{L}^n$-messbar, und $\mathcal{L}^n(A) = \mu(A)$.

Beweis. *i)* Offenbar gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ Intervalle}\} \\ &\le \inf\{\text{vol}(E); A \subset E = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, I_k \text{ Intervalle}\} = \overline{\mu}(A).\end{aligned}$$

Weiter gilt für jede Elementarfigur $E \subset A$:

$$\mathrm{vol}(E) = \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(A),$$

also auch

$$\underline{\mu}(A) \leq \mathcal{L}^n(A).$$

ii) Falls A Jordan-messbar so gilt $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$, also wegen i) auch

$$\mathcal{L}^n(A) = \mu(A).$$

Für den Beweis der Messbarkeit sei oBdA $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. (Sonst betrachte die Jordan-messbaren Mengen $A_k = A \cap [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}$.) Da A Jordan-messbar gibt es zu $\varepsilon > 0$ Elementarfiguren I_ε, I^ε mit $I_\varepsilon \subset A \subset I^\varepsilon$ und

$$\mathrm{vol}(I^\varepsilon) - \varepsilon < \mu(A) < \mathrm{vol}(I_\varepsilon) + \varepsilon.$$

OBdA sei $G := I^\varepsilon$ offen. Es folgt

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \leq \mathcal{L}^n(I^\varepsilon \setminus I_\varepsilon) = \mathrm{vol}(I^\varepsilon \setminus I_\varepsilon) = \mathrm{vol}(I^\varepsilon) - \mathrm{vol}(I_\varepsilon) < 2\varepsilon,$$

und A ist $\mathcal{L}^n$-messbar nach Satz 1.3.3. □

Satz 1.3.5. *Das Lebesgue-Mass ist invariant unter Bewegungen $\Phi \colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto x_0 + Rx \in \mathbb{R}^n$, wobei $R \in O(n)$.*

Beweis. *i)* Sei I ein Intervall. Dann ist $\Phi(I)$ nach Satz 1.3.4 bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar mit

$$\mathcal{L}^n(\Phi(I)) = \mu(\Phi(I)) = \mu(I) = \mathcal{L}^n(I)$$

aufgrund der Bewegungsinvarianz des Jordanschen Masses μ.

ii) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ mit disjunkten Intervallen $I_k, k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Phi(G)$ offen, $\Phi(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(I_k)$ mit disjunkten $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen $\Phi(I_k)$, also nach i)

$$\mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) = \mathcal{L}^n(G).$$

iii) Für beliebige $A, G \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A \subset G,\ G \text{ offen } \Leftrightarrow\ \Phi(A) \subset \Phi(G),\ \Phi(G) \text{ offen};$$

also nach Satz 1.3.2 und ii)

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \inf_{A \subset G, G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \inf_{A \subset G, G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(A).$$

□

1.4 Grenzen der Messbarkeit

Wie allgemein ist unser neuer Massbegriff? Ist vielleicht jede Menge messbar? Betrachte dazu das folgende Beispiel einer nicht $\mathcal{L}^1$-messbaren Menge $A \subset [0,1]$ nach Vitali.

Beispiel 1.4.1. (Vitali) Sei $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, und

$$G = \{k + l\xi;\ k, l \in \mathbb{Z}\}$$

die von 1 und ξ erzeugte additive Gruppe $G \subset \mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in G.$$

Offenbar definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. Es sei

$$X = \{[x] = x + G;\ x \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen. Jedes $[x]$ stellt einen "Orbit" dar für die Operation von G auf $\mathbb{R}$, repräsentiert durch den Punkt x der Bahn.

Mit dem **Auswahlaxiom** erhält man eine Menge A derartiger Repräsentanten, so dass jede Äquivalenzklasse $[y]$ genau einen Repräsentanten $x \in A$ besitzt mit $[y] = [x]$. Da $\mathbb{Z} \subset G$, dürfen wir zudem $A \subset [0,1]$ annehmen.

Satz 1.4.1. *Die oben definierte Vitali-Menge A ist nicht $\mathcal{L}^1$-messbar.*

Beweis. Da $\xi \notin \mathbb{Q}$ enthält $G \cap [-1,1]$ unendlich viele Punkte. Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $G \cap [-1,1]$, und sei $A_k = A + g_k \subset [-1,2]$, $k \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1: Es gilt: $A_k \cap A_l = \emptyset, k \neq l$.

Beweis. Sei $x \in A_k \cap A_l$. Dann sind

$$x - g_k, x - g_l \in A$$

Repräsentanten für $[x]$. Aus der Eindeutigkeit der Repräsentanten folgt sodann $x - g_k = x - g_l$; das heisst, $g_k = g_l$, und somit $k = l$. □

Behauptung 2: $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset [0,1]$.

Beweis. Sei $y \in [0,1]$. Wähle $x \in A$ mit $[y] = [x]$; das heisst, $y - x \in G$. Da $0 \le x, y \le 1$, folgt

$$-1 \le y - x \le 1,$$

also $y - x = g_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $y = x + g_k \in A_k$. □

Falls A $\mathcal{L}^1$-messbar wäre, und damit wegen Satz 1.3.5 auch jedes A_k, so folgt aus Satz 1.1.2 und der Monotonie des Masses $\mu = \mathcal{L}^1$ die Abschätzung

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \le \mathcal{L}^1(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_k) \le \mathcal{L}^1([-1,2]) = 3.$$

Andererseits gilt wegen Translationsinvarianz von μ

$$\mathcal{L}^1(A_k) = \mathcal{L}^1(A),\ k \in \mathbb{N},$$

was zu einem Widerspruch führt. □

Bemerkung 1.4.1. Allgemein zeigt die Konstruktion von Vitali, dass es für jedes translationsinvariante Mass μ auf $\mathbb{R}$ mit $\mu([0,1]) > 0$ nicht messbare Mengen gibt. Durch eine leichte Abwandlung des obigen Beispiels kann man sogar zeigen, dass jede Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\mu(\Omega) > 0$ eine nicht messbare Teilmenge enthält; vergleiche Wheeden-Zygmund, Cor. 3.39, S. 47.

Vitali's Konstruktion beruht auf der Betrachtung der Operation einer geeigneten unendlichen Gruppe von Translationen auf $\mathbb{R}$. Solch eine Gruppe ist notwendig kommutativ. Mit nicht kommutativen Gruppen von Kongruenzabbildungen in $\mathbb{R}^3$ oder auf der Sphäre

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

kann man noch viel erstaunlichere Dinge erreichen.

Betrachte zum Beispiel die von der Identität und den Rotationen f und g erzeugte (multiplikative) Gruppe

$$G = \{f^{a_1} g^{b_1} f^{a_2} g^{b_2} \dots g^{b_k};\ k, a_i, b_i, \in \mathbb{N}_0, 1 \le i \le k\},$$

wobei f der Rotation um 180 ° um die Polachse entspricht und g der Rotation um 120 ° um eine zur Polachse um 45° geneigte Achse. Beachte $f = f^{-1}, g^2 = g^{-1}$; aufgrund der Wahl der Achsen bestehen keine weiteren Relationen.

Jedes $h \in G \setminus \{id\}$ besitzt eine eindeutige gekürzte Darstellung $h = f^{a_1} g^{b_1} \dots$. Zerlege disjunkt

$$G = \{id\} \cup A \cup B \cup C,$$

wobei A aus allen $h \in G$ besteht, deren gekürzte Darstellung $h = f^{a_1} g^{b_1} \dots$ mit f beginnt, B aus denjenigen h beginnend mit g, C aus denen beginnend mit $g^2 = g^{-1}$. Wir erhalten somit ebenfalls disjunkte Zerlegungen

$$A = f\{id\} \cup fB \cup fC,\ B = g\{id\} \cup gA,\ C = g^2\{id\} \cup g^2 A;$$

das heisst, A ist (bis auf einzelne Punkte) “kongruent” zu 2 Kopien seiner selbst!

Auf dieser Beobachtung aufbauend, zeigt Hausdorff, dass man für eine geeignete Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Sphäre $S^2 \setminus \{x_k; k \in \mathbb{N}\} = S^*$ disjunkt in 3 Teile zerlegen kann, die zueinander paarweise kongruent sind, von denen einer aber eine kongruente Kopie der Vereinigung der beiden anderen umfasst (Hausdorff-Paradox)!

Banach-Tarski entwickeln das Hausdorff-Paradox weiter und zeigen, dass man die Vollkugel in endlich viele disjunkte Teile zerlegen kann, aus denen man zwei zur ursprünglichen Kugel kongruente Kugeln zusammensetzen kann. – Natürlich können diese Teilmengen nicht messbar sein!

Literatur:

R. M. French, Math. Intel. 10.4 (1988), 21–28.

S. Banach-A. Tarski, Fund. Math. 6 (1924), 244-277

1.5 Lebesgue-Stieltjes Mass

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig von links, das heisst

$$F(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} F(x), \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ setze

$$\lambda_F([a,b[) = \begin{cases} F(b) - F(a), \text{ falls } a \le b \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es sei Λ_F das von λ_F nach Satz 1.2.1 induzierte Mass auf $\mathbb{R}$ mit

$$\Lambda_F(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k[); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[\}.$$

Ist Λ_F Borelsch oder sogar Borel regulär? Ein einfaches Kriterium dafür liefert der folgende Begriff.

Definition 1.5.1. *Ein Mass μ auf $\mathbb{R}^n$ heisst* **metrisch**, *falls für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|a - b|\,; a \in A, b \in B\} > 0$$

gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Satz 1.5.1. *(Carathéodory-Kriterium für Borelmasse) Ein metrisches Mass μ auf $\mathbb{R}^n$ ist Borelsch.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass jedes abgeschlossene $F \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar ist.

Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $B \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Zu zeigen ist

$$\mu(B) \ge \mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F). \tag{1.5.1}$$

OBdA sei $\mu(B) < \infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$F_k = \{x \in \mathbb{R}^n; \operatorname{dist}(x, F) \le \frac{1}{k}\}.$$

Da μ metrisch und

$$\operatorname{dist}(B \setminus F_k, B \cap F) \ge \frac{1}{k} > 0,$$

folgt mit der Monotonie von μ

$$\mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F_k) = \mu((B \cap F) \cup (B \setminus F_k)) \le \mu(B).$$

Die Ungleichung (1.5.1) erhalten wir somit aus

Behauptung 1: $\mu(B \setminus F_k) \to \mu(B \setminus F) \quad (k \to \infty)$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$R_k = (F_k \setminus F_{k+1}) \cap B.$$

Die Mengen $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind disjunkt mit

$$B \setminus F = B \setminus F_k \cup \bigcup_{l=k}^{\infty} R_l, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aus der Monotonie und σ-Subadditivität von μ folgt somit für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(B \setminus F_k) \leq \mu(B \setminus F) \leq \mu(B \setminus F_k) + \sum_{l=k}^{\infty} \mu(R_l).$$

Behauptung 1 folgt somit durch Grenzübergang $k \to \infty$ aus

Behauptung 2: $\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) < \infty$.

Beweis: Beachte

$$\mathrm{dist}(R_i, R_j) > 0, \text{ falls } j \geq i + 2.$$

Da μ metrisch, folgt mit Induktion

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}) \leq \mu(B)$$

und

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k+1}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k+1}) \leq \mu(B).$$

Addition der Ungleichungen und Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) \leq 2\mu(B) < \infty,$$

wie gewünscht. □

Satz 1.5.2. *Das Lebesgue-Stieltjes Mass Λ_F ist Borel regulär.*

Beweis. *i)* Wir zeigen zunächst, Λ_F ist metrisch. Mit Satz 1.5.1 folgt, Λ_F ist Borelsch.

Seien dazu $A, B \subset \mathbb{R}$ mit

$$\delta := \mathrm{dist}(A, B) > 0.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, mit $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k[) < \Lambda_F(A \cup B) + \varepsilon.$$

Beachte, dass für beliebige $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = d$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_F([c, d[) &= F(d) - F(c) \\ &= \sum_{l=1}^{m} (F(c_l) - F(c_{l-1})) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_F([c_{l-1}, c_l[). \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Allenfalls nach weiterer Unterteilung der Intervalle $[a_k, b_k[$ dürfen wir daher annehmen, dass gilt

$$b_k - a_k < \delta,\ k \in \mathbb{N};$$

es gilt also für jedes $k \in \mathbb{N}$ entweder $A \cap [a_k, b_k[= \emptyset$ oder $B \cap [a_k, b_k[= \emptyset$. Die Überdeckung $([a_k, b_k[)_{k\in\mathbb{N}}$ zerfällt somit in eine Überdeckung von A und eine Überdeckung von B. Es folgt

$$\begin{aligned}\Lambda_F(A \cup B) &\le \Lambda_F(A) + \Lambda_F(B)\\ &\le \sum_{k;[a_k,b_k[\cap A\neq\emptyset} \lambda_F([a_k, b_k[) + \sum_{k;[a_k,b_k[\cap B\neq\emptyset} \lambda_F([a_k, b_k[)\\ &\le \sum_k \lambda_F([a_k, b_k[) \le \Lambda_F(A \cup B) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

ii) Wir zeigen, Λ_F ist Borel regulär. Sei $A \subset \mathbb{R}$, oBdA mit $\Lambda_F(A) < \infty$. (Sonst wähle $B = \mathbb{R}$.) Für $j \in \mathbb{N}$ wähle Folgen $(a_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k^j, b_k^j[=: B_j$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k^j, b_k^j[) \le \Lambda_F(A) + \frac{1}{j}.$$

Setze $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$. Mit B_j ist auch B Borelsch, $A \subset B$, und mit $B \subset B_j$ folgt

$$\begin{aligned}\Lambda_F(A) &\le \Lambda_F(B) \le \Lambda_F(B_j)\\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k^j, b_k^j[) \le \Lambda_F(A) + \frac{1}{j}\end{aligned}$$

für beliebiges $j \in \mathbb{N}$. Mit $j \to \infty$ folgt

$$\Lambda_F(A) = \Lambda_F(B);$$

also ist Λ_F Borel regulär. □

Die Menge der halboffenen Intervalle ist keine Algebra. Jedoch gilt analog zu Satz 1.2.2:

Satz 1.5.3. *Für $a < b$ gilt*

$$\Lambda_F([a, b[) = F(b) - F(a) = \lambda_F([a, b[).$$

Beweis. Offenbar gilt für $a < b$ nach Definition

$$\Lambda_F([a, b[) \le \lambda_F([a, b[) = F(b) - F(a).$$

Sei $[a,b[\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k[$. Da F von links stetig, existieren zu $\varepsilon>0$ Zahlen $\delta,\delta_k>0$ mit

$$F(b)-F(b-\delta)<\varepsilon,$$
$$F(a_k)-F(a_k-\delta_k)<\varepsilon\cdot 2^{-k}, k\in\mathbb{N}.$$

Endlich viele Intervalle $]a_k-\delta_k,b_k[, k=1,\dots,m$, oBdA mit $a_k-\delta_k<b_{k-1}$ für jedes $k>1$, überdecken das kompakte Intervall $[a,b-\delta]$. Mit (1.5.2) und der Monotonie von F folgt

$$F(b-\delta)-F(a)\le\sum_{k=1}^{m}(F(b_k)-F(a_k-\delta_k)),$$

also

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&\le F(b-\delta)-F(a)+\varepsilon\le\sum_{k=1}^{m}(F(b_k)-F(a_k-\delta_k))+\varepsilon\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k)-F(a_k))+2\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_F([a_k,b_k[)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

Nach Übergang zum Infimum bezüglich $([a_k,b_k[)_k$ und $\varepsilon\to 0$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.5.1. i) Für $F(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, gilt $\lambda_F([a,b[)=\Lambda_F([a,b[)=b-a$ für alle $a<b$ in $\mathbb{R}$; also $\Lambda_F=\mathcal{L}^1$.

ii) Falls $F(x)=1$ für $x>0$, $F(x)=0$ sonst, so folgt $\lambda_F([a,b[)=1$ für $a\le 0<b$, $\lambda_F([a,b[)=0$ sonst, und $\Lambda_F=\delta_{\{0\}}$.

1.6 Hausdorffmass

Für $s>0$, $\delta>0$ und beliebiges $A\subset\mathbb{R}^n$ setze

$$\mathcal{H}^s_\delta(A)=\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}r_k^s;\ A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{r_k}(x_k), r_k<\delta\}.$$

Nach Satz 1.2.1 definiert $\mathcal{H}^s_\delta$ ein Mass auf $\mathbb{R}^n$. Weiter gilt offenbar

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A)\le\mathcal{H}^s_{\delta_2}(A),\text{ falls }\delta_2\le\delta_1.$$

Also existiert für jedes $A\subset\mathbb{R}^n$ der Limes

$$\mathcal{H}^s(A)=\lim_{\delta\downarrow 0}\mathcal{H}^s_\delta(A)=\sup_{\delta>0}\mathcal{H}^s_\delta(A).\tag{1.6.1}$$

Definition 1.6.1. $\mathcal{H}^s$ *heisst* **s-dimensionales Hausdorff-Mass**.

Die Bezeichnung ist gerechtfertigt, da gilt:

Satz 1.6.1. *Für $s > 0$ ist $\mathcal{H}^s$ ein Borel reguläres Mass auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. *i)* Wir zeigen, $\mathcal{H}^s$ ist ein Mass. Sei $s > 0$. Offenbar gilt $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$. Sei $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \mathbb{R}^n$. Da $\mathcal{H}^s_\delta$ für jedes $\delta > 0$ ein σ-subadditives Mass ist, liefert (1.6.1) die Ungleichung

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Die σ-Subadditivität von $\mathcal{H}^s$ folgt nach Grenzübergang $\delta \to 0$.

ii) Wir zeigen, $\mathcal{H}^s$ ist metrisch und damit Borelsch. Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\delta_0 = \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Jede Überdeckung $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k)$ mit $r_k < \delta < \delta_0$ zerfällt in 2 Teile, welche die Mengen A, beziehungsweise B überdecken. Analog zum Beweis von Satz 1.5.2 folgt für $\delta < \delta_0$ die Abschätzung

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \le \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \le \mathcal{H}^s(A \cup B).$$

Nach Grenzübergang $\delta \to 0$ folgt

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \le \mathcal{H}^s(A \cup B)$$

und damit die Behauptung.

iii) Wir zeigen, $\mathcal{H}^s$ ist Borel regulär. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. OBdA sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. (Sonst ist $G = \mathbb{R}^n$ Borelsch mit $A \subset G$ und $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(G)$.) Zu $\delta_l = 1/l$ wähle Überdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_{kl}}(x_{kl}) =: G_l$ mit $r_{kl} < \delta_l$ und

$$\mathcal{H}^s_{\delta_l}(G_l) \le \mathcal{H}^s_{\delta_l}(A) + \frac{1}{l} \le \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{l}.$$

Dann ist $G := \bigcap_{l=1}^{\infty} G_l$ Borelsch mit $A \subset G$ und

$$\mathcal{H}^s(G) = \lim_{l\to\infty} \mathcal{H}^s_{\delta_l}(G) \le \lim_{l\to\infty} \mathcal{H}^s_{\delta_l}(G_l) \le \mathcal{H}^s(A).$$

□

Der Vollständigkeit halber definieren wir

$$\mathcal{H}^0(A) = \begin{cases} \#A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

das **Zählmass** auf $\mathbb{R}^n$.

Mit Hilfe der Skala von Massen $\mathcal{H}^s, s \ge 0$, können wir nun die "Dimension" einer beliebigen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ erklären. Dazu benötigen wir

Lemma 1.6.1. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \le s < t < \infty$. Dann gilt:*

i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$,

ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Beweis von Lemma 1.6.1. *i)* Sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Für $\delta > 0$, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k)$ mit $r_k < \delta$ gilt

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k^t \leq \delta^{t-s} \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s,$$

also nach Übergang zum Infimum bezüglich $B_{r_k}(x_k)$ auf der rechten Seite

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s(A).$$

Mit $\delta \to 0$ folgt $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

ii) Dies ist die Kontraposition von i). □

Beispiel 1.6.1. Sei $Q = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$2^{-n}\mathcal{L}^n(Q) \leq \mathcal{H}^n(Q) \leq 2^{-n}n^{n/2}\mathcal{L}^n(Q).$$

Beweis. Zu gegebenem $\delta > 0$ wähle k mit $r := 2^{-k-1}\sqrt{n} < \delta$. Zerlege Q mittels eines achsenparallelen Gitters der Maschenweite 2^{-k} in Würfel Q_l der Kantenlänge 2^{-k}, $1 \leq l \leq 2^{(k+1)n}$. Jeder Würfel Q_l ist enthalten in der abgeschlossenen Kugel vom Radius r mit demselben Mittelpunkt. Es folgt

$$\mathcal{H}^n_\delta(Q) \leq 2^{(k+1)n}r^n = n^{n/2} = 2^{-n}n^{n/2}\mathcal{L}^n(Q).$$

Umgekehrt folgt aus der σ-Subadditivität von $\mathcal{L}^n$ für jede Überdeckung der Einheitskugel $B_1(0)$ mit Kugeln $B_{r_k}(x_k)$ vom Radius $r_k < \delta$, $k \in \mathbb{N}$, die Abschätzung

$$\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_k}(x_k)) = \omega_n \sum_{k=1}^{\infty} r_k^n;$$

also

$$\mathcal{H}^n_\delta(Q) \geq \mathcal{H}^n_\delta(B_1(0)) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} r_k^n; B_1(0) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k), r_k < \delta\} \geq 1.$$

Mit $\delta \to 0$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.6.1. Tatsächlich gilt $\mathcal{L}^n(A) = \omega_n\mathcal{H}^n(A)$ für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren $A \subset \mathbb{R}^n$. (Siehe zum Beispiel Amann-Escher, Korollar 5.22, S.52; beachte jedoch die unterschiedlichen Normierungen.)

Beispiel 1.6.2. Für $A \subset \mathbb{R}^n$, $s > n$ gilt $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

Beweis. Sei $s > n$. Überdecke $\mathbb{R}^n$ mit Würfeln Q_l, $l \in \mathbb{N}$. Lemma 1.6.1 und Beispiel 1.6.1 ergeben $\mathcal{H}^s(Q_l) = 0$, $l \in \mathbb{N}$. Mit Satz 1.1.2 folgt $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$. □

Definition 1.6.2. *Die nach Lemma 1.6.1 und Beispiel 1.6.2 eindeutig definierte Zahl*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s > 0; \mathcal{H}^s(A) = 0\} \leq n$$

heisst **Hausdorff-Dimension** *von A.*

Beispiel 1.6.3. (Cantor Staub): Sei $A_0 = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zerlege A_0 mittels eines achsenparallelen Gitters der Maschenweite $1/4$ in 16 Teilwürfel. Es sei A_1 die aus den 4 Teilwürfeln entlang der Geradensegmente $\{(x,y) \in A_0;\ y = x \pm 1/2\}$ bestehende Teilmenge, A_2 die durch analoge Verfeinerung jedes der Teilwürfel von A_1 entstehende Menge, usw. Schliesslich sei $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. (Vergleiche z.B. Amann-Escher, S. 39.) Dann gilt: $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1$.

Beweis. Wir zeigen, $\frac{1}{2} \le \mathcal{H}^1(A) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Jede Menge A_k besteht aus 4^k Quadraten Q_l der Kantenlänge 4^{-k}. Die 4^k Bälle vom Radius $r_k = 4^{-k}\sqrt{2}/2$ um die Quadrate Q_l überdecken A_k, also auch A. Es folgt

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \le \mathcal{H}^1_\delta(A_k) \le \sqrt{2}/2$$

für alle $k \ge k_0$ mit $r_{k_0} < \delta$.

Sei $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion $\pi(x,y) = x$. Beachte $\pi(A) = [0,1]$. Sei $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(z_k)$ mit $z_k = (x_k, y_k)$, $r_k < \delta$, $k \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir

$$[0,1] = \pi(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi(B_{r_k}(z_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty}]x_k - r_k, x_k + r_k[;$$

also

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(]x_k - r_k, x_k + r_k[) = 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Die Behauptung folgt. □

1.7 Radonmasse

Sei μ ein Mass auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.7.1. *Das Mass μ heisst* **Radonmass***, falls μ Borel regulär ist und falls $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Beispiel 1.7.1.

i) $\mathcal{L}^n, \Lambda_F$ sind Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$, beziehungsweise $\mathbb{R}$.

ii) $\mathcal{H}^s$ für $s < n$ ist kein Radonmass.

iii) Falls μ Radonmass, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, so ist auch $\mu\lfloor A$ mit

$$(\mu\lfloor A)(B) := \mu(A \cap B),\ B \subset \mathbb{R}^n,$$

ein Radonmass.

Beweis. Offenbar ist $\nu := \mu\lfloor A$ ein Mass, und für kompaktes $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\nu(K) = \mu(A \cap K) \le \mu(K) < \infty$.

i) ν ist Borelsch. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ Borelsch. Für $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\nu(B) = \mu(A \cap B) &= \mu((A \cap B) \cap C) + \mu((A \cap B) \setminus C) \\ &= \mu(A \cap (B \cap C)) + \mu(A \cap (B \setminus C)) \\ &= \nu(B \cap C) + \nu(B \setminus C).\end{aligned}$$

Also ist C bzgl. ν messbar, ν Borelsch.

ii) ν ist Borel regulär. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. OBdA sei $\mu(B) < \infty$. (Betrachte sonst $B \cap Q_l$ für eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$ in Würfel Q_l, $l \in \mathbb{N}$. Beachte, dass $\mu(Q_l) < \infty$, da μ Radonsch.) Wähle C, bzw. D Borelsch mit $A \cap B \subset C$, bzw. $B \setminus A \subset D$ und

$$\mu(A \cap B) = \mu(C),\ \mu(B \setminus A) = \mu(D) \leq \mu(B) < \infty.$$

Da A μ-messbar, $A \cap B \subset A \cap C$, folgt

$$0 \leq \mu(C \setminus A) = \mu(C) - \mu(C \cap A) = \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) \leq 0;$$

also

$$\nu(C) = \mu(A \cap C) = \mu(A \cap B) = \nu(B).$$

Analog folgt wegen $B \setminus A \subset D \setminus A$ die Beziehung

$$\nu(D) = \mu(D \cap A) = \mu(D) - \mu(D \setminus A) \leq \mu(D) - \mu(B \setminus A) = 0.$$

Schliesslich ist $C \cup D =: E$ Borelsch mit $B \subset E$, und

$$\nu(B) \leq \nu(E) \leq \nu(C) + \nu(D) = \nu(B),$$

wie gewünscht. □

Für allgemeine Radonmasse μ gelten Charakterisierungen des Masses analog Satz 1.3.2:

Satz 1.7.1. *Sei μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$.*

i) Für jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \inf_{A \subset G,\ G \text{ offen}} \mu(G)\ .$$

ii) Für μ-messbares $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \sup_{F \subset A,\ F \text{ kompakt}} \mu(F)\ .$$

Es folgt unmittelbar

Satz 1.7.2. *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

i) A ist μ-messbar;

ii) A besitzt eine Darstellung $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus N$, wobei G_k offen, $k \in \mathbb{N}$, und $\mu(N) = 0$ ("G_δ-Menge").

iii) A besitzt eine Darstellung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$, wobei F_k abgeschlossen, $k \in \mathbb{N}$, und $\mu(N) = 0$ ("F_σ-Menge").

Beweis. Die Implikationen ii) $\Rightarrow$ i) und iii) $\Rightarrow$ i) sind klar nach den Sätzen 1.1.1 und 1.1.3, da μ Borelsch.

i) $\Rightarrow$ ii) OBdA sei $\mu(A) < \infty$. (Betrachte sonst $A \cap Q_l$ für eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in Würfel Q_l, $l \in \mathbb{N}$.) Wähle G_k offen gemäss Satz 1.7.1 mit $A \subset G_k$ und

$$\mu(G_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Setze $N = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A$. N ist μ-messbar. Mit Satz 1.1.2 folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(N) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k) - \mu(A) \leq \mu(G_k) - \mu(A) < \frac{1}{k}.$$

Mit $k \to \infty$ folgt $\mu(N) = 0$.

i) $\Rightarrow$ iii) Wieder sei oBdA $\mu(A) < \infty$. Wähle F_k kompakt gemäss Satz 1.7.1 mit $F_k \subset A$ und

$$\mu(A) < \mu(F_k) + \frac{1}{k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Setze $N = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. N ist μ-messbar. Es folgt

$$\mu(N) = \mu(A) - \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \leq \mu(A) - \mu(F_k) < \frac{1}{k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Mit $k \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Für den Beweis von Satz 1.7.1 benötigen wir ein Lemma.

Lemma 1.7.1. *Für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists G \supset B, \ G \text{ offen: } \mu(G \setminus B) < \varepsilon. \tag{1.7.1}$$

Beweis. Setze

$$\mathcal{G} = \{B \subset \mathbb{R}^n; \ B \text{ Borelsch, (1.7.1) gilt für } B\}.$$

Wir zeigen, $\mathcal{G}$ umfasst die Borelalgebra $\mathcal{B}$.

i) Offenbar gilt: $G \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow G \in \mathcal{G}$.

ii) Wir zeigen, $B_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $G_k \supset B_k$ offen mit

$$\mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ offen mit $G \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, und wegen

$$G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k)$$

gilt

$$\mu(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon.$$

iii) Wir zeigen: $B_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$.

OBdA sei $\mu(B_1) < \infty$. (Zerlege sonst $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} Q_l$ in disjunkte Würfel Q_l und betrachte $(B_k \cap Q_l)_{k \in \mathbb{N}}$ für festes $l \in \mathbb{N}$.) Zu $\varepsilon > 0$ wähle G_k wie in ii). Für $K \in \mathbb{N}$ ist dann $G^K = \bigcap\limits_{k=1}^{K} G_k$ offen mit $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k \subset G^K$ und

$$\mu(G^K) \le \mu(G_1) < \infty.$$

Beachte

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k).$$

(Für $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $x \notin B_k$. Dann gilt $x \in G_k \setminus B_k$.) Mit Satz 1.1.2 folgt daher

$$\begin{aligned} \lim_{K \to \infty} \mu(G^K \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) &= \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) \\ &\le \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

iv) Wegen i) und iii) enthält $\mathcal{G}$ jede abgeschlossene Menge

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{1/k}(F),$$

wobei

$$U_\delta(F) = \bigcup_{x \in F} B_\delta(x) \text{ offen.}$$

v) Setze

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{G}; B^c = \mathbb{R}^n \setminus B \in \mathcal{G}\}.$$

Dann enthält $\mathcal{F}$ alle offenen Mengen. Nach Definition gilt zudem

$$B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}.$$

Schliesslich gilt für $B_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, nach iii) und der de Morganschen Regel

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c \in \mathcal{G};$$

mit ii) also $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, die die offenen Mengen umfasst, und

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G},$$

wie gewünscht. □

Beweis von Satz 1.7.1. i) Zu $A \subset \mathbb{R}^n$ wähle B Borelsch mit $A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$. Dies ist möglich, da μ insbesondere Borel regulär. Für offenes $G \supset B$ gilt nun

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(G) - \mu(G \setminus B).$$

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 1.7.1.

ii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. μ messbar. OBdA sei $A \subset \overline{A} \subset Q$, wobei Q ein offener Würfel. (Betrachte sonst $A \cap Q_l$ für eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$ in Würfel Q_l, $l \in \mathbb{N}$.) Mit i) erhalten wir

$$\mu(Q \setminus A) = \inf_{Q\setminus A \subset G,\ G \text{ offen}} \mu(G) = \inf_{Q\setminus A \subset G \subset Q,\ G \text{ offen}} \mu(G).$$

Für offenes $G \subset Q$ mit $Q \setminus A \subset G$ ist $F = Q \setminus G \subset A$ kompakt; umgekehrt liefert jedes kompakte $F \subset A$ ein offenes $G = Q \setminus F$ mit $Q \setminus A \subset G$. Ersetzen wir im letzten Ausdruck G durch $Q \setminus F$, so folgt

$$\mu(Q) - \mu(A) = \mu(Q \setminus A) = \mu(Q) - \sup_{F \subset A,\ F \text{ kompakt}} \mu(F),$$

und damit die Behauptung. □

Weiter folgt aus Satz 1.7.1 analog zu Satz 1.3.3 das folgende Messbarkeitskriterium für ein allgemeines Radonmass.

Satz 1.7.3. *Sei μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

i) A ist μ-messbar;

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists G \supset A,\ G$ offen: $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

Beweis. Wie Satz 1.3.3 mit Satz 1.7.1 anstelle von Satz 1.3.2. □

Kapitel 2

Messbare Funktionen

2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Sei μ ein Mass auf $\mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar. Viele der in diesem Abschnitt entwickelten Begriffe und Resultate lassen sich jedoch auch in einem viel weiteren Rahmen untersuchen; vgl. Amann-Escher.

Definition 2.1.1. *$f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ heisst **μ-messbar**, falls gilt:*

i) $f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\})$ sind μ-messbar,

ii) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jedes offene $U \subset \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.1.1. Äquivalent zu ii) sind folgende Bedingungen:

iii) $f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$.

iv) $f^{-1}(]-\infty, a[)$ ist μ-messbar für jedes $a \in \mathbb{R}$.

(Analog, falls $f^{-1}(]-\infty, a]), f^{-1}(]a, \infty[), f^{-1}([a, \infty[)$ μ-messbar für $a \in \mathbb{R}$.)

Beweis. ii) $\Rightarrow$ iii) : $\mathcal{G} = \{B \subset \mathbb{R}; f^{-1}(B)\ \mu\text{-messbar}\ \}$ ist eine σ-Algebra, welche die offenen Mengen umfasst.

iv) $\Rightarrow$ iii): $(]-\infty, a[)_{a\in\mathbb{R}}$ erzeugt die Borel-Algebra $\mathcal{B}$. □

Bemerkung 2.1.2. Versieht man $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ mit der von den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und den Umgebungen $[-\infty, a[,]a, \infty], a \in \mathbb{R}$, von $\pm\infty$ erzeugten Topologie, so ist $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. μ messbar genau dann, wenn gilt

v) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jedes offene $U \subset \overline{\mathbb{R}}$,

beziehungsweise, falls gilt

vi) $f^{-1}([-\infty, a[)$ ist μ-messbar, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Beweis. vi) $\Rightarrow$ i) Benutze die Darstellungen $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, k[)$,

$f^{-1}(\{+\infty\}) = \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, k[)$.

vi) $\Rightarrow$ iv) $f^{-1}(]-\infty, a[) = f^{-1}([-\infty, a[) \setminus f^{-1}(\{-\infty\})$. $\square$

Beispiel 2.1.1. Seien $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $g \circ f$ μ-messbar.

Satz 2.1.1. *i) Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar. Dann sind die Funktionen $f+g$, $f\cdot g$, $|f|$, $f \wedge g = \min\{f, g\}$, $f \vee g = \max\{f, g\}$ ebenfalls μ-messbar, und, falls $g(x) \neq 0$, auch f/g.*

ii) Seien $f_k\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen $\inf_k f_k$, $\sup_k f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$ ebenfalls μ-messbar.

Beweis. *i)* Da f, g punktweise endlich, sind alle angeführten Funktionen erklärt. Die μ-Messbarkeit von $f+g$ folgt aus der Darstellung

$$(f+g)^{-1}([-\infty, a[) = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q},\ r+s<a} f^{-1}([-\infty, r[) \cap g^{-1}([-\infty, s[).$$

Da die Funktionen $s \mapsto s^2$, $s \mapsto -s$, $s \mapsto s/2$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind, folgt die μ-Messbarkeit von $f \cdot g$ aus der Darstellung

$$f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

und Beispiel 2.1.1.

Weiter gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty, a[) = \begin{cases} g^{-1}(]\frac{1}{a}, 0[), a < 0, \\ g^{-1}(]-\infty, 0[), a = 0, \\ g^{-1}(]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{a}, \infty[), a > 0. \end{cases}$$

Setze

$$s^+ = \max\{s, 0\},\ s^- = \max\{-s, 0\} = (-s)^+.$$

Dann folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen

$$s \mapsto s^+,\ s \to s^-$$

und den Darstellungen

$$|f| = f^+ + f^-,$$
$$f \wedge g = f - (g-f)^-,$$
$$f \vee g = f + (g-f)^+$$

die μ-Messbarkeit dieser Funktionen.

ii) Seien $f_k\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$. Die Messbarkeit der angegebenen Funktionen folgt aus den Darstellungen

$$\begin{aligned}(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k)^{-1}([-\infty,a[) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a[),\\ (\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k)^{-1}([-\infty,a[) &= \bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a-\frac{1}{l}[),\\ \liminf_{k\to\infty} f_k &= \sup_{l\in\mathbb{N}}(\inf_{k\ge l} f_k),\\ \limsup_{k\to\infty} f_k &= \inf_{l\in\mathbb{N}}(\sup_{k\ge l} f_k).\end{aligned}$$

□

Man kann μ-messbare Funktionen durch "Treppenfunktionen" approximieren.

Satz 2.1.2. *Sei $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ μ-messbar. Dann gibt es μ-messbare Mengen $A_k \subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, so dass*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}.$$

Notation: Hier und im folgenden bezeichnet χ_A die *charakteristische Funktion* einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\chi_A(x) = 1$, falls $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ sonst.

Beweis. Setze

$$A_1 = \{x;\ f(x) \ge 1\} = f^{-1}([1,\infty]).$$

A_1 ist μ-messbar. Definiere induktiv die μ-messbaren Mengen

$$A_k = \{x; f(x) \ge \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}\},\ \ k = 2,3,\dots$$

Offenbar gilt für jedes $x \in \Omega$ die Abschätzung

$$f \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}, \tag{2.1.1}$$

was sich im Falle $sup\{k;\ x \in A_k\} = \infty$ sofort aus der Definition der Mengen A_k ergibt. Andernfalls betrachte $k_0 = max\{k;\ x \in A_k\}$ und benutze, dass $x \in A_{k_0}$.

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung machen wir eine Fallunterscheidung.

i) $f(x) = \infty$. Dann gilt $x \in A_k$ für alle k, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) = \infty = f(x)$.

ii) $f(x) = 0$. Dann gilt $x \notin A_k$ für alle k; also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) = 0 = f(x)$.

iii) $0 < f(x) < \infty$. Dann gilt $x \notin A_k$ für unendlich viele k. Falls nämlich $x \in \bigcap_{k\ge k_0} A_k$, so folgt

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) > f(x),$$

im Widerspruch zur zuvor bewiesenen Ungleichung (2.1.1).

Für eine Folge von Indizes $k \to \infty$ mit $x \notin A_k$ gilt nun nach Definition von A_k

$$0 \le f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x) < \frac{1}{k}.$$

Grenzübergang $k \to \infty$ liefert die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.3. *i)* Beachte, dass die Konvergenz

$$f_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{A_j} \to f$$

monoton ist. Falls f beschränkt ist, so kann man sogar gleichmässige Konvergenz

$$\sup_x |f(x) - f_k(x)| \to 0 \ (k \to \infty);$$

zeigen (Übung). Vergleiche auch Satz 2.2.1.

ii) Durch Approximation von f^+, f^- nach Satz 2.1.2 kann man analog jede μ-messbare Funktion $f \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ durch Treppenfunktionen approximieren.

Definition 2.1.2. *Die Aussage $A(x)$ gilt für* **μ-fast alle** $x \in \Omega$, *bzw.* **μ-fast überall** *(μ-almost everywhere, μ-a.e.), falls*

$$\mu(\{x \in \Omega;\ A(x) \textit{ gilt nicht}\}) = 0.$$

Definition 2.1.3. *Eine Abbildung $F = F(x, y) \colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir als eine* **Carathéodory-Funktion**, *falls gilt*

i) für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto F(x, y)$ μ-messbar,

ii) für μ-fast alle $x \in \Omega$ ist $y \mapsto F(x, y)$ stetig.

Beispiel 2.1.2. Sei $F = F(x, y) \colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion, $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar. Dann ist $f(x) := F(x, u(x))$ ebenfalls μ-messbar.

Beweis. OBdA sei $F(x, \cdot) \in C^0(\mathbb{R})$ für **alle** $x \in \Omega$.

Die Behauptung folgt offenbar, wenn wir zeigen, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\{x; f(x) \le a\} &= \{x; F(x, u(x)) \le a\} \\ &= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} (\{x; F(x, y) < a + \frac{1}{l}\} \cap \{x; |u(x) - y| < \frac{1}{k}\}).\end{aligned}$$

"$\subset$": Zu $x \in f^{-1}([-\infty, a]), l \in \mathbb{N}$ wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$B_{1/k_0}(u(x)) \subset F(x, \cdot)^{-1}(]-\infty, a + \frac{1}{l}[).$$

Es folgt

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists y \in B_{1/k}(u(x)) \cap \mathbb{Q} \colon F(x, y) < a + \frac{1}{l};$$

also $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \ldots$ für jedes l und damit $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \ldots$.

"$\supset$": Für $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \ldots$ wähle zu gegebenem $l \in \mathbb{N}$ eine Folge $(y_k^l)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit

$$\left|u(x) - y_k^l\right| < \frac{1}{k} \to 0 \ (k \to \infty), \ \forall k \colon F(x, y_k^l) < a + \frac{1}{l}.$$

Da $F(x_0, \cdot)$ nach Annahme stetig, ergibt Grenzübergang $k \to \infty$ die Beziehung

$$\forall l \colon F(x, u(x)) \leq a + \frac{1}{l}.$$

Mit $l \to \infty$ folgt die Behauptung.

Alternativ können wir u durch Treppenfunktionen gemäss Satz 2.1.2 approximieren und anschliessend Satz 2.1.1 anwenden. $\square$

Falls μ Borelsch ist, so liefert die (Halb-)Stetigkeit ein handliches Kriterium für die Messbarkeit einer Funktion.

Beispiel 2.1.3. Sei $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, μ Borelsch. Dann ist f μ-messbar.

Beweis. $f^{-1}(\{\pm\infty\}) = \emptyset$ ist μ-messbar. Falls $U \subset \mathbb{R}$ offen, so ist $f^{-1}(U)$ offen, also μ-messbar, da μ Borelsch. $\square$

Beispiel 2.1.4. Eine Funktion $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heisst nach oben halb-stetig (oberhalbstetig, upper semi-continuous) falls gilt

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0), \ \forall x_0 \in \Omega.$$

Topologisch lässt sich dies äquivalent ausdrücken durch die Bedingung

$$f^{-1}([a, \infty]) \text{ ist abgeschlossen}, \ \forall a \in \mathbb{R},$$

oder

$$f^{-1}([-\infty, a[) \text{ ist offen}, \ \forall a \in \mathbb{R};$$

also ist f bzgl. μ messbar, falls μ Borelsch.

Analog sind in diesem Falle unterhalbstetige $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0), \ \forall x_0 \in \Omega,$$

stets μ-messbar.

2.2 Die Sätze von Lusin und Egoroff

Sei nun μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar mit $\mu(\Omega) < \infty$.

Satz 2.2.1. *(Egoroff). Seien $f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$, $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar und μ-a.e. endlich. Weiter gelte $f_k(x) \underset{(k\to\infty)}{\to} f(x)$ für μ-a.e. $x \in \Omega$. Dann folgt: $\forall \delta > 0\ \exists F \subset \Omega,\ F$ kompakt: $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$ und*

$$\sup_{x\in F} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \ (k \to \infty);$$

das heisst, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf F gleichmässig gegen f.

Beispiel 2.2.1. i) Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ ist im allgemeinen nötig, wie das Beispiel

$$f_k = \chi_{B_k(0)} \overset{(k\to\infty)}{\to} f \equiv 1\ \mathcal{L}^n - \text{a.e. in } \mathbb{R}^n$$

zeigt.

ii) Das Beispiel der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k(x) = x^k$, $0 \le x \le 1$ zeigt, dass man im Allgemeinen nicht $\delta = 0$ wählen kann.

Beweis von Satz 2.2.1. Sei $\delta > 0$. Für $i, j \in \mathbb{N}$ setze

$$C_{i,j} = \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| > 2^{-i}\}.$$

$C_{i,j}$ ist μ-messbar, da f, f_k μ-messbar sind, und es gilt $C_{i,(j+1)} \subset C_{i,j},\ \forall i, j$. Da weiter gilt $f_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ für μ-fast alle x, und da $\mu(\Omega) < \infty$, folgt mit Satz 1.1.2:

$$\lim_{j\to\infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\Big) = 0,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Also existiert für jedes i ein $N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(C_{i,N(i)}) < \delta \cdot 2^{-i-1}.$$

Setze $A = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)}$. Dann gilt

$$\mu(\Omega \setminus A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) < \delta/2,$$

und für alle $i \in \mathbb{N}$ nach Definition von $C_{i,N(i)}$

$$\sup_{x\in A} |f_k(x) - f(x)| \le 2^{-i},\ \forall k \ge N(i).$$

Wähle nun $F \subset A$ gemäss Satz 1.7.1, wobei F kompakt mit $\mu(A \setminus F) < \delta/2$. Damit gilt auch

$$\mu(\Omega \setminus F) \le \mu(\Omega \setminus A) + \mu(A \setminus F) < \delta,$$

wie verlangt. □

Satz 2.2.2. *(Lusin). Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar und μ-fast überall endlich. Dann gilt: $\forall \delta > 0\ \exists F \subset \Omega,\ F$ kompakt: $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$ und $f_{|F}\colon F \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Beispiel 2.2.2. Falls $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $f = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$, so ist $f_{|[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \colon [0,1] \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ auf dem eingeschränkten Definitionsbereich stetig, als Funktion auf $[0,1]$ jedoch stetig in **keinem** Punkt. Weiter zeigt dieses Beispiel, dass man zu $\delta = 0$ im allgemeinen kein **kompaktes** F gemäss Satz 2.2.2 finden kann.

Beweis von Satz 2.2.2. *i)* Wir zeigen, der Satz gilt für Treppenfunktionen

$$g = \sum_{i=1}^{I} b_i \chi_{B_i},\ \Omega = \bigcup_{i=1}^{I} B_i,\ B_i \cap B_j = \emptyset\ (i \neq j).$$

Zu $\delta > 0$ wähle $F_i \subset B_i$ kompakt gemäss Satz 1.7.1 mit

$$\mu(B_i \setminus F_i) < \delta \cdot 2^{-i},\ 1 \leq i \leq I.$$

Mit den Mengen B_i sind auch die Mengen F_i disjunkt; da diese zudem kompakt sind, folgt $\operatorname{dist}(F_i, F_j) > 0$ $(i \neq j)$. Damit ist g lokal konstant, also stetig auf $F := \bigcup_{i=1}^{I} F_i \subset \Omega$. Weiter ist $F \subset \Omega$ kompakt, und

$$\mu(\Omega \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{I} (B_i \setminus F_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{I} \mu(B_i \setminus F_i) < \delta.$$

ii) Seien $f_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x),\ x \in \Omega,$$

entsprechend Satz 2.1.2, wobei

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j} = \sum_{i=1}^{I_k} b_{ik} \chi_{B_{ik}}, k \in \mathbb{N},$$

mit $B_{ik} \cap B_{jk} = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^{I_k} B_{ik} = \Omega$ und mit

$$b_{ik} = \sum_{B_{ik} \subset A_j} \frac{1}{j},\ 1 \leq i \leq I_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Zu $\delta > 0$, $g = f_k$ wähle kompakte Mengen $F_k \subset \Omega$ gemäss Teil i) mit

$$\mu(\Omega \setminus F_k) < \delta \cdot 2^{-k-1},\ f_{k|_{F_k}} \colon F_k \to \mathbb{R} \text{ stetig},\ k \in \mathbb{N}.$$

Wähle weiter $F_0 \subset \Omega$ kompakt gemäss Satz 2.2.1 mit

$$\mu(\Omega \setminus F_0) < \delta/2,\ \sup_{x \in F_0} |f_k(x) - f(x)| \underset{(k\to\infty)}{\to} 0.$$

Schliesslich sei $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k \subset \Omega$. Beachte, F ist kompakt mit

$$\mu(\Omega \setminus F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (\Omega \setminus F_k)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\Omega \setminus F_k) < \delta,$$

und wegen $F \subset F_0$ folgt gleichmässige Konvergenz

$$\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| \to 0\ (k \to \infty).$$

Die Stetigkeit von $f_{k|_F}$, $k \in \mathbb{N}$, liefert nun die Stetigkeit von $f_{|_F} \colon F \to \mathbb{R}$. $\square$

2.3 Masskonvergenz

Sei μ nun wieder ein beliebiges Mass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, und seien $f,\ f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$, und sei f μ-fast überall endlich.

Definition 2.3.1. *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f im Mass, $f_k \overset{\mu}{\to} f$ $(k \to \infty)$, genau dann, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\colon \mu(\{x \in \Omega;\ |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) \to 0\ (k \to \infty).$$

In welcher Beziehung stehen die Begriffe "Masskonvergenz" und "punktweise Konvergenz μ-a.e." zueinander?

Satz 2.3.1. *Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Falls $f_k \underset{(k\to\infty)}{\to} f$ μ-a.e., so gilt auch $f_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{\mu}{\to}} f$.*

Beweis. Wir argumentieren wie im Beweis von Satz 2.2.1. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ setze

$$C_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\},\ j \in \mathbb{N}.$$

Mit f und f_k ist jedes C_j ebenfalls μ-messbar, und es gilt $C_{j+1} \subset C_j$, $j \in \mathbb{N}$, $\mu(C_1) \le \mu(\Omega) < \infty$. Falls $f_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ für μ-fast alle x, so folgt mit Satz 1.1.2

$$\mu(\{x \in \Omega; |f_j(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \le \mu(C_j) \to \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\Big) = 0 \quad (j \to \infty),$$

wie gewünscht. □

Die Umkehrung von Satz 2.3.1 gilt jedoch nicht.

Beispiel 2.3.1. Sei $\Omega = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, μ das Lebesgue-Mass,

$$f_k = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n}[},\ k \in \mathbb{N},$$

wobei für jedes k der Index $n \in \mathbb{N}_0$ so gewählt ist, dass $2^n \le k < 2^{n+1}$. Es gilt

$$\mu(\{x \in \Omega; |f_k(x)| > 0\}) = \frac{1}{2^n} \le \frac{2}{k} \to 0\ (k \to \infty),$$

also

$$f_k \overset{\mu}{\to} f \equiv 0\ (k \to \infty).$$

Jedoch gilt für jedes $x \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } k = [2^n x] + 2^n, \\ 0, \text{ alle übrigen } k \in \{2^n, \dots 2^{n+1} - 1\}, \end{cases}$$

wobei $[s] = sup\{n \in \mathbb{N};\ n \le s\}$; also ist $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ divergent.

Vielleicht überraschenderweise gilt hingegen:

Satz 2.3.2. *Falls* $f_k \xrightarrow{\mu} f\ (k \to \infty)$*, so gibt es eine Teilfolge* $\Lambda \subset \mathbb{N}$ *mit*

$$f_k \to f \ \mu\text{-a.e.}\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis. Für $k, l \in \mathbb{N}$ setze

$$A_{k,l} = \{x \in \Omega; |f_l(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

Beachte, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu(A_{k,l}) \to 0\ (l \to \infty).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle $\varphi(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(A_{k,\varphi(k)}) < 2^{-k-1}.$$

Setze

$$B_l = \bigcup_{k \geq l} A_{k,\varphi(k)}$$

mit

$$\mu(B_l) \leq \sum_{k \geq l} \mu(A_{k,\varphi(k)}) \leq 2^{-l},\ l \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt $B_{l+1} \subset B_l$, $l \in \mathbb{N}$. Da $\mu(B_1) < \infty$, folgt mit Satz 1.1.2:

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} B_l\right) = \lim_{l \to \infty} \mu(B_l) = 0.$$

Schliesslich existiert für jedes $x \notin \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} B_l$ ein $l \in \mathbb{N}$ mit $x \notin B_l = \bigcup_{k \geq l} A_{k,\varphi(k)}$; also $x \notin A_{k,\varphi(k)}$ für alle $k \geq l$, und das bedeutet

$$\forall k \geq l\colon\ \left|f_{\varphi(k)}(x) - f(x)\right| \leq 2^{-k}.$$

Es folgt

$$f_{\varphi(k)}(x) \to f(x)\ (k \to \infty).$$

□

Kapitel 3

Integration

In diesen Abschnitt sei nun μ stets ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar. Die beschriebenen Konstruktionen sind jedoch in einem viel weiteren Rahmen möglich; vgl. Amann-Escher.

3.1 Definition und elementare Eigenschaften

Nach Satz 2.1.2 können wir jede μ-messbare Funktion durch Treppenfunktionen approximieren. Verallgemeinernd definieren wir:

Definition 3.1.1. *$g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heisst σ-**Treppenfunktion**, falls $im(g)$ abzählbar ist.*

Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden stets Treppenfunktion statt σ-Treppenfunktion. (Evans-Gariepy: "simple function")

Wir definieren das Integral einer Treppenfunktion g. Beachte, dass wir nicht voraussetzen, dass $\mu(\Omega) < \infty$ oder dass $|g| < \infty$ μ-fast überall.

Definition 3.1.2. *i) Für eine μ-messbare Treppenfunktion $g\colon \Omega \to [0, \infty]$ setze*

$$\int_\Omega g\, d\mu = \sum_{0<a<\infty} a\mu(g^{-1}(\{a\})) \leq \infty, \text{ falls } g < \infty \text{ } \mu\text{-a.e.},$$

und setze $\int_\Omega g\, d\mu = \infty$ sonst.

ii) Für eine μ-messbare Treppenfunktion $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\int_\Omega g^+\, d\mu < \infty$ oder $\int_\Omega g^-\, d\mu < \infty$ setze

$$\int_\Omega g\, d\mu = \int_\Omega g^+\, d\mu - \int_\Omega g^-\, d\mu = \sum_{0 \neq a \in \mathbb{R}} a\mu(g^{-1}(\{a\})), \text{ falls } |g| < \infty \text{ } \mu\text{-a.e.},$$

und setze $\int_\Omega g\, d\mu = \pm\infty$, falls $\mu(g^{-1}(\{\pm\infty\})) > 0$.

Ähnlich dem Riemann-Integral können wir nun das μ-Integral einer μ-messbaren Funktion f definieren. Definition 3.1.2.ii) schränkt jedoch die Klasse der zur Definition des obereren, bzw. des unteren μ-Integrals zugelassenen Vergleichsfunktionen ein.

Definition 3.1.3. *i) Für μ-messbares $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ seien*

$$\overline{\int_\Omega} f\,d\mu = \inf\{\int_\Omega g\,d\mu;\ g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfunktion mit } \int_\Omega g^-\,d\mu < \infty \text{ und } g \geq f\ \mu\text{-a.e.}\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\underline{\int_\Omega} f\,d\mu = \sup\{\int_\Omega g\,d\mu;\ g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfunktion mit } \int_\Omega g^+\,d\mu < \infty \text{ und } g \leq f\ \mu\text{-a.e.}\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

oberes und unteres μ-Integral von f. Offenbar gilt stets $\underline{\int_\Omega} f\,d\mu \leq \overline{\int_\Omega} f\,d\mu$.

ii) Falls $\overline{\int_\Omega} f\,d\mu = \underline{\int_\Omega} f\,d\mu$, so heisst f **uneigentlich μ-integrabel** *mit*

$$\int_\Omega f\,d\mu = \overline{\int_\Omega} f\,d\mu = \underline{\int_\Omega} f\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(Evans-Gariepy nennen derartige f einfach "μ-integrable".)

Beispiel 3.1.1. Jede μ-messbare Funktion $f \geq 0$ ist uneigentlich integrabel.

Beweis. OBdA sei $\overline{\int_\Omega} f\,d\mu < \infty$; insbesondere also $f(x) < \infty$ für μ-a.e. $x \in \Omega$. Wir nehmen zunächst an, $\mu(\Omega) < \infty$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ setze

$$A_k = \{x \in \Omega;\ k\varepsilon \leq f(x) < (k+1)\varepsilon\},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Definiere die Treppenfunktionen

$$e = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} k\chi_{A_k},\ g = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\chi_{A_k},$$

mit $e \leq f \leq g$ μ-a.e. Offenbar gilt

$$\int_\Omega e\,d\mu \leq \underline{\int_\Omega} f\,d\mu \leq \overline{\int_\Omega} f\,d\mu \leq \int_\Omega g\,d\mu \leq \int_\Omega e\,d\mu + \varepsilon\mu(\Omega).$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Für allgemeines μ-messbares Ω betrachte eine Zerlegung $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^\infty Q_l$ in disjunkte Würfel Q_l, $l \in \mathbb{N}$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $e_l, g_l\colon \Omega \cap Q_l \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $e_l \leq f \leq g_l$ auf $\Omega_l := \Omega \cap Q_l$ und

$$\int_{\Omega_l} g_l\,d\mu \leq \int_{\Omega_l} e_l\,d\mu + 2^{-l}\varepsilon.$$

Dann sind $e = \sum_l e_l$, $g = \sum_l g_l$ μ-messbar mit $e \le f \le g$, und

$$\int_\Omega g \, d\mu \le \int_\Omega e \, d\mu + \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. □

Definition 3.1.4. *Ein μ-messbares $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heisst μ-***integrabel***, falls*

$$\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty.$$

(Evans-Gariepy nennen derartige f "μ-summable".)

Beispiel 3.1.2. i) Ist f μ-integrabel, so ist f auch uneigentlich μ-integrabel.

ii) Falls $f = 0$ μ-a.e., so ist f μ-integrabel, und $\int_\Omega f \, d\mu = 0$.

Beweis. *i)* Zerlege $f = f^+ - f^-$. Da $0 \le f^\pm \le |f|$, sind die Funktionen $f^\pm$ nach Beispiel 3.1.1 uneigentlich μ-integrabel mit $\int_\Omega f^\pm \, d\mu < \infty$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher Treppenfunktionen $0 \le e^\pm \le f^\pm \le g^\pm$ μ-a.e. mit

$$0 \le \int_\Omega e^\pm \, d\mu \le \int_\Omega f^\pm \, d\mu \le \int_\Omega g^\pm \, d\mu \le \int_\Omega e^\pm \, d\mu + \varepsilon < \infty.$$

Da die Mengen $A^\pm = \{x;\, f^\pm(x) > 0\}$ μ-messbar sind, dürfen wir zudem annehmen, dass $e^\pm = g^\pm = 0$ in $\Omega \setminus A^\pm$ Dann sind $e := e^+ - g^-$, $g := g^+ - e^-$ Treppenfunktionen mit $e \le f < g$ μ-a.e., und es gilt

$$\int_\Omega e \, d\mu \le \underline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \overline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \int_\Omega g \, d\mu \le \int_\Omega e \, d\mu + 2\varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

ii) ist offensichtlich. (Wähle $e = g = 0$.) □

Satz 3.1.1. *Seien $f_1, f_2\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uneigentlich μ-integrabel. Falls $f_1 \ge f_2$ μ-a.e., so folgt*

$$\int_\Omega f_1 \, d\mu \ge \int_\Omega f_2 \, d\mu.$$

Beweis. Beachte, dass mit $g \ge f_1$ und $f_1 \ge f_2$ μ-a.e. auch gilt $g \ge f_2$ μ-a.e. Wir erhalten also

$$\int_\Omega f_1 \, d\mu = \overline{\int_\Omega} f_1 \, d\mu = \inf_g \int_\Omega g \, d\mu \ge \overline{\int_\Omega} f_2 \, d\mu = \int_\Omega f_2 \, d\mu,$$

wobei wir das Infimum bilden über μ-messbare Treppenfunktionen $g \ge f_1$ μ-a.e. mit $\int_\Omega g^- \, d\mu < \infty$. □

Korollar 3.1.1. *Seien $f_1, f_2\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uneigentlich μ-integrabel mit $f_1 = f_2$ μ-a.e. Dann gilt: $\int_\Omega f_1 \, d\mu = \int_\Omega f_2 \, d\mu$.*

Satz 3.1.2. *(Tchebychev-Ungleichung) Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt*

$$\forall a > 0\colon \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq a\}) \leq a^{-1} \int_\Omega |f| \, d\mu.$$

Beweis. Wähle $f_1 = |f|$, $f_2 = a\chi_{\{x\in\Omega;|f(x)|\geq a\}}$ in Satz 3.1.1. □

Korollar 3.1.2. *Seien $f, f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel mit*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Dann gilt $f_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{\mu}{\to}} f$, und $f_k \to f$ μ-a.e. $(k \to \infty, k \in \Lambda)$ für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$.

Beweis. Mit Satz 3.1.2 folgt für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\mu(\{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-1} \int_\Omega |f_k - f| \, d\mu \underset{(k\to\infty)}{\to} 0\,;$$

also $f_k \overset{\mu}{\to} f$ $(k \to \infty)$. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus Satz 2.3.2. □

Satz 3.1.3. *Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrabel, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$ sowie λf μ-integrabel, und*

$$\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu,$$
$$\int_\Omega (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int_\Omega f \, d\mu.$$

Beweis. *o)* Offenbar gelten die Behauptungen für Treppenfunktionen $f = \sum_k a_k\chi_{A_k}, g = \sum_k b_k\chi_{B_k}\colon \Omega \to \mathbb{R}$. (Dabei dürfen wir oBdA annehmen, dass $A_k = B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sonst betrachte $(A_k \cap B_l)_{k,l\in\mathbb{N}}$.)

i) Nach Satz 2.1.1 ist $f + g$ μ-messbar. Zu $\varepsilon > 0$ wähle Treppenfunktionen

$$f_\varepsilon \leq f \leq f^\varepsilon, g_\varepsilon \leq g \leq g^\varepsilon$$

mit $\int_\Omega (f^\varepsilon)^- \, d\mu < \infty$, $\int_\Omega (f_\varepsilon)^+ \, d\mu < \infty$ und

$$\int_\Omega f^\varepsilon \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu < \varepsilon, \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega f_\varepsilon \, d\mu < \varepsilon,$$

und analog für g. Dann sind $f_\varepsilon + g_\varepsilon, f^\varepsilon + g^\varepsilon$ Treppenfunktionen mit

$$f_\varepsilon + g_\varepsilon \leq f + g \leq f^\varepsilon + g^\varepsilon$$

und $\int_\Omega (f_\varepsilon + g_\varepsilon)^+ \, d\mu < \infty$, $\int_\Omega (f^\varepsilon + g^\varepsilon)^- \, d\mu < \infty$, sowie

$$\overline{\int_\Omega} (f+g)\, d\mu \leq \int_\Omega (f^\varepsilon + g^\varepsilon)\, d\mu = \int\limits_\Omega f^\varepsilon \, d\mu + \int\limits_\Omega g^\varepsilon \, d\mu$$

$$\leq \int\limits_\Omega f\, d\mu + \int\limits_\Omega g\, d\mu + 2\varepsilon.$$

Analog

$$\underline{\int_\Omega} (f+g)\, d\mu \geq \int\limits_\Omega f\, d\mu + \int\limits_\Omega g\, d\mu - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt zunächst, dass $f+g$ uneigentlich μ-integrabel ist mit

$$\int\limits_\Omega (f+g)\, d\mu = \int\limits_\Omega f\, d\mu + \int\limits_\Omega g\, d\mu.$$

Angewandt auf die Funktionen $|f|$ und $|g|$, liefert dies

$$\int\limits_\Omega |f+g| \; d\mu \leq \int\limits_\Omega (|f| + |g|)\, d\mu = \int\limits_\Omega |f| \; d\mu + \int\limits_\Omega |g| \; d\mu < \infty\,;$$

also ist $f+g$ sogar eigentlich μ-integrabel.

ii) Zu $\varepsilon > 0$ wähle Treppenfunktionen $f_\varepsilon \leq f \leq f^\varepsilon$ wie in Teil i). Falls $\lambda \geq 0$, sind dann λf_ε, λf^ε Treppenfunktionen mit

$$\lambda f_\varepsilon \leq \lambda f \leq \lambda f^\varepsilon$$

und $\int_\Omega (\lambda f^\varepsilon)^- \, d\mu = \lambda \int_\Omega (f^\varepsilon)^- \, d\mu < \infty$ sowie $\int_\Omega (\lambda f_\varepsilon)^+ \, d\mu = \lambda \int_\Omega (f_\varepsilon)^+ \, d\mu < \infty$; analog erhalten wir für $\lambda < 0$ Treppenfunktionen

$$\lambda f^\varepsilon \leq \lambda f \leq \lambda f_\varepsilon,$$

mit $\int_\Omega (\lambda f^\varepsilon)^+ \, d\mu < \infty$ sowie $\int_\Omega (\lambda f_\varepsilon)^- \, d\mu < \infty$, wobei wir beachten, dass $(\lambda f^\varepsilon)^+ = |\lambda| (f^\varepsilon)^-$, bzw. $(\lambda f_\varepsilon)^- = |\lambda| (f_\varepsilon)^+$. Falls $\lambda \geq 0$, folgt

$$\overline{\int_\Omega} (\lambda f)\, d\mu \leq \int_\Omega (\lambda f^\varepsilon)\, d\mu = \lambda \int_\Omega f^\varepsilon \, d\mu \leq \lambda \int_\Omega f\, d\mu + \lambda\varepsilon$$

sowie

$$\underline{\int_\Omega} (\lambda f)\, d\mu \geq \lambda \int_\Omega f\, d\mu - \lambda\varepsilon.$$

Analog, falls $\lambda \leq 0$. Also ist λf uneigentlich μ-integrabel mit

$$\int_\Omega (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu,$$

und

$$\int_\Omega |\lambda f| \; d\mu = |\lambda| \int_\Omega |f| \; d\mu < \infty.$$

$\square$

Korollar 3.1.3. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt* $\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| \le \int_\Omega |f|\, d\mu$.

Beweis. Mit $-|f| \le f \le |f|$ folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1 und Satz 3.1.3. □

Lemma 3.1.1. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, und sei $\Omega_1 \subset \Omega$ μ-messbar. Dann sind $f_1 = f_{|\Omega_1}$ über Ω_1, bzw. $f\chi_{\Omega_1}$ über Ω μ-integrabel, und es gilt*

$$\int_{\Omega_1} f_1\, d\mu = \int_{\Omega} (f\chi_{\Omega_1})\, d\mu.$$

Beweis. f_1 und $f\chi_{\Omega_1}$ sind offenbar μ-messbar auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

o) Für jede Treppenfunktion $g \le f$ sind $g_1 = g_{|\Omega_1}$, beziehungsweise $g\chi_{\Omega_1}$ Treppenfunktionen mit $g_1 \le f_1$, beziehungsweise $g\chi_{\Omega_1} \le f\chi_{\Omega_1}$, und es gilt

$$\int_{\Omega_1} g_1\, d\mu = \int_{\Omega} (g\chi_{\Omega_1})\, d\mu;$$

analog für Treppenfunktionen $h \ge f$.

i) Zu $\varepsilon > 0$ wähle Treppenfunktionen $g \le f \le h$ mit

$$\int_{\Omega} h\, d\mu - \int_{\Omega} f\, d\mu < \varepsilon, \text{ etc.}$$

Dann folgt mit g_1, h_1, etc. wie oben

$$\begin{aligned}\overline{\int_{\Omega_1}} f_1\, d\mu - \underline{\int_{\Omega_1}} f_1\, d\mu &\le \int_{\Omega_1} h_1\, d\mu - \int_{\Omega_1} g_1\, d\mu \\ &= \int_{\Omega_1} (h_1 - g_1)\, d\mu = \int_{\Omega} (h-g)\chi_{\Omega_1}\, d\mu \\ &\le \int_{\Omega} (h-g)\, d\mu = \int_{\Omega} h\, d\mu - \int_{\Omega} g\, d\mu < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

sowie

$$\overline{\int_{\Omega}} f\chi_{\Omega_1}\, d\mu - \underline{\int_{\Omega}} f\chi_{\Omega_1}\, d\mu \le \int_{\Omega} (h-g)\chi_{\Omega_1}\, d\mu < 2\varepsilon,$$

also sind die Funktionen f_1 und $f\chi_{\Omega_1}$ uneigentlich μ-integrabel. Weiter gilt

$$\int_{\Omega_1} f_1\, d\mu - \int_{\Omega} f\chi_{\Omega_1}\, d\mu \le \int_{\Omega_1} h_1\, d\mu - \int_{\Omega} g\chi_{\Omega_1}\, d\mu = \int_{\Omega} (h-g)\chi_{\Omega_1}\, d\mu < 2\varepsilon$$

und analog

$$\int_{\Omega_1} f_1\, d\mu - \int_{\Omega} f\chi_{\Omega_1}\, d\mu \ge \int g_1\, d\mu - \int h\chi_{\Omega_1}\, d\mu > -2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. □

Korollar 3.1.4. *Für μ-integrables $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega_1) = 0$ gilt stets*

$$\int_{\Omega_1} f \, d\mu = 0.$$

Beweis. Da $f\chi_{\Omega_1} = 0$ μ-a.e. folgt die Behauptung aus Korollar 3.1.1. □

Satz 3.1.4. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ disjunkt zerlegt in μ-messbare Mengen Ω_1 und Ω_2. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega_1} f \, d\mu + \int_{\Omega_2} f \, d\mu.$$

Beweis. Mit der Darstellung

$$f = f\chi_{\Omega_1} + f\chi_{\Omega_2}$$

folgt die Behauptung direkt aus Satz 3.1.3 und Lemma 3.1.1. □

Falls $\mu = \mathcal{L}^n$, so können wir das soeben definierte Lebesgue-Integral mit dem uns bereits bekannten Riemannschen Integral vergleichen.

Eine präzise Charakterisierung Riemann-integrabler Funktionen liefert der folgende Satz.

Satz 3.1.5. *(Lebesgue) Sei $Q = \overline{Q} \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel. Eine beschränkte Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrabel genau dann, wenn $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$, wobei*

$$\Delta_f = \{x_0 \in Q;\ f \textit{ ist nicht stetig in } x_0\}.$$

Beweis. *i)* Sei $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $G \supset \Delta_f$ offen mit $\mathcal{L}^n(G) < \varepsilon$. Die Menge $K = Q \setminus G$ ist kompakt, f ist stetig in jedem Punkt $x \in Q \setminus G$. Zu $x \in Q \setminus G$ wähle $r = r(x) > 0$ mit

$$\operatorname{osc}_{Q_r(x)} f = \sup_{Q_r(x) \cap Q} f - \inf_{Q_r(x) \cap Q} f < \varepsilon,$$

wobei $Q_r(x)$ den offenen Würfel um x bezeichnet mit Kantenlänge $2r$. Endlich viele Würfel $Q_i = Q_{r(x_i)}(x_i), 1 \le i \le N$, überdecken K. Deren Komplement $R = Q \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i \subset G$ ist eine Elementarfigur mit Jordanschem Mass

$$\mu(R) = \mathcal{L}^n(R) \le \mathcal{L}^n(G) < \varepsilon.$$

Sei P die Elementarfigur $P = \bigcup_{i=1}^N Q_i$, und setze $M = sup_{x \in Q} |f(x)|$. Definiere Riemannsche Treppenfunktionen $e, g\colon Q \to \mathbb{R}$ mit

$$e(x) = \max\{\inf_{Q_i} f;\ x \in Q_i\},\ g(x) = \min\{\sup_{Q_i} f;\ x \in Q_i\},\ \text{ falls } x \in P,$$

und mit $e(x) = -M$, $g(x) = M$ für $x \in R$. Dann gilt $e \le f \le g$ in Q, und $g - e \le \varepsilon$ auf P. Mit der Notation $\underline{\int_{\Omega}^{R}} f \, dx$ für das untere Riemannsche Integral, etc., und da $\mu(P) \le \mu(Q)$, folgt

$$\overline{\int_Q^R} f\,dx - \underline{\int_Q^R} f\,dx \le \int_Q (g-e)\,d\mu < \varepsilon\,\mu(P) + 2M\,\mu(R) \le \varepsilon\,(\mu(Q)+2M).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist f somit R-integrabel.

ii) Sei $\mathcal{L}^n(\Delta_f) > 0$. Beachte $\Delta_f = \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_f^{1/k}$, wobei

$$\Delta_f^\varepsilon = \{x \in Q; \forall r > 0\colon\ \mathrm{osc}_{Q_r(x)} f > \varepsilon\},\ \varepsilon > 0.$$

Nicht alle $\Delta_f^{1/k}$ sind $\mathcal{L}^n$-Nullmengen; sonst wäre auch Δ_f eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge im Widerspruch zu unserer Annahme. Also existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{L}^n(\Delta_f^{1/k_0}) > 0.$$

Seien $e, g\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemannsche Treppenfunktionen mit $e \le f \le g$ in Q. Beachte, dass $\mathcal{L}^n(\Delta_e) = 0 = \mathcal{L}^n(\Delta_g)$, und für jedes $x \in \Delta_f^{1/k_0} \setminus (\Delta_e \cup \Delta_g)$ gilt in einem offenen Quader um x die Ungleichung $g - e \ge 1/k_0$. Setze $N = \Delta_e \cup \Delta_g$ mit $\mathcal{L}^n(\Delta_f^{1/k_0} \setminus N) = \mathcal{L}^n(\Delta_f^{1/k_0})$. Mit Definition 1.3.2 folgt so die Abschätzung

$$\int_Q g\,d\mu - \int_Q e\,d\mu = \int_Q (g-e)\,d\mu \ge \frac{1}{k_0} \inf_{A_k} \sum_{k=1}^K \mu(A_k) \ge \frac{1}{k_0}\mathcal{L}^n(\Delta_f^{1/k_0}) > 0,$$

wobei wir das Infimum bilden bzgl. disjunkten Elementarfiguren A_k, $1 \le k \le K$, mit $\Delta_f^{1/k_0} \setminus N \subset \bigcup_{k=1}^K A_k$. Also ist f nicht R-integrabel. □

Korollar 3.1.5. *Eine beschränkte, eigentlich Riemann-integrable Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer beschränkten, Jordan-messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist stets auch $\mathcal{L}^n$-messbar sowie $\mathcal{L}^n$-integrabel, und die Integrale sind gleich.*

Beweis. OBdA sei $\Omega = Q = \overline{Q}$ ein Würfel. (Setze allenfalls f fort durch $f(x) = 0$ für $x \in Q \setminus \Omega$.) Nach Satz 3.1.5 gilt $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$. Die auf $Q \setminus \Delta_f$ eingeschränkte Funktion f ist stetig, also $\mathcal{L}^n$-messbar. Damit ist dann aber auch die ursprüngliche Funktion f $\mathcal{L}^n$-messbar.

Je zwei Riemannsche Treppenfunktionen (R-Treppenfunktionen) $e \le f \le g$ sind auch zulässige $\mathcal{L}^n$-messbare σ-Treppenfunktionen gemäss Definition 3.1.3. Mit dem unteren und oberen Riemannsche Integral von f erhalten wir so die Abschätzungen

$$\underline{\int_\Omega^R} f\,dx = \sup\{\int_\Omega g\,dx;\ g \le f,\ g\,R\text{-Treppenfunktion}\ \} \le \underline{\int_\Omega} f\,d\mathcal{L}^n$$
$$\le \overline{\int_\Omega} f\,d\mathcal{L}^n \le \inf\{\int_\Omega h\,dx;\ f \le h;\ h\,R\text{-Treppenfunktion}\ \} = \overline{\int_\Omega^R} f\,dx.$$

Falls also f R-integrabel ist mit $\underline{\int_\Omega^R} f\,dx = \overline{\int_\Omega^R} f\,dx = \int_\Omega f\,dx$, so folgt

$$\underline{\int_\Omega} f\,d\mathcal{L}^n = \overline{\int_\Omega} f\,d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\,dx.$$

□

3.2 Konvergenzsätze

Seien μ, Ω weiterhin wie oben vereinbart.

Satz 3.2.1. *(Fatou's Lemma): Seien $f_k\colon \Omega \to [0,\infty]$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu.$$

Beachte, dass f_k sowie $f = \liminf_{k\to\infty} f_k \ge 0$ nach Satz 2.1.1 μ-messbar und daher nach Beispiel 3.1.1 uneigentlich μ-integrabel sind.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$\int_\Omega g \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu \tag{3.2.1}$$

für jede Treppenfunktion $g = \sum_{j=0}^\infty a_j \chi_{A_j}$ mit $g \le f = \liminf_{k\to\infty} f_k$.

OBdA sei $g \ge 0$, $a_0 = 0$, $a_j > 0$ für $j \ge 1$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \ne j)$. Fixiere $0 < t < 1$. Für $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$A_j = \bigcup_{k=1}^\infty B_{j,k},$$

wobei

$$B_{j,k} = \{x \in A_j; f_l(x) > t a_j \text{ für } l \ge k\}.$$

Da offenbar für alle $j, k \in \mathbb{N}$ ebenfalls gilt

$$B_{j,k} \subset B_{j,k+1},$$

folgt mit Satz 1.1.2

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_{j,k}) = \mu(A_j).$$

Für festes $J, k \in \mathbb{N}$ erhalten wir zudem mit Satz 3.1.4:

$$\int_\Omega f_k \, d\mu \ge \sum_{j=1}^J \int_{A_j} f_k \, d\mu \ge \sum_{j=1}^J \int_{B_{j,k}} f_k \, d\mu \ge t \sum_{j=1}^J a_j \mu(B_{j,k}).$$

Grenzübergang $k \to \infty$ liefert

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu \ge t \sum_{j=1}^J a_j \mu(A_j), \forall J \in \mathbb{N}.$$

Nach Grenzübergang $J \to \infty$ ergibt dies

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu \ge t \sum_{j=1}^\infty a_j \mu(A_j) = t \int_\Omega g \, d\mu.$$

Die gewünschte Ungleichung (3.2.1) folgt mit $t \to 1$. $\square$

Beispiel 3.2.1. Das Beispiel $\mu = \mathcal{L}^n, \Omega = \mathbb{R}^n, f_k \equiv -k^{-n}\chi_{B_k(0)}, k \in \mathbb{N}$, zeigt, dass die Bedingung $f_k \geq 0$ im allgemeinen notwendig ist.

Beispiel 3.2.2. Seien $f, f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\int_\Omega |f_k - f| \, d\mu \to 0 (k \to \infty),$$

und sei $H \geq 0$ eine Carathéodory Funktion gemäss Definition 2.1.2. Dann gilt:

$$\int_\Omega H(x, f(x)) \, d\mu(x) \leq \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega H(x, f_k(x)) \, d\mu(x) =: I.$$

Beweis. Wähle eine Teilfolge Λ mit $I = \lim_{k \to \infty; k \in \Lambda} \int_\Omega H(x, f_k(x)) \, d\mu(x)$.

Nach Korollar 3.1.3 folgt zunächst

$$f_k \overset{\mu}{\to} f \ (k \to \infty, k \in \Lambda);$$

für eine weitere Teilfolge $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ konvergiert nach Satz 2.3.2 dann f_k sogar μ-a.e. gegen f, falls $k \to \infty$, $k \in \tilde{\Lambda}$. Da $H(x, \cdot)$ für μ-a.e. $x \in \Omega$ stetig ist, folgt

$$H(x, f_k(x)) \underset{(k \to \infty, k \in \tilde{\Lambda})}{\to} H(x, f(x)) \ \mu\text{-a.e. } x \in \Omega.$$

Satz 3.2.1 liefert dann

$$\int_\Omega H(x, f(x)) \, d\mu \leq \liminf_{k \to \infty, k \in \tilde{\Lambda}} \int_\Omega H(x, f_k(x)) \, d\mu = \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega H(x, f_k(x)) \, d\mu,$$

wie gewünscht. □

Satz 3.2.2. *(Beppo Levi, Monotone Konvergenz): Seien $f_k \colon \Omega \to [0, \infty]$ μ-messbar mit $f_1 \leq \ldots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \ldots, \forall k$. Dann folgt*

$$\int_\Omega \lim_{k \to \infty} f_k \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \, d\mu.$$

Beweis. Mit Satz 3.1.1 folgt

$$\int_\Omega f_j \, d\mu \leq \int_\Omega \lim_{k \to \infty} f_k \, d\mu, \forall j.$$

Also

$$\limsup_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \, d\mu \leq \int_\Omega \lim_{k \to \infty} f_k \, d\mu.$$

Die noch fehlende Ungleichung liefert Satz 3.2.1. □

Bemerkung 3.2.1. Umgekehrt kann man Satz 3.2.1 auch aus Satz 3.2.2 herleiten. Sei dazu $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in Satz 3.2.1. Für

$$g_k = \inf_{l \geq k} f_l$$

gilt $0 \le g_1 \le \ldots \le g_{k-1} \le g_k \le f_l$ $(l \ge k \in \mathbb{N})$, und

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{k\to\infty} f_k, \quad \int_\Omega g_k \, d\mu \le \inf_{l\ge k} \int_\Omega f_l \, d\mu.$$

Nach Satz 3.2.2 gilt also

$$\int\limits_\Omega \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu = \int\limits_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega g_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k \, d\mu.$$

Satz 3.2.3. *(Lebesgue, Dominierte Konvergenz): Sei* $g\colon \Omega \to [0,\infty]$ *μ-integrabel, und seien* $f, f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *μ-messbar mit* $|f_k| \le g, k \in \mathbb{N}$, *und* $f_k \underset{(k\to\infty)}{\to} f$ *μ-a.e. Dann gilt*

$$\left| \int\limits_\Omega f_k \, d\mu - \int\limits_\Omega f \, d\mu \right| \le \int\limits_\Omega |f_k - f| \, d\mu \to 0 \ (k \to \infty).$$

Beweis. Beachte $|f| = \lim_{k\to\infty} |f_k| \le g < \infty$ μ-a.e. in Ω. Insbesondere ist $|f_k - f| \le 2g$ μ-a.e. für jedes $k \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und μ-integrabel. Da

$$2g - |f_k - f| \ge 0 \quad \mu\text{-a.e. in } \Omega, \ k \in \mathbb{N},$$

folgt mit Satz 3.2.1 und Satz 3.1.3

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega 2g \, d\mu &= \int\limits_\Omega \liminf_{k\to\infty} (2g - |f_k - f|) \, d\mu \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (2g - |f_k - f|) \, d\mu = \int\limits_\Omega 2g \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |f_k - f| \, d\mu,\end{aligned}$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Die noch fehlende Ungleichung liefern Korollar 3.1.1 und Satz 3.1.3. □

Eine **optimale** Konvergenzbedingung liefert der Satz von Vitali, siehe unten.

Anwendung 3.2.1. *(Differenzieren unter dem Integral) Sei* $f = f(x,y)\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *gegeben mit*

i) Für festes x *ist* $y \mapsto f(x,y)$ *über* $[0,1]$ *Lebesgue-integrabel;*

ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existiert und ist beschränkt. (Lokal gleichmässige Beschränktheit in* x *genügt.)*

Dann ist $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *für festes* $x \in \mathbb{R}$ *bezüglich* y *über* $[0,1]$ *Lebesgue-integrabel, und*

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^1 f(x,y) \, dy \right) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, dy.$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ gilt nach Satz 3.1.3

$$\frac{\int\limits_0^1 f(x+h,y)\,dy - \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy}{h} = \int\limits_0^1 \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,dy.$$

Für jede Folge $h_k \underset{(k\to\infty)}{\to} 0$ gilt

$$g_k(y) := \frac{f(x+h_k,y)-f(x,y)}{h_k} \underset{(k\to\infty)}{\to} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),$$

wobei mit dem Mittelwertsatz folgt

$$|g_k| \leq \sup\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| =: C,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 2.1.1 ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ bezüglich $y \in [0,1]$ Lebesgue-messbar und integrabel, und nach Satz 3.2.3 gilt

$$\int_0^1 g_k(y)\,dy \underset{(k\to\infty)}{\to} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Dies gilt für **jede** Folge $h_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Also existiert

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\int\limits_0^1 f(x+h,y)\,dy - \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy}{h} = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

□

3.3 Absolutstetigkeit des Integrals

Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Für μ-messbares $A \subset \Omega$ setze

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu. \tag{3.3.1}$$

Gemäss Satz 3.1.4 wird hierdurch eine (σ-)additive (Übung) Mengenfunktion $\nu = \mu\lfloor f$ erklärt, das "unbestimmte Integral von f". Falls $f \geq 0$ μ-a.e., so definiert die Carathéodory-Erweiterung von $\mu\lfloor f$ ein Radonmass (Übung). Daher bezeichnen Evans-Gariepy die Mengenfunktion $\mu\lfloor f$ als "signed measure".

Beachte weiter, dass $\mu\lfloor A = \mu\lfloor\chi_A$ in dieser Terminologie.

Wegen Korollar 3.1.4 gilt für alle $A \subset \Omega$

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0. \tag{3.3.2}$$

Es seien Σ_μ, Σ_ν die σ-Algebren der bzgl. μ, bzw. ν messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 3.3.1. *Eine Mengenfunktion ν mit $\Sigma_\mu \subset \Sigma_\nu$ und der Eigenschaft* (3.3.2) *heisst bezüglich μ* **absolut stetig**, *$\nu \ll \mu$.*

Die Bezeichnung wird gerechtfertigt durch den folgenden

Satz 3.3.1. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \subset \Omega,\ A\ \mu\text{-messbar}\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\ d\mu < \varepsilon.$$

Beweis. (Indirekt). Annahme, für ein $\varepsilon > 0$ existieren μ-messbare $A_k \subset \Omega$ mit

$$\mu(A_k) < 2^{-k}, \int_{A_k} |f|\ d\mu \geq \varepsilon,\ k \in \mathbb{N}.$$

Setze $B_l = \bigcup_{k=l}^\infty A_k$ mit $B_{l+1} \subset B_l \subset \ldots \Omega$ und

$$\mu(B_l) \leq \sum_{k=l}^\infty \mu(A_k) < 2^{1-l}$$

sowie

$$\int_{B_l} |f|\ d\mu = \int_\Omega |f|\, \chi_{B_l}\, d\mu \geq \varepsilon,\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Setze $A = \bigcap_{l=1}^\infty B_l$. Mit Satz 1.1.2 erhalten wir

$$\mu(A) = \lim_{l\to\infty} \mu(B_l) = 0.$$

Weiter gilt

$$g_l := |f|\, \chi_{B_l} \to |f|\, \chi_A\ (l \to \infty)$$

und

$$|g_l| \leq |f| \text{ in } \Omega,\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz 3.2.3 folgt

$$\int_A |f|\ d\mu = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega g_l\, d\mu = \lim_{l\to\infty} \int_{B_l} |f|\ d\mu \geq \varepsilon$$

im Widerspruch zu (3.3.2). □

Abstrakt können wir den Satz 3.3.1 auch wie folgt formulieren.

Satz 3.3.2. *Seien $\mu, \nu\colon 2^X \to [0,\infty]$ Masse mit $\nu \ll \mu$, wobei $\nu(X) < \infty$. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \Sigma_\mu\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.3.1 unter Verwendung von Satz 1.1.2 für abstrakte Masse. □

3.4 Der Satz von Vitali

Nun können wir ein **optimales** (notwendiges und hinreichendes) Konvergenzkriterium formulieren.

Seien $f, f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel, $k \in \mathbb{N}$.

Definition 3.4.1. *Die Familie (f_k) hat* **gleichgradig absolutstetige Integrale***, falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall A \subset \Omega,\ A\ \mu\text{-messbar}\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f_k|\, d\mu < \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Satz 3.4.1. *(Vitali): Falls $\mu(\Omega) < \infty$, so sind äquivalent*

i) $f_k \overset{\mu}{\to} f$ $(k \to \infty)$, und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat gleichgradig absolutstetige Integrale;

ii) $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\, d\mu = 0$.

Beispiel 3.4.1. Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ ist im allgemeinen notwendig, wie das Beispiel $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mu = \mathcal{L}^n$, $f_k \equiv k^{-n}\chi_{B_k(0)} \overset{\mu}{\to} f \equiv 0$ $(k \to \infty)$ zeigt. (f_k) hat gleichgradig absolutstetige Integrale, jedoch gilt $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k|\, d\mu = c > 0$ mit der von k unabhängigen Konstanten $c = \mathcal{L}^n(B_1(0))$, während $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu = 0$.

Beweis. ii) $\Rightarrow$ i): Falls $\int_\Omega |f_k - f|\, d\mu \to 0$ $(k \to \infty)$, so folgt $f_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{\mu}{\to}} f$ nach Korollar 3.1.3.

Zum Beweis von (3.4.1) wähle zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $k_0 = k_0(\varepsilon)$ mit

$$\int_\Omega |f_k - f|\, d\mu < \varepsilon,\ \forall k \geq k_0,$$

und dazu $\delta > 0$ so, dass für alle μ-messbaren Mengen $A \subset \Omega$ gilt

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon,\ \max_{1\leq k\leq k_0} \int_A |f_k|\, d\mu < \varepsilon,$$

wobei wir für $1 \leq k \leq k_0$ Satz 3.3.1 benutzen. Nach Wahl von k_0 folgt

$$\int_A |f_k|\, d\mu \leq \int_A |f|\, d\mu + \int_A |f_k - f|\, d\mu < 2\varepsilon$$

für $k \geq k_0$, falls $\mu(A) < \delta$, und damit (3.4.1).

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $f_k \overset{\mu}{\to} f$ $(k \to \infty)$ mit gleichgradig absolutstetigen Integralen.

Widerspruchsweise nehmen wir an

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\, d\mu > 0.$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge) sogar annehmen

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\, d\mu > 0.$$

Nach Satz 2.3.2 existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$, so dass $f_k \to f$ μ-a.e., falls $k \to \infty, k \in \Lambda$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass für $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \delta$ folgt

$$\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon,\ \int_A |f_k|\, d\mu < \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Zu diesem δ wähle $F \subset \Omega$ nach Satz 2.2.1 mit $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$, so dass

$$\sup_{x\in F} |f_k(x) - f(x)| \to 0\ (k \to \infty, k \in \Lambda).$$

Bestimme k_0 mit

$$\sup_{x\in F} |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega)},\ \forall k \geq k_0, k \in \Lambda.$$

Es folgt für $k \geq k_0, k \in \Lambda$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_k - f|\, d\mu &= \int_{\Omega\setminus F} \ldots + \int_F \ldots \\ &\leq \int_{\Omega\setminus F} (|f_k| + |f|)\, d\mu + \int_F \sup_{x\in F} |f_k(x) - f(x)|\, d\mu < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt der gewünschte Widerspruch. □

Beispiel 3.4.2. Sei $\mu(\Omega) < \infty$, $F = F(x,y)\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion gemäss Definition 2.1.2. Mit Konstanten $C \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ gelte zusätzlich

$$|F(x,y)| \leq C(1 + |y|^p)\ \mu\text{-a.e. } x \in \Omega,\ y \in \mathbb{R}.$$

Seien weiter $u, u_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar mit

$$\int_\Omega |u|^p\, d\mu < \infty,\ \int_\Omega |u_k|^p\, d\mu < \infty,\ \int_\Omega |u_k - u|^p\, d\mu \to 0\ (k \to \infty).$$

Dann folgt

$$\int_\Omega F(x, u_k(x))\, d\mu \to \int_\Omega F(x, u(x))\, d\mu\ (k \to \infty). \tag{3.4.2}$$

Beweis. Setze

$$f(x) := F(x, u(x)), f_k(x) = F(x, u_k(x)), k \in \mathbb{N}.$$

Nach Beispiel 2.1.4 sind die Funktionen $f, f_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar, $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt nach Voraussetzung

$$\int_\Omega |f(x)|\, d\mu \leq C \int_\Omega (1 + |u(x)|^p)\, d\mu < \infty;$$

also ist f μ-integrabel, ebenso f_k, $k \in \mathbb{N}$. Zum Beweis von (3.4.2) verifizieren wir die Voraussetzungen in Satz 3.4.1.i).

Behauptung 1: $f_k \overset{\mu}{\to} f \ (k \to \infty)$.

Beweis. Wir argumentieren ähnlich wie im Beispiel 3.2.2.

i) Mit der Tchebychev-Ungleichung Satz 3.1.2 folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mu(\{x; |u_k(x) - u(x)| > \varepsilon\}) &= \mu(\{x; |u_k(x) - u(x)|^p > \varepsilon^p\}) \\ &\leq \varepsilon^{-p} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^p \, d\mu \to 0 \ (k \to \infty);\end{aligned}$$

also gilt $u_k \overset{\mu}{\to} u \ (k \to \infty)$.

ii) Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge. Nach Satz 2.3.2 gibt es eine weitere Teilfolge $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ mit

$$u_k \to u \ \mu\text{-a.e.} \ (k \to \infty, k \in \tilde{\Lambda}).$$

Da $F(x, \cdot) \in C^0(\mathbb{R})$ für μ-a.e. $x \in \Omega$, folgt

$$f_k(x) = F(x, u_k(x)) \to F(x, u(x)) = f(x) \ (k \to \infty, k \in \tilde{\Lambda})$$

für μ-a.e. $x \in \Omega$, nach Satz 2.3.1 also

$$f_k \overset{\mu}{\to} f \ (k \to \infty, k \in \tilde{\Lambda}).$$

Da dies für **jede** Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung. □

Behauptung 2: Die Integrale $(\int |f_k| \, d\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ sind gleichgradig absolut stetig.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |u|^p \, d\mu < \varepsilon$$

und wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_\Omega |u_k - u|^p \, d\mu < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

Mit der punktweisen Ungleichung

$$|u_k|^p \leq (|u| + |u_k - u|)^p \leq 2^p(|u|^p + |u_k - u|^p)$$

folgt für jedes μ-messbare $A \subset \Omega$:

$$\begin{aligned}\int_A |f_k| \, d\mu \leq C \int_A (1 + |u_k|^p) \, d\mu &\leq C\mu(A) + 2^p C \int_A (|u|^p + |u_k - u|^p) \, d\mu \\ &\leq C\delta + 2^p C\varepsilon + 2^p C\varepsilon \leq C(1 + 2^{p+1})\varepsilon,\end{aligned}$$

falls $\mu(A) < \delta \leq \varepsilon$, $k \geq k_0$. □

Damit ist Satz 3.4.1 anwendbar, und (3.4.2) folgt. □

3.5 Die Räume $L^p(\Omega,\mu)$, $1 \le p \le \infty$

Die L^p-Räume sind für die Analysis noch wichtiger als die Räume $C^0(\Omega), C^1(\Omega), \ldots$

Es seien weiterhin μ, Ω wie zu Beginn dieses Abschnitts vereinbart.

Definition 3.5.1. *Für μ-messbares $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $1 \le p < \infty$ sei*

$$||f||_{L^p(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \infty,$$

und

$$\begin{aligned}||f||_{L^\infty(\Omega,\mu)} &= \mu - \text{ess sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \\ &= \inf\{C \in [0,\infty]; |f| \le C \ \mu\text{-a.e.}\} \le \infty.\end{aligned}$$

Für $1 \le p \le \infty$ setze

$$\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) = \{f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}};\ f \text{ ist } \mu\text{-messbar, } ||f||_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty\}.$$

Bemerkung 3.5.1. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ gilt $|f(x)| \le ||f||_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ für μ-a.e. x.

Beweis. Betrachte eine Folge (C_k) mit $C_k \downarrow ||f||_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ $(k \to \infty)$. Setze $A_k = \{x; |f(x)| > C_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Da nach Definition $\mu(A_k) = 0$ für alle k, hat auch $A = \cup_k A_k$ das Mass $\mu(A) = 0$, und es gilt $|f(x)| \le ||f||_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ für alle $x \in \Omega \setminus A$. □

Beispiel 3.5.1. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\mu = \mathcal{L}^n$ das Lebesguesche Mass.

Für $\alpha > 0$ gilt nach Korollar 3.1.5

$$\int_{B_1(0)} \left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)^p d\mathcal{L}^n = C_n \lim_{a\downarrow 0} \int_a^1 r^{n-1-\alpha p}\, dr = \begin{cases} \frac{C_n}{n-\alpha p}, & \text{falls } p < \frac{n}{\alpha} \\ \infty, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für $\alpha > 0$, $p \ge 1$ gilt daher

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$$

genau dann, wenn $p < \frac{n}{\alpha}$.

Wir wollen nun aus $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ einen normierten Raum erzeugen. Die Schwierigkeit besteht darin, dass für $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, $1 \le p \le \infty$ gilt

$$f = g \ \mu\text{-a.e.} \ \Rightarrow ||f - g||_{L^p(\Omega,\mu)} = 0;$$

das heisst, $||\cdot||_{L^p(\Omega,\mu)}$ ist nicht definit.

Mittels einer Äquivalenzklassenbildung können wir jedoch aus $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ in kanonischer Weise einen Raum erzeugen, auf welchem $||\cdot||_{L^p(\Omega,\mu)}$ eine definite Norm induziert. (Die übrigen Eigenschaften einer Norm müssen jedoch noch bewiesen werden.)

Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, $1 \le p \le \infty$ setze

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-a.e.} \Leftrightarrow ||f - g||_{L^p(\Omega,\mu)} = 0$$

und definiere die Äquivalenzklasse

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu); g \sim f\}.$$

Schliesslich setze

$$L^p(\Omega, \mu) = \{[f];\ f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)\}$$

sowie

$$||[f]||_{L^p(\Omega,\mu)} := \inf_{g\sim f} ||g||_{L^p(\Omega,\mu)} = ||f||_{L^p(\Omega,\mu)},\ f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu).$$

Konvention: Im folgenden identifizieren wir $[f]$ mit einem beliebigen Vertreter $f \in [f]$. "Funktionen" $f \in L^p(\Omega, \mu)$ sind damit im allgemeinen nur bis auf μ-Nullmengen erklärt. Man kann jedoch stets auch einen punktweise definierten Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ fixieren. Oft schreiben wir $L^p = L^p(\Omega, \mu)$, etc.

Satz 3.5.1. *Der Raum $L^p(\Omega, \mu)$ ist für $1 \le p \le \infty$ ein vollständiger normierter Raum.*

Beweis. Die positive Homogenität der Norm ist klar; zu zeigen sind die Dreiecksungleichung und die Vollständigkeit. Wir stellen zunächst die benötigten Hilfsmittel zusammen.

Lemma 3.5.1. *(Young'sche Ungleichung). Seien $1 < p, q < \infty$ Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b \ge 0.$$

Beweis. OBdA sei $b > 0$. Die Funktion

$$a \mapsto ab - \frac{a^p}{p}, a > 0$$

nimmt bei $a^* = b^{\frac{1}{p-1}}$ ihr Supremum an; also gilt für alle a

$$ab - \frac{a^p}{p} \le \sup_{a>0}\left(ab - \frac{a^p}{p}\right) = b^{\frac{p}{p-1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{b^q}{q}.$$

□

Bemerkung 3.5.2. Für eine konvexe Funktion $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $H(a)/a \to \infty$ für $|a| \to \infty$ wird durch

$$H^*(b) = \sup_a (ab - H(a))$$

eine konvexe Funktion H^* definiert, die zu H **konjugiert konvexe Funktion**.

Nach Lemma 3.5.1 ist somit $b \mapsto \frac{|b|^q}{q}$ die zu $a \mapsto \frac{|a|^p}{p}$ konjugiert konvexe Funktion; Zahlen $1 \le p, q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ heissen daher **konjugiert**.

Korollar 3.5.1. *(Höldersche Ungleichung) Seien $1 \le p,q \le \infty$ konjugiert, $f \in L^p(\Omega,\mu)$, $g \in L^q(\Omega,\mu)$. Dann gilt: $f \cdot g \in L^1(\Omega,\mu)$, und*

$$||fg||_{L^1} \le ||f||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

Beweis. OBdA sei $p \le q$. Der Fall $p = 1, q = \infty$ ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung

$$|fg| \le |f| \cdot ||g||_{L^\infty} \ \mu\text{-a.e.}$$

und Satz 3.1.1 sowie Satz 3.1.3.

Für $1 < p,q < \infty$ nimm zunächst an, dass $||f||_{L^p} = ||g||_{L^q} = 1$. Aufgrund von Lemma 3.5.1 gilt

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \le \int_\Omega \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

wie gewünscht. Für allgemeine $f, g \ne 0$ betrachte $\tilde{f} = \frac{f}{||f||_{L^p}}$, $\tilde{g} = \frac{g}{||g||_{L^q}}$. □

Korollar 3.5.2. *i) Es seien $f \in L^p$, $g \in L^q$ mit $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1$. Dann gilt $fg \in L^r$, und $||fg||_{L^r} \le ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$.*

ii) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, so folgt $L^s \subset L^r$ für $1 \le r < s \le \infty$.

Beweis. *i)* Die Aussage ist klar, falls $p = q = r = \infty$. Für $r < \infty$ folgt die Aussage aus Korollar 3.5.1, da $|f|^r \in L^{p/r}, |g|^r \in L^{q/r}$ mit $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1$.

ii) Da $\mu(\Omega) < \infty$, folgt $g \equiv 1 \in L^{\frac{rs}{s-r}}$. Beachte $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{s-r}{rs}$. Die Aussage folgt somit aus i). □

Korollar 3.5.3. *(Minkowski Ungleichung): Sei $1 \le p \le \infty$, und seien $f, g \in L^p = L^p(\Omega,\mu)$. Dann gilt $f + g \in L^p$, und*

$$||f+g||_{L^p} \le ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}.$$

Beweis. Der Fall $p = 1$ ergibt sich aus Satz 3.1.1, Satz 3.1.3 und der punktweisen Abschätzung $|f+g| \le |f| + |g|$. Ebenso folgt die Behauptung für $p = \infty$ aus der Abschätzung $|f+g| \le ||f||_{L^\infty} + ||g||_{L^\infty}$ μ-a.e.

Für $1 < p < \infty$ sei $q = \frac{p}{p-1}$ der zu p konjugierte Exponent. Aus der Abschätzung

$$|(f+g)(x)|^p \le 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \ \mu\text{-a.e. } x \in \Omega,$$

folgt $f+g \in L^p$ sowie $|f+g|^{p-1} \in L^q$. OBdA sei $f+g \not\equiv 0$. Korollar 3.5.1 liefert

$$||f+g||_{L^p}^p = \int_\Omega |f+g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \le \int_\Omega |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu + \int_\Omega |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu$$
$$\le (||f||_{L^p} + ||g||_{L^p})\ ||\,|f+g|^{p-1}||_{L^q} = (||f||_{L^p} + ||g||_{L^p})\ ||f+g||_{L^p}^{p-1}.$$

Nach Kürzen von $||f+g||_{L^p}^{p-1} \ne 0$ erhalten wir das gewünschte Resultat. □

Lemma 3.5.2. *(Vollständigkeit von $L^p(\Omega,\mu)$) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p = L^p(\Omega,\mu)$. Dann existiert $f \in L^p$ mit $||f_k - f||_{L^p} \to 0$ $(k \to \infty)$.*

Beweis. *i)* Für $p = \infty$ ist $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für μ-a.e. $x \in \Omega$ eine Cauchy-Folge, also existiert $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-a.e. $x \in \Omega$. Die Behauptung folgt aus der Abschätzung

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_k(x) - f_l(x)| \le \limsup_{l\to\infty} ||f_k - f_l||_{L^\infty} \to 0 \ (k \to \infty)$$

gleichmässig für μ-a.e. $x \in \Omega$.

ii) Sei $p < \infty$. Wir konstruieren zunächst eine konvergente Teilfolge $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Wähle $\varphi(k), k \in \mathbb{N}$, so dass

$$||f_l - f_m||_{L^p} < 2^{-k}, \ \forall l, m \ge \varphi(k).$$

Setze

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)} \right|.$$

F ist μ-messbar nach Satz 2.1.1, $F \ge 0$, also ist F (uneigentlich) integrabel, ebenso F^p. Satz 3.2.2 und Korollar 3.5.3 liefern

$$\left(\int_\Omega |F|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \lim_{l\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{l} \left|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\right|\right)^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \lim_{l\to\infty} || \sum_{k=1}^{l} |f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}| \, ||_{L^p} \le \sum_{k=1}^{\infty} ||f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}||_{L^p} < \infty.$$

Das heisst, $F \in L^p$; insbesondere gilt $F < \infty$ μ-a.e., und

$$f := \lim_{l\to\infty} f_{\varphi(l)} = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l-1} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}) + f_{\varphi(1)}$$

existiert μ-a.e. in Ω. Weiter gilt:

$$\left|f - f_{\varphi(l)}\right| = \left|\sum_{k=l}^{\infty} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)})\right| \le F, \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere folgt damit auch $f \in L^p$, und mit Satz 3.2.3 erhalten wir

$$\lim_{l\to\infty} \int_\Omega \left|f - f_{\varphi(l)}\right|^p d\mu = 0;$$

das heisst, $f_{\varphi(l)} \to f$ in L^p $(l \to \infty)$.

Es ist nun leicht einzusehen, dass auch die ganze Folge (f_k) gegen f konvergiert. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \ge \varphi(k)$ gilt

$$\begin{aligned} ||f_l - f||_{L^p} &\le ||f_l - f_{\varphi(k)}||_{L^p} + ||f_{\varphi(k)} - f||_{L^p} \\ &\le 2^{-k} + ||f_{\varphi(k)} - f||_{L^p}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\limsup_{l\to\infty} ||f_l - f||_{L^p} \le \lim_{k\to\infty}(2^{-k} + ||f_{\varphi(k)} - f||_{L^p}) = 0.$$

□

Definition 3.5.2. *Ein Banachraum X heisst* **separabel**, *falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.*

Satz 3.5.2. *Sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt:*

i) $L^p(\Omega,\mu)$ ist separabel;

ii) $C_c^0(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $L^p(\Omega,\mu)$.

Dabei bezeichnet $C_c^0(\overline{\Omega})$ den Raum der stetigen Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompaktem "Träger"

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}} \subset\subset \Omega.$$

Bemerkung 3.5.3. Für $p = \infty$ gelten die Aussagen von Satz 3.5.2 nicht: Offenbar ist $C^0(\overline{\Omega})$ ein abgeschlossener, echter Teilraum von $L^\infty(\Omega,\mu)$. Das folgende Beispiel zeigt, dass $L^\infty(\Omega,\mu)$ im allgemeinen auch nicht separabel ist.

Beispiel 3.5.2. Sei $\Omega = [0,1]$, $\mu = \mathcal{L}^1$. Für $0 < t \le 1$ setze $f_t = \chi_{[0,t]}$ mit $||f_t - f_s||_{L^\infty} = 1$ $(s \neq t)$. Die Menge $(f_t)_{t>0}$ ist überabzählbar. Gäbe es eine abzählbare Menge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\inf_k ||f_t - e_k||_{L^\infty} < \frac{1}{2}$ für alle $t > 0$, so wäre die Abbildung, welche $k \in \mathbb{N}$ das eindeutige $t = t(k)$ mit $||f_t - e_k||_{L^\infty} < \frac{1}{2}$ zuordnet, surjektiv. Dies ist aber unmöglich.

Beweis von Satz 3.5.2. Nach dem Weierstrassschen Approximationssatz liegen die Polynome dicht in $C^0(\overline{\Omega})$ für jedes $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Somit folgt i) aus ii). Wir führen den Beweis jedoch unabhängig und erhalten auf diesem Wege auch einen elementaren Beweis für die Aussage ii).

i) Es sei E die abzählbare Menge

$$E = \{\sum_{k=1}^N a_k\chi_{Q_k};\ a_k \in \mathbb{Q},\ Q_k \subset \mathbb{R}^n \text{ ist Teilwürfel}$$
$$\text{eines dyadischen Gitters mit Kantenlänge } 2^{-l}\}.$$

Wir zeigen: E liegt dicht in $L^p(\Omega,\mu)$. Sei $f \in L^p(\Omega,\mu)$, $f = f^+ - f^-$, $f^\pm \ge 0$. OBdA sei $f = f^+$. Nach Satz 2.1.2 ist f monotoner Limes von Treppenfunktionen $f_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}\chi_{A_j}$. Mit Satz 3.2.3 folgt $||f_k - f||_{L^p} \to 0$ $(k \to \infty)$. Es genügt daher, die folgende Behauptung zu zeigen.

Behauptung: $\chi_A \in \overline{E}$ für jedes μ-messbare $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$.

Beweis. Nach Satz 1.7.1 gilt

$$\mu(A) = \inf_{A\subset G,\ G \text{ offen}} \mu(G).$$

Wähle $G_k \supset A$, G_k offen, $G_{k+1} \subset G_k$, mit

$$\mu(G_k) < \mu(A) + \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Da $(\chi_{G_k} - \chi_A) \in \{0,1\}$, folgt

$$\int_\Omega |\chi_{G_k} - \chi_A|^p \, d\mu = \mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \to 0 \ (k \to \infty).$$

Daher dürfen wir A als offen voraussetzen. Nach Satz 1.3.1 gibt es disjunkte dyadische Würfel I_l mit $A = \bigcup_{l=1}^\infty I_l$, und $\mu(A) = \sum_{l=1}^\infty \mu(I_l)$ nach Satz 1.1.2. Es folgt

$$||\chi_A - \sum_{l=1}^k \chi_{I_l}||_{L^p} \to 0 \ (k \to \infty),$$

und offenbar gilt $\sum_{l=1}^k \chi_{I_l} \in E, \ \forall k$. $\square$

ii) Wegen i) genügt es zu zeigen, dass für jeden Würfel $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ stetige (sogar glatte) Funktionen f_k existieren mit $f_k \underset{(k\to\infty)}{\to} \chi_Q$ in $L^p(\Omega,\mu)$. Die f_k erhält man leicht durch "Abglätten" der "Kanten" von χ_Q. $\square$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung 3.5.4. Die Räume $L^p(\Omega,\mu), 1 < p < \infty$, beziehungsweise $L^1(\Omega,\mu)$, $L^\infty(\Omega,\mu)$ unterscheiden sich auch durch ihre "Geometrie". So ist die 1-Kugel in $L^p(\Omega,\mu)$ **strikt** konvex für $1 < p < \infty$, für $p = 1$ oder $p = \infty$ hingegen nicht. (Vergleiche die p-Normen in $\mathbb{R}^2$.)

Die strikte Konvexität der Normkugel hat auch etwas mit dem folgenden Kriterium für Konvergenz in $L^p(\Omega,\mu)$ zu tun. Dieses gilt zwar auch im Falle $p = 1$, nicht hingegen für $p = \infty$, wie die Betrachtung einer Folge $(f_{t_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \downarrow 1/2$ $(k \to \infty)$ aus Beispiel 3.5.2 zeigt.)

Satz 3.5.3. *Seien $f, f_k \in L^p(\Omega,\mu), k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$. Es sind äquivalent:*

i) $||f_k - f||_{L^p} \to 0 \ (k \to \infty)$*;*

ii) $f_k \overset{\mu}{\to} f \ (k \to \infty)$*, und* $||f_k||_{L^p} \to ||f||_{L^p}$ *für* $k \to \infty$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Masskonvergenz folgt analog Korollar 3.1.3. Die Dreiecksungleichung, Korollar 3.5.3, liefert

$$\big| ||f_k||_{L^p} - ||f||_{L^p} \big| \le ||f_k - f||_{L^p}.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Beachte, dass $2^p |f_k|^p + 2^p |f|^p - |f_k - f|^p \ge 0$. Mit Fatou's Lemma, Satz 3.2.1, erhalten wir für jede punktweise konvergente Teilfolge

$$\begin{aligned} 2^{p+1} &\int_\Omega |f|^p \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|^p \, d\mu \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (2^p |f_k|^p + 2^p |f|^p - |f_k - f|^p) \, d\mu \\ &\ge \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} (2^p |f_k|^p + 2^p |f|^p - |f_k - f|^p) \, d\mu = 2^{p+1} \int_\Omega |f|^p \, d\mu. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.3.2 enthält somit jede Teilfolge von (f_k) eine normkonvergente Teilfolge. Die Behauptung folgt. $\square$

Kapitel 4

Produktmasse, Mehrfache Integrale

Die Integration stetiger Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch das Auffinden von Stammfunktionen möglich. Durch die Auflösung von Gebietsintegralen in mehrfache eindimensionale (Riemann-)Integrale wird das Problem der Integration stetiger Funktionen in höheren Dimensionen gelöst.

Sei z.B. $f \in C^0([a,b] \times [c,d])$. Dann ist f über $I\colon = [a,b] \times [c,d]$ R-integrabel, und

$$\int_I f \, d\mathcal{L}^2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Ein ähnliches Prinzip gilt auch, wenn wir einen allgemeineren Massbegriff zugrunde legen.

4.1 Der Satz von Fubini

Seien X, Y irgendwelche Mengen, und seien μ, bzw. ν Masse auf X, bzw. Y.

Definition 4.1.1. *Das* **Produktmass** $\mu \times \nu\colon 2^{X \times Y} \to [0, \infty]$ *wird für* $S \subset X \times Y$ *erklärt durch*

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i);\ S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, \right.$$
$$\left. A_i \subset X \ \mu\text{-messbar},\ B_i \subset Y \ \nu\text{-messbar},\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bemerkung 4.1.1. Falls man für messbare $A \subset X$, $B \subset Y$ als Produktinhalt

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

definiert, so entspricht die obige Definition der Konstruktion gemäss Satz 1.2.1. (Indem man λ additiv auf (endliche) disjunkte Vereinigungen derartiger Mengen $A \times B$ (“Elementarfiguren”) ausdehnt, erhält man sogar ein Prämass, wie wir im Beweis von Satz 4.1.1.i) sehen werden; also ist $\mu \times \nu$ die Carathéodory-Erweiterung von λ nach Satz 1.2.2.)

Beispiel 4.1.1. Falls $X = \mathbb{R}^k$, $Y = \mathbb{R}^l$ und falls $\mu = \mathcal{L}^k$, $\nu = \mathcal{L}^l$ das k-, bzw. l-dimensionale Lebesgue-Mass, so gilt offenbar $\mu \times \nu = \mathcal{L}^n$, $n = k + l$ (Übung).

Dies ist im wesentlichen die Situation, die wir im folgenden betrachten wollen. Der folgende Satz 4.1.1 gilt jedoch für allgemeinere Masse.

Satz 4.1.1. *(Fubini). Seien μ, ν Radonmasse auf $X = \mathbb{R}^k$, bzw. $Y = \mathbb{R}^l$, $\mu \times \nu$ deren Produktmass auf $X \times Y = \mathbb{R}^n$, $n = k + l$. Dann gilt:*

i) Für μ-messbares $A \subset X$, ν-messbares $B \subset Y$ ist $A \times B$ messbar bezüglich $\mu \times \nu$, und

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

ii) Sei $S \subset X \times Y$ messbar bezüglich $\mu \times \nu$ mit $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Dann ist die Menge $S_y = \{x; (x, y) \in S\}$ für ν-a.e. y bzgl. μ messbar, und die Abbildung

$$y \mapsto \mu(S_y) = \int_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x)$$

ist ν-integrabel mit

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y)\, d\nu(y) = \int_Y \left(\int_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Eine analoge Aussage gilt für $S_x = \{y; (x, y) \in S\}$, etc.

iii) $\mu \times \nu$ ist ein Radonmass.

iv) Für $(\mu \times \nu)$-integrables $f \colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die Abbildungen

$$y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x),$$

bzw.

$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$$

bzgl. ν, bzw. μ integrabel, und es gilt

$$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Zum Beweis von Satz 4.1.1 definiere

$$\mathcal{F} = \{S \subset X \times Y;\ S \text{ erfüllt } (4.1.1), (4.1.2)\},$$

wobei

$$x \mapsto \chi_S(x, y) \text{ ist } \mu\text{-messbar für } \nu\text{-a.e. } y, \tag{4.1.1}$$

und

$$y \mapsto \int_X \chi_S(x,y)\,d\mu(x) = \mu(S_y) \text{ ist } \nu\text{-messbar.} \tag{4.1.2}$$

Für $S \in \mathcal{F}$ setze

$$\rho(S) = \int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Unser Ziel ist nun, für $(\mu \times \nu)$-messbare $S \subset X \times Y$ die Aussagen $S \in \mathcal{F}$ und $\rho(S) = (\mu \times \nu)(S)$ zu zeigen, insbesondere für $S = A \times B$.

Definiere dazu die Familien

$$\mathcal{P}_0 = \{A \times B;\ A \subset X\ \mu\text{-messbar},\ B \subset Y\ \nu\text{-messbar}\},$$
$$\mathcal{P}_1 = \{\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j;\ S_j \in \mathcal{P}_0\},\ \mathcal{P}_2 = \{\bigcap_{j=1}^{\infty} R_j;\ R_j \in \mathcal{P}_1\}.$$

Lemma 4.1.1. *$\mathcal{P}_k \subset \mathcal{F}$, $k = 0, 1, 2$.*

Beweis. *o)* Offenbar gilt $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$, und

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \text{ für } A \times B \in \mathcal{P}_0\ . \tag{4.1.3}$$

i) Für $A_1 \times B_1,\ A_2 \times B_2 \in \mathcal{P}_0$ gilt

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{P}_0.$$

Ebenso kann man

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2))$$

als disjunkte Vereinigung von Mengen in $\mathcal{P}_0$ darstellen. Damit können wir jedes $S \in \mathcal{P}_1$ als disjunkte Vereinigung $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,\ S_j \in \mathcal{P}_0$ schreiben.

Wir zeigen, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$, und für $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ mit disjunkten $S_j \in \mathcal{P}_0$ gilt

$$\rho(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j). \tag{4.1.4}$$

Für jedes y ist nach Satz 2.1.1 die Funktion

$$x \mapsto \chi_S(x,y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \chi_{S_j}(x,y)$$

μ-messbar. Mit Satz 3.2.2 und ν-Messbarkeit von $y \mapsto \int_X \chi_{S_j}(x,y)\,d\mu(x)$ für alle j folgt, die Abbildung

$$y \mapsto \int_X \chi_S(x,y)\,d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{S_j}(x,y)\,d\mu(x)$$

ist ν-messbar. Schliesslich erhalten wir nach erneuter Anwendung von Satz 3.2.2 die gewünschte Identität (4.1.4)

$$\begin{aligned}\rho(S) &= \int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_Y \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_Y \left(\int_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j).\end{aligned}$$

ii) Wir zeigen, $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{F}$, und für $R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$ mit $R_j \in \mathcal{P}_1$ und $\rho(R_j) < \infty$ $(j \in \mathbb{N})$ gilt

$$\rho(R) = \lim_{k\to\infty} \rho\Big(\bigcap_{j=1}^{k} R_j \Big). \tag{4.1.5}$$

OBdA sei $R_{j+1} \subset R_j$, $j \in \mathbb{N}$. (Sonst betrachte die Familie $(\tilde{R}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{R}_1 = R_1$, $\tilde{R}_{j+1} = R_{j+1} \cap \tilde{R}_j$, $j \geq 1$.) Mit der gleichmässigen Schranke $\chi_{R_j}(x,y) \leq \chi_{R_1}$, $j \in \mathbb{N}$, liefert Satz 3.2.3 die Identität

$$\begin{aligned}\rho(R) &= \int_Y \left(\int_X \lim_{j\to\infty} \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_Y \lim_{j\to\infty} \left(\int_X \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_Y \left(\int_X \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \lim_{j\to\infty} \rho(R_j);\end{aligned}$$

das heisst, (4.1.5), wie gewünscht. □

Lemma 4.1.2. *Für alle $S \subset X \times Y$ gilt*

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\{\rho(R);\ S \subset R \in \mathcal{P}_1\}.$$

Beweis. Für jede Überdeckung $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i =: R$ gilt analog (4.1.4)

$$\rho(R) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i);$$

also

$$\inf\{\rho(R);\ S \subset R \in \mathcal{P}_1\} \leq (\mu \times \nu)(S).$$

Weiter können wir jedes derartige R wie im Beweis von (4.1.4) disjunkt in der Form $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j \times B'_j$ zerlegen mit

$$\rho(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A'_j \times B'_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A'_j)\nu(B'_j) \geq (\mu \times \nu)(S).$$

□

Beweis von Satz 4.1.1.i). Sei $A \times B \in \mathcal{P}_0$. Nach Definition von $\mu \times \nu$ und (4.1.3) gilt:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) \leq \rho(R)$$

für alle $R \in \mathcal{P}_1$ mit $A \times B \subset R$. Mit Lemma 4.1.2 folgt

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \inf\{\rho(R); A \times B \subset R \in \mathcal{P}_1\} = \rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Schliesslich zeigen wir, $A \times B$ ist $(\mu \times \nu)$-messbar. Sei dazu $T \subset X \times Y$ beliebig, $R \in \mathcal{P}_1$ mit $T \subset R$. Wie im Beweis von Lemma 4.1.1.i) gezeigt, können wir

$$R = R \setminus (A \times B) \cup R \cap (A \times B)$$

disjunkt in $\mathcal{P}_1$ zerlegen. Mit Lemma 4.1.2 und (4.1.4) folgt:

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B))& \\ \leq \rho(R \setminus (A \times B)) + \rho(R \cap (A \times B)) = \rho(R).&\end{aligned}$$

Wiederum mit Lemma 4.1.2 folgt nach Übergang zum Infimum bezüglich $R \supset T$, $R \in \mathcal{P}_1$, die Abschätzung

$$(\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) \leq (\mu \times \nu)(T);$$

also ist $A \times B$ bezüglich $\mu \times \nu$ messbar. □

Bemerkung 4.1.2. Mit (4.1.3) und (4.1.4) folgt für $S = A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, mit disjunkten $S_i \in \mathcal{P}_0$, die Gleichung

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) = \rho(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S_i).$$

Also ist λ ein Prämass auf der von $\mathcal{P}_0$ erzeugten Algebra der Elementarfiguren. Behauptung i) folgt somit auch aus Satz 1.2.2.

Mit der Familie $\mathcal{P}_0$ sind nun auch $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ Teil der σ-Algebra der $(\mu \times \nu)$-messbaren Mengen, und für $R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j \in \mathcal{P}_2$ mit $R_j \in \mathcal{P}_1$, $\rho(R_j) < \infty$ $(j \in \mathbb{N})$ gilt

$$(\mu \times \nu)(R) = \rho(R) \tag{4.1.6}$$

nach Satz 1.1.2, beziehungsweise (4.1.3) - (4.1.5).

Lemma 4.1.3. *Für jedes $S \subset X \times Y$ gibt es $R \in \mathcal{P}_2$ mit $S \subset R$ und*

$$\rho(R) = (\mu \times \nu)(R) = (\mu \times \nu)(S).$$

Beweis. OBdA sei $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. (Sonst setze $R = X \times Y$.) Für $j \in \mathbb{N}$ wähle $S \subset R_j \in \mathcal{P}_1$ gemäss Lemma 4.1.2 mit

$$(\mu \times \nu)(S) \leq \rho(R_j) \leq (\mu \times \nu)(S) + \frac{1}{j}.$$

OBdA sei $R_{j+1} \subset R_j$, $j \in \mathbb{N}$. (Sonst betrachte die Familie $(\tilde{R}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{R}_1 = R_1$, $\tilde{R}_{j+1} = R_{j+1} \cap \tilde{R}_j$, $j \geq 1$.) Setze

$$R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j \in \mathcal{P}_2$$

mit $S \subset R$. Die Behauptung folgt aus (4.1.5). □

Beweis von Satz 4.1.1.ii). Sei $S \subset X \times Y$ bezüglich $(\mu \times \nu)$ messbar mit $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Wähle $R \in \mathcal{P}_2$ gemäss Lemma 4.1.3 mit $S \subset R$ und

$$(\mu \times \nu)(S) = \rho(R).$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle.

a) Es sei $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) = 0$. Da $0 \leq \chi_S \leq \chi_R$, folgt in diesem Fall $S \in \mathcal{F}$, $\rho(S) = 0$, wie gewünscht.

b) Falls $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) > 0$, betrachte $R \setminus S$ mit

$$(\mu \times \nu)(R \setminus S) = (\mu \times \nu)(R) - (\mu \times \nu)(S) = 0.$$

(Beachte $(\mu \times \nu)(R) = \rho(R)$ gemäss (4.1.6).) Nach Lemma 4.1.3 gibt es $T \in \mathcal{P}_2$ mit $R \setminus S \subset T$ und $\rho(T) = (\mu \times \nu)(R \setminus S) = 0$. Wie in a) folgt

$$\rho(R \setminus S) = \rho(T) = 0;$$

das heisst,

$$\mu(S_y) = \mu(R_y) \text{ für } \nu\text{-a.e. } y\,,$$

und

$$(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) = \int_Y \mu(R_y)\, d\nu(y) = \int_Y \mu(S_y)\, d\nu(y) = \rho(S).$$

□

Beweis von Satz 4.1.1.iii). Jede offene Menge $S \subset \mathbb{R}^n$, $n = k + l$, ist nach Satz 1.3.1 eine abzählbare Vereinigung von Intervallen, also $(\mu \times \nu)$-messbar nach Teil i); das heisst, $\mu \times \nu$ ist Borelsch.

Da μ, ν Borel regulär, gelten die Aussagen von Lemma 4.1.2 und Lemma 4.1.3 auch, falls man $\mathcal{P}_i$ ersetzt durch

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = \{A \times B;\ A, B \text{ Borelsch}\},$$
$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = \{\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j;\ S_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0\},\ \tilde{\mathcal{P}}_2 = \{\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j;\ S_j \in \tilde{\mathcal{P}}_1\}.$$

Da $\tilde{\mathcal{P}}_2$ enthalten ist in der Borelalgebra von $\mathbb{R}^n$, ist $\mu \times \nu$ Borel regulär nach Lemma 4.1.3.

Für kompaktes $K \subset \mathbb{R}^n$ wähle einen abgeschlossenen Würfel $Q = Q_1 \times Q_2$ mit $K \subset Q$. Es folgt

$$(\mu)(K) \leq (\mu \times \nu)(Q) = \mu(Q_1) \cdot \nu(Q_2) < \infty.$$

□

Beweis von Satz 4.1.1.iv). Für $f = \chi_S$ folgt iv) aus ii).

Falls $f \geq 0$, schreibe f gemäss Satz 2.1.2 als (monotonen) Limes von Treppenfunktionen

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{S_j}, \; S_j \; (\mu \times \nu)\text{-messbar.}$$

Aufgrund von ii) und der Linearität des Integrals gilt die Behauptung für die Partialsummen $f_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{S_j}$, $k \in \mathbb{N}$. Nach Grenzübergang $k \to \infty$ und Anwendung von Satz 3.2.2 folgt die Behauptung für f.

Beliebiges f zerlegen wir $f = f^+ - f^-$. □

Bemerkung 4.1.3. Eine Menge $S \subset X \times Y$, welche (4.1.1) und (4.1.2) erfüllt, muss nicht $(\mu \times \nu)$-messbar sein. Betrachte dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 4.1.2. Sei $X = Y = \mathbb{R}$, $\mu = \nu = \mathcal{L}^1$ das Lebesgue-Mass, $A \subset [0,1]$ nicht messbar, und setze

$$S = \{(x,y); \; |x - \chi_A(y)| < 1/2, \; y \in [0,1]\}.$$

S ist nicht $\mu \times \nu$-messbar; jedoch ist S_y μ-messbar für alle y, und $\mu(S_y) \equiv 1$.

Bemerkung 4.1.4. *i)* Falls $f \colon X \times Y \to [0, \infty]$ bzgl. $\mu \times \nu$ messbar ist, so ergibt der Beweis von Satz 4.1.1.iv) zusammen mit Satz 3.2.2, dass f bzgl. $(\mu \times \nu)$ integrabel ist, falls eines der iterierten Integrale existiert (Tonelli).

ii) Im allgemeinen kann eines der iterierten Integrale existieren, ohne dass f $\mu \times \nu$-messbar sein muss oder ohne dass f bzgl. $\mu \times \nu$ integrabel ist. (Betrachte zum Beispiel $f = \chi_S$ mit S wie in Beispiel 4.1.2, bzw. $f(x,y) = \sin(y)/x$ auf $]0,1] \times [0, 2\pi]$ mit $\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy = 0$ für alle $x \in]0,1]$.)

4.2 Faltung

Wesentlich für das Folgende ist die Translationsinvarianz des zugrundeliegenden Masses. Daher sei in diesem Abschnitt stets $\mu = \mathcal{L}^n$, das n-dimensionale Lebesguesche Mass.

Wie in Abschnitt 3.5 schreiben wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ der Einfachheit halber $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$ oder auch nur L^p, falls der Integrationsbereich aus dem Zusammenhang klar ist.

Lemma 4.2.1. *Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar bezüglich $\mathcal{L}^n$. Dann ist die Funktion*

$$F(x,y) = f(x-y) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$$

messbar bezüglich $\mathcal{L}^{2n}$.

Beweis. Mit der Substitution $x - y =: z$ erhalten wir für $a \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} F^{-1}([-\infty, a[) &= \{(x,y); \; f(x-y) < a\} \\ &= \{(x, x-z); \; f(z) < a\} = T(\mathbb{R}^n \times \{z; \; f(z) < a\}) \end{aligned}$$

mit $T(x,z) = (x, x-z)$. Offenbar ist $T\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ Lipschitz stetig, und $\mathbb{R}^n \times \{z; f(z) < a\}$ ist $\mathcal{L}^{2n}$-messbar nach Satz 4.1.1.

Die Behauptung folgt somit aus dem folgenden Lemma 4.2.2. □

Lemma 4.2.2. *Sei $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit*

$$|Tx - Ty| \le L\,|x-y|\,,\ \ x, y \in \mathbb{R}^n,$$

und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Dann ist TA $\mathcal{L}^n$-messbar.

Beweis. *i)* Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-Nullmenge. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $G \supset N$ offen mit $\mu(G) < \varepsilon$ gemäss Satz 1.7.1, und zerlege

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

in Würfel I_j der Kantenlänge l_j, $j \in \mathbb{N}$, gemäss Satz 1.3.1. Es folgt

$$TN \subset TG = \bigcup_{j=1}^{\infty} TI_j,$$

und für jedes j ist TI_j in einem Würfel der Kantenlänge

$$L_j \le C(n) L l_j$$

enthalten. Somit erhalten wir

$$\mu(TN) \le \mu(TG) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(TI_j) \le CL^n \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) = CL^n \mu(G) \le CL^n \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\mu(TN) = 0$; insbesondere ist TN bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar.

ii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Nach Satz 1.7.2 hat A die Darstellung

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$$

mit kompakten Mengen F_k, $k \in \mathbb{N}$, und $\mu(N) = 0$. Mit F_k ist auch TF_k kompakt für jedes k und somit insbesondere $\mathcal{L}^n$-messbar. Also ist auch

$$TA = \bigcup_{k=1}^{\infty} TF_k \cup TN$$

nach i) und Satz 1.1.1 $\mathcal{L}^n$-messbar. □

Satz 4.2.1. *Seien $f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(x-z)\, dz$$

messbar, und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$||f*g||_{L^1} \le ||f||_{L^1} ||g||_{L^1}.$$

Bemerkung 4.2.1. Beachte, dass die so definierte "Faltung" symmetrisch ist: $f * g = g * f$.

Beweis. Gemäss Lemma 4.2.1 ist die Funktion $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ $\mathcal{L}^{2n}$-messbar.

i) Seien $f, g \geq 0$. Dann ist F (uneigentlich) $\mathcal{L}^{2n}$-integrabel. Aus Satz 4.1.1 und Bemerkung 4.1.4 folgt sodann

$$\begin{aligned} ||f * g||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,dx \right) \right] dy = ||f||_{L^1} ||g||_{L^1}, \end{aligned}$$

da $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,dx = ||f||_{L^1}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$.

ii) Für allgemeine f, g folgt mit i) zunächst $|F(x,y)| = |f(x-y)|\,|g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, mit Satz 4.1.1 also $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit Korollar 3.1.2 erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} ||f * g||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right) dx = ||\,|f| * |g|\,||_{L^1} = ||f||_{L^1} ||g||_{L^1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.2.1. *Sei* $L^p = L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$.

i) $f \in L^1,\ g \in L^p \Rightarrow f * g \in L^p$, *und*

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1} ||g||_{L^p}.$$

ii) $f \in L^p,\ g \in L^q,\ 1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} =: 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow f * g \in L^r$, *und*

$$||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

Beweis. *i)* Der Fall $p = 1$ entspricht Satz 4.2.1. Für $1 < p < \infty$ sei $1 < q < \infty$ zu p konjugiert. Mit Korollar 3.5.1 und Satz 4.2.1 schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}}_{\in L^q} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|}_{\in L^p}\,dy \right|^p dx \\ &\leq ||f||_{L^1}^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy \right) dx \\ &\leq ||f||_{L^1}^{\frac{p}{q}} ||\,|f| * |g|^p\,||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}^{1+\frac{p}{q}} ||g||_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Der Fall $p = \infty$ folgt unmittelbar aus Korollar 3.5.1.

ii) OBdA sei $p \leq q$. Mit $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \frac{1}{q}$ erhalten wir $p \leq q \leq r$. Der Fall $r = \infty$ entspricht der Hölderschen Ungleichung, Korollar 3.5.1; den

Fall $p = 1$ haben wir unter i) bereits erledigt. OBdA dürfen wir also annehmen $1 < p \le q < r < \infty$. Schreibe

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}}}_{\in L^s} \underbrace{|g(y)|^{1-\frac{q}{r}}}_{\in L^t} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{p}{r}}\,|g(y)|^{\frac{q}{r}}}_{\in L^r}\,dy$$

mit $s = \frac{p}{1-\frac{p}{r}}$, $t = \frac{q}{1-\frac{q}{r}}$. Beachte

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) = 1.$$

Die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung (vergleiche Übung 10.3) zusammen mit der Abschätzung $||\,|f|^p * |g|^q\,||_{L^1}^{\frac{1}{r}} \le ||f||_{L^p}^{\frac{p}{r}} ||g||_{L^q}^{\frac{q}{r}}$ liefern somit

$$\begin{aligned} ||f*g||_{L^r} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)^r dx\right)^{1/r} \\ &\le ||f||_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} ||g||_{L^q}^{1-\frac{q}{r}} ||\,|f|^p * |g|^q\,||_{L^1}^{\frac{1}{r}} \le ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Anwendung 4.2.1. *(Lösung der Laplace-Gleichung)*

Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u.$$

Zu $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ suchen wir eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ der *Laplace-Gleichung*

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n. \tag{4.2.1}$$

Zur Motivation des Folgenden betrachten wir zunächst das einfachere Problem, eine vorgegebene Funktion $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ aus Δu zurückzugewinnen.

Partielle Integration mit dem Satz von Gauss liefert die folgende fundamentale Identität.

Satz 4.2.2. *Für glatt berandetes, beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi,\ \psi \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt*

$$\int_\Omega (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) do,$$

wobei n die äussere Normale an Ω bezeichnet und $\frac{\partial\psi}{\partial n} = n \cdot \nabla\psi$.

Wählen wir zu gegebenem $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in Satz 4.2.2 ein offenes Ω mit $supp(u) = \overline{\{x; u(x) \neq 0\}} \subset \Omega$, so folgt mit $\psi = u$ für beliebiges $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi\,dx = -\int_\Omega \varphi\Delta u\,dx.$$

Falls es uns gelingt, eine Funktion $\varphi = g$ zu finden, welche in einem geeigneten Sinne die Gleichung

$$-\Delta g = \delta_0$$

erfüllt, so erwarten wir eine Darstellung der Form

$$u = g * (-\Delta u)$$

durch Faltung mit der *Grundlösung* g. Dabei ist δ_0 die *Dirac-Distribution* mit

$$\delta_0(u) = u(0) \text{ für alle } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

$n = 1$: Setze

$$g(x) = -\frac{1}{2}|x|, \; x \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$\Delta g(x) = g''(x) = 0 \text{ für alle } x \neq 0$$

und

$$g'(-\varepsilon) - g'(\varepsilon) = 1 \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\big(g*(-\Delta u)\big)(x_0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} u''(x) g(x_0 - x)\, dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} u''(x) g(x_0 - x)\, dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} u''(x) g(x_0 - x)\, dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0}(g'(-\varepsilon) - g'(\varepsilon)) u(x_0) = u(x_0)\,.
\end{aligned}$$

$n \geq 3$: Setze

$$g(x) = \frac{1}{(n-2)\alpha_{n-1}\,|x|^{n-2}} =: c(n)|x|^{2-n}, \; x \neq 0.$$

Dabei bezeichnet α_{n-1} das $(n-1)-$dimensionale Volumen der Sphäre S^{n-1}.

Beachte, $g \in L^1_{loc}$ nach Beispiel 3.5.1, also $g \in L^1(K)$ für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$, und

$$\begin{aligned}
&\nabla(|x|^{2-n}) = (2-n)x\,|x|^{-n}\,, \; x \neq 0, \\
&\Delta(|x|^{2-n}) = 0, \; x \neq 0.
\end{aligned}$$

Für allgemeines $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $n \geq 3$ machen wir den Ansatz

$$u = f * g.$$

Satz 4.2.3. *$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ löst* (4.2.1).

Beweis. Betrachte zunächst $x_0 \notin supp(f) = \overline{\{x;\; f(x) \neq 0\}}$. Gemäss Anwendung 3.2.1 gilt

$$\Delta u_{|x=x_0} = \Delta_{|x=x_0} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta g)(x_0 - y) f(y)\, dy = 0 = f(x_0).$$

Für allgemeines x benütze die Symmetrie der Faltung. Mit Anwendung 3.2.1 erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\Delta u_{|x=x_0} &= \Delta_{|x=x_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x-y)g(y)\,dy_{|x=x_0} \\ &= \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(0)} \Delta f(x-y)g(y)\,dy_{|x=x_0}.\end{aligned}$$

Beachte

$$\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y),$$

wobei der Index auf die Variable verweist, bezüglich der differenziert wird. Es folgt:

$$\Delta u_{|x=x_0} = \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(0)} \Delta_y f(x_0-y)g(y)\,dy.$$

Anwendung von Satz 4.2.2 mit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)$, $n(x) = -x/|x|$, $\varphi = g$, $\psi = f(x_0 - \cdot)$ liefert

$$\begin{aligned}-\Delta u_{|x=x_0} &= c(n) \lim_{\delta\to 0} \int_{\partial B_\delta(0)} \left(\frac{y}{|y|} \cdot \nabla f(x_0-y) \frac{1}{|y|^{n-2}} + \frac{(n-2)}{|y|^{n-1}} f(x_0-y)\,do(y) \right) \\ &= c(n)(n-2)\cdot \alpha_{n-1} f(x_0) = f(x_0).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.2.2. Im Falle $n = 2$ ist die "Grundlösung" gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Beachte

$$\nabla \log\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{x}{|x|^2},\ x \neq 0.$$

Es folgt

$$\Delta g = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = 0,\ x \neq 0,$$

sowie

$$\int_{\partial B_\delta(0)} \frac{\partial g}{\partial n}\,do = 1,$$

wobei wie oben $n(x) = -\frac{x}{|x|}$ die äussere Normale auf $\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0))$ bezeichnet und $\frac{\partial g}{\partial n} = n \cdot \nabla g$.

Sehr wichtig für die Anwendungen ist der folgende Satz von Calderon-Zygmund, den wir ohne Beweis zitieren.

Satz 4.2.4. *(Calderon-Zygmund, Hausdorff-Young): Für $1 < p < \infty$ und $u = f * g$ mit $f \in L^p \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\nabla^2 u = \nabla^2 g * f \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{4.2.2}$$

Falls zudem $p < n$, bzw. $p < n/2$, so erhalten wir zudem die Abschätzungen

$$\nabla u = \nabla g * f \in L^r(\mathbb{R}^n), \ \frac{1}{r} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \tag{4.2.3}$$

bzw.

$$u \in L^q(\mathbb{R}^n), \ \frac{1}{q} = \frac{n-2}{n} + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \tag{4.2.4}$$

(mit Abschätzungen für die entsprechenden Normen).

Bemerkung 4.2.3. Wäre $g \in L_{loc}^{\frac{n}{n-2}}$, $\nabla g \in L_{loc}^{\frac{n}{n-1}}$, $\nabla^2 g \in L^1_{loc}$, so erhielten wir diese Aussagen aus Korollar 4.2.1.ii); jedoch verfehlt g diese Regularität knapp. Zum Beweis der obigen Aussagen benötigen wir statt dessen die Hausdorff-Young-Ungleichung und die Theorie der singulären Integraloperatoren der **Harmonischen Analysis**.

Kapitel 5

Differentiation von Massen

5.1 Differenzierbarkeit des Lebesgue-Integrals

Die Motivation für die Ergebnisse in diesem Abschnitt liefert das folgende Beispiel.

Beispiel 5.1.1. *i)* Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \mathbb{R}$, und sei $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$ eine Stammfunktion zu f. Dann gilt $F \in C^1(\mathbb{R})$, und

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(\xi)\, d\xi = f(x), \ \forall x.$$

ii) Allgemein gilt für $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy.$$

Gelten analoge Formeln auch, falls wir nur $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (also $f \in L^1(\Omega)$ für jedes beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) annehmen, oder falls wir $\mathcal{L}^n$ durch ein allgemeines Radonmass μ ersetzen? – Im folgenden betrachten wir zunächst den Fall $\mu = \mathcal{L}^n$, $L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$, etc.

Satz 5.1.1. *(Lebesguesches Differenzierbarkeitstheorem): Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für a.e. $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy.$$

Bemerkung 5.1.1. Man kann Kugeln durch Würfel ersetzen.

Zum Beweis von Satz 5.1.1 benötigen wir die zu $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ assoziierte Funktion

$$f^*(x) \colon = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

Definition 5.1.1. f^* *heisst* **Hardy-Littlewood Maximalfunktion**.

Bemerkung 5.1.2. Nach Satz 3.3.1 ist für festes $r > 0$ die Abbildung

$$x \mapsto \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, dy$$

stetig. f^* ist daher nach unten halbstetig, also messbar nach Beispiel 2.1.2. Jedoch gilt $f^* \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nur im "trivialen" Fall $f = 0$.

Die Maximalfunktion für ein $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist hingegen "fast" in $L^1(\mathbb{R}^n)$ im folgenden Sinn; vergleiche Satz 3.1.2 (Tchebychev-Ungleichung).

Satz 5.1.2. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt mit $C = 5^n$ für alle $a > 0$ die Abschätzung*

$$\mu(\{x; f^*(x) > a\}) \leq \frac{C}{a} ||f||_{L^1};$$

Wir folgern nun zunächst Satz 5.1.1 aus Satz 5.1.2.

Beweis von Satz 5.1.1. OBdA sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (Betrachte sonst zu vorgegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $g = f\chi_{B_1(x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.)

Nach Satz 3.5.2 gibt es $f_k \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_k \underset{(k\to\infty)}{\to} f \text{ in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Schätze ab (mit $\overline{\lim} = \limsup$ und $⨍_{B_r(x)} f(y)\,dy = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy$, etc.)

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{r\to 0}} \left| ⨍_{B_r(x)} f(y)\,dy - f(x) \right| &\leq \overline{\lim_{r\to 0}} ⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, dy \\
&\leq \overline{\lim_{r\to 0}} ⨍_{B_r(x)} |f(y) - f_k(y)| \, dy + \lim_{r\to 0} \left| ⨍_{B_r(x)} |f_k(y) - f_k(x)| \, dy \right| + |f_k(x) - f(x)| \\
&\leq (f - f_k)^*(x) + |f_k(x) - f(x)|, \ \forall k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

da f_k stetig und somit $\lim_{r\to 0} \left| ⨍_{B_r(x)} |f_k(y) - f_k(x)| \, dy \right| = 0$ für alle x gemäss Beispiel 5.1.1. Für $\varepsilon > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon :&= \{x; \ \overline{\lim_{r\to 0}} ⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, dy > 2\varepsilon\} \\
&\subset \{x; \ (f - f_k)^*(x) > \varepsilon\} \cup \{x; \ |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, also nach Satz 5.1.2 und Satz 3.1.2

$$\begin{aligned}
\mu(A_\varepsilon) &\leq \mu(\{x; \ (f - f_k)^*(x) > \varepsilon\}) + \mu(\{x; \ |(f - f_k)(x)| > \varepsilon\}) \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} ||f - f_k||_{L^1} \to 0 \ (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$A = \{x; \overline{\lim_{r\to 0}} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1/k}$$

ebenfalls eine Nullmenge, und es folgt

$$\left| f(x) - \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f(y)\, dy \right| \le \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(y)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0$$

für fast alle x. □

Wir haben sogar die folgende stärkere Aussage bewiesen:

Korollar 5.1.1. *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0. \tag{5.1.1}$$

Definition 5.1.2. *Ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit* (5.1.1) *heisst ein* **Lebesgue-Punkt** *von f.*

Zum Beweis von Satz 5.1.2 benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel.

Satz 5.1.3. *(Vitali-Überdeckungssatz): Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Kugeln $B = B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ mit Durchmesser* $\mathrm{diam}\, B = 2r < d_0$. *Zu jeder Kugel $B = B_r(x)$ sei $\hat{B} = B_{5r}(x)$ die 5-fach vergrösserte Kugel. Dann gibt es eine abzählbare Familie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ von paarweise disjunkten Kugeln, so dass*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} \hat{B}.$$

Beweis. Definiere induktiv maximale disjunkte Familien $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}$, wie folgt. Wähle zunächst

$$\mathcal{G}_1 \subset \{B \in \mathcal{F}; \mathrm{diam}\, B > \frac{d_0}{2} =: d_1\};$$

für $i = 1, 2, \ldots$ wähle sodann

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \{B \in \mathcal{F};\ d_i \ge \mathrm{diam}\, B > \frac{d_i}{2} = d_{i+1},\ B \cap B' = \emptyset \text{ für } B' \in \mathcal{G}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_i\}.$$

Setze $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$. Nach Konstruktion besteht $\mathcal{G}$ aus abzählbar vielen paarweise disjunkten Bällen.

Sei $B_0 \in \mathcal{F}$. Bestimme $i \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{diam}\, B_0 \in]d_i, d_{i-1}]$. Da $\mathcal{G}_i$ nach Konstruktion maximal ist, existiert $B \in \mathcal{G}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_i$ mit $B \cap B_0 \neq \emptyset$. Insbesondere folgt $\mathrm{diam}\, B > d_i$, also

$$B_0 \subset U_{2d_i}(B) \subset \hat{B}.$$

□

Beweis von Satz 5.1.2. Sei $a > 0$. Setze

$$A = \{x;\ f^*(x) > a\}.$$

Zu $x \in A$ wähle $r = r(x) > 0$ mit

$$\fint_{B_r(x)} |f(y)| \, dy > a.$$

Mit $\omega_n = \mu(B_1(0))$ folgt

$$a\omega_n r^n = a\,\mu(B_r(x)) < \int_{B_r(x)} |f| \, dy \le ||f||_{L^1}; \tag{5.1.2}$$

insbesondere erhalten wir die gleichmässige Abschätzung

$$r(x) \le r_0 = (\omega_n^{-1} a^{-1} ||f||_{L^1})^{1/n}, \ \forall x \in A.$$

Betrachte die Familie

$$\mathcal{F} = \{B_{r(x)}(x);\ x \in A\}.$$

Offensichtlich gilt $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$. Wähle eine Teilfamilie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ von disjunkten Bällen nach Satz 5.1.3 mit

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}.$$

Aus (5.1.2) folgt dann die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu(A) &\le \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(\hat{B}) = 5^n \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \\ &\le \frac{5^n}{a} \sum_{B \in \mathcal{G}} \int_B |f| \, dy = \frac{5^n}{a} \int_{\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B} |f| \, dy \le \frac{5^n}{a} ||f||_{L^1}. \end{aligned}$$

□

Definition 5.1.3. *Ein Radonmass μ auf $\mathbb{R}^n$ hat die* **Verdoppelungseigenschaft**, *falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit*

$$\mu(B_{2r}(x)) \le C\mu(B_r(x)) \tag{5.1.3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ("doubling measure").

Bemerkung 5.1.3. Der Beweis von Satz 5.1.2 (also auch der von Satz 5.1.1) lässt sich ohne weiteres übertragen auf Radonmasse mit Verdoppelungseigenschaft.

5.2 Differentiation von Radon-Massen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, wie man den Integranden f aus dem unbestimmten Integral $\int f \, d\mu$ zurückgewinnt, falls $\mu = \mathcal{L}^n$ oder falls μ die Verdoppelungseigenschaft (5.1.3) besitzt.

Für den allgemeinen Fall benötigen wir zunächst einen feineren Überdeckungssatz analog Satz 5.1.3.

Satz 5.2.1. *(Besicovitch) Sei μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen Bällen $B = \overline{B_r(x)}$, wobei $r > 0$, und sei A die Menge von deren Mittelpunkten. Weiter gelte $\mu(A) < \infty$ sowie $\inf\{r; \overline{B_r(x)} \in \mathcal{F}\} = 0$ für jedes $x \in A$. Dann existiert zu jeder offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare disjunkte Schar $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ von Bällen $B \subset G$ mit*

$$\mu((A \cap G) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0.$$

Der Beweis ist vollkommen elementar aber recht umfangreich; vergleiche Evans-Gariepy, Cor. 1, S. 35.

Bemerkung 5.2.1. A muss nicht μ-messbar sein.

Seien nun μ, ν Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.2.1. *i) Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze*

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \limsup_{r \to 0+} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & , \textit{ falls } \mu(\overline{B_r(x)}) > 0 \textit{ für alle } r > 0, \\ +\infty & , \textit{ sonst}, \end{cases}$$

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \liminf_{r \to 0+} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & , \textit{ falls } \mu(\overline{B_r(x)}) > 0 \textit{ für alle } r > 0, \\ +\infty & , \textit{ sonst}. \end{cases}$$

ii) Falls $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$, so heisst ν bezüglich μ an der Stelle x **differenzierbar** *mit* **Dichte** *$D_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x)$. Die Dichte $D_\mu \nu$ bezeichnen wir auch als* **Ableitung** *von ν bezüglich μ.*

Lemma 5.2.1. *Seien μ, ν Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$, und sei $0 < \alpha < \infty$. Dann folgt:*

i) Für $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ \underline{D}_\mu \nu(x) \le \alpha\}$ gilt $\nu(A) \le \alpha\, \mu(A)$;

ii) Für $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ \overline{D}_\mu \nu(x) \ge \alpha\}$ gilt $\nu(A) \ge \alpha\, \mu(A)$.

Bemerkung 5.2.2. A muss nicht μ- oder ν-messbar sein.

Beweis. *i)* Sei A wie in i), $\varepsilon > 0$, G eine offene Umgebung von A. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{B = \overline{B_r(x)};\ x \in A,\ r > 0,\ B \subset G,\ \nu(B) < (\alpha + \varepsilon)\, \mu(B)\}.$$

Nach Definition von $\underline{D}_\mu \nu(x)$ und Wahl von A folgt

$$\inf\{r;\ \overline{B_r(x)} \in \mathcal{F}\} = 0,\ \forall x \in A.$$

Wähle eine abzählbare, disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ gemäss Satz 5.2.1 mit

$$\nu(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0;$$

also

$$\nu(A) \le \sum_{B \in \mathcal{G}} \nu(B) \le (\alpha + \varepsilon) \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \le (\alpha + \varepsilon)\, \mu(G).$$

Nach Übergang zum Infimum bzgl. $G \supset A$ folgt mit Satz 1.7.1 zunächst die Abschätzung

$$\nu(A) \le (\alpha+\varepsilon) \inf_{G \supset A,\, G \text{ offen}} \mu(G) = (\alpha+\varepsilon)\mu(A)$$

und nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Behauptung. Die Abschätzung ii) beweist man vollkommen analog. $\square$

Lemma 5.2.2. *Seien μ, ν Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$. Dann existiert $D_\mu \nu$ μ-a.e., und $D_\mu \nu$ ist μ-messbar und μ-a.e. endlich.*

Beweis. OBdA seien $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. (Sonst betrachte $\mu \lfloor K$, $\nu \lfloor K$ für $K = \overline{B_R(0)}$ mit anschliessendem Grenzübergang $R \to \infty$.) Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

i) Wir zeigen, $D_\mu \nu$ existiert, und $D_\mu \nu(x) < \infty$ für μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. Setze dazu

$$I = \{x;\ \overline{D}_\mu \nu(x) = +\infty\}$$

sowie für $0 < a < b < \infty$

$$R(a,b) = \{x;\ \underline{D}_\mu \nu(x) < a < b < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\}.$$

Da für alle $\alpha > 0$ gilt

$$I \subset \{x;\ \overline{D}_\mu \nu(x) \ge \alpha\}$$

folgt mit Lemma 5.2.1

$$\mu(I) \le \frac{\nu(I)}{\alpha} \le \frac{\nu(\mathbb{R}^n)}{\alpha} \underset{(\alpha\to\infty)}{\to} 0\ ;$$

also $\mu(I) = 0$, und $\overline{D}_\mu \nu < \infty$ μ-a.e.

Analog folgt aus Lemma 5.2.1

$$b\, \mu(R(a,b)) \le \nu(R(a,b)) \le a\, \mu(R(a,b)),$$

also $\mu(R(a,b)) = 0$ für alle $0 < a < b < \infty$. Wegen

$$\{x;\ \underline{D}_\mu \nu(x) < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\} \subset \bigcup_{\substack{0<a<b<\infty \\ a,b\in\mathbb{Q}}} R(a,b)$$

gilt daher $\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty$ für μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Wir zeigen, für festes $r > 0$ ist die Funktion

$$x \mapsto g_r(x) = \begin{cases} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})}, & \text{falls } \mu(\overline{B_r(x)}) > 0 \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

μ-messbar. Da nach Teil i) des Beweises $D_\mu \nu = \lim_{r\to 0} g_r = \lim_{k\to\infty} g_{1/k}$ μ-a.e., ist $D_\mu \nu$ dann nach Satz 2.1.1 ebenfalls μ-messbar.

Dazu zeigen wir zunächst die μ-Messbarkeit der Funktionen

$$x \mapsto \mu(\overline{B_r(x)}),\ x \mapsto \nu(\overline{B_r(x)}).$$

Nach Beispiel 2.1.2 genügt es zu zeigen, dass diese Funktionen nach oben halbstetig sind. Fixiere dazu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für eine Folge $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$ setze $f_k = \chi_{\overline{B_r(x_k)}}$, $f = \chi_{\overline{B_r(x_0)}}$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} f_k \le f \ \mu\text{-a.e.};$$

das heisst,

$$\liminf_{k\to\infty}(1-f_k) \ge 1-f \ \mu\text{-a.e.}$$

(Beachte, dass für $x \notin \overline{B_r(x_0)}$ stets auch $x \notin \overline{B_r(x_k)}$, falls $k \ge k_0(x)$.)

Mit Fatou's Lemma, Satz 3.2.1, erhalten wir

$$\mu(B_{2r}(x_0)) - \mu(\overline{B_r(x_0)}) = \int_{B_{2r}(x_0)} (1-f)\, d\mu \le \int_{B_{2r}(x_0)} \liminf_{k\to\infty}(1-f_k)\, d\mu$$
$$\le \liminf_{k\to\infty} \int_{B_{2r}(x_0)} (1-f_k)\, d\mu = \mu(B_{2r}(x_0)) - \limsup_{k\to\infty} \mu(\overline{B_r(x_k)}).$$

Da $\mu(B_{2r}(x_0)) < \infty$, folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \mu(\overline{B_r(x_k)}) \le \mu(\overline{B_r(x_0)}).$$

Somit ist die Abbildung $x \mapsto \mu(\overline{B_r(x)})$ nach oben halbstetig; analog für ν.

Schliesslich ist die Menge

$$I_r = \{x; \mu(\overline{B_r(x)}) = 0\} \subset I$$

nach Teil i) des Beweises eine μ-Nullmenge. Die Messbarkeit von g_r folgt somit aus Satz 2.1.1. □

Wir können nun Satz 5.1.1 auf geeignete Radonmasse verallgemeinern, welche Bedingungen analog Satz 3.3.1 erfüllen. Dazu erinnern wir an Definition 3.3.1.

Definition 5.2.2. *Seien μ, ν Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$. Dann heisst ν bezüglich μ* **absolut stetig** *($\nu \ll \mu$), falls für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Die Masse μ und ν heissen zueinander **singulär** *($\mu \perp \nu$), falls eine Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit*

$$\mu(B) = 0 = \nu(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Satz 5.2.2. *(Differentiationssatz für Radon-Masse) Seien μ, ν Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$ mit $\nu \ll \mu$. Dann ist $D_\mu \nu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$, und jede μ-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch ν-messbar mit*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu.$$

Bemerkung 5.2.3. Nach Satz 5.2.2 hat also *jedes* bzgl. einem Radonmass μ absolut stetige Radonmass ν eine Darstellung der Art (3.3.1).

Beweis von Satz 5.2.2. OBdA seien $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. (Sonst betrachte zunächst $\mu_k = \mu\lfloor\overline{B_k(0)}$, $\nu_l = \nu\lfloor\overline{B_l(0)}$, $l \leq k \in \mathbb{N}$. Da für $l < k$ gilt $D_{\mu_k}\nu_l = D_\mu\nu_l$, $\int_A D_{\mu_k}\nu_l \, d\mu_k = \int_A D_\mu\nu_l \, d\mu$, erhalten wir aus der Aussage des Satzes für μ_k und ν_l nach Grenzübergang $k \to \infty$ die Aussage des Satzes für μ und ν_l; da weiter die Folge $l \mapsto D_\mu\nu_l$ offenbar monoton wachsend ist, folgt hieraus mit Satz 1.1.2, bzw. Satz 3.2.2 bei anschliessendem Grenzübergang $l \to \infty$ die Aussage des Satzes für die Masse μ und ν.)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar.

i) Wir zeigen, A ist ν-messbar. Da μ Borel regulär ist, gibt es eine Borelsche Menge B mit $B \supset A$ und $\mu(B) = \mu(A)$, also $\mu(B \setminus A) = 0$. Da $\nu \ll \mu$, folgt dann auch $\nu(B \setminus A) = 0$.

Für beliebiges $B' \subset \mathbb{R}^n$ erhalten wir somit

$$\nu(B' \setminus A) \leq \nu(B' \setminus B) + \nu(B \setminus A) = \nu(B' \setminus B)$$

und damit

$$\nu(B' \cap A) + \nu(B' \setminus A) \leq \nu(B' \cap B) + \nu(B' \setminus B) = \nu(B'),$$

da B Borelsch, also auch ν-messbar. Die Behauptung folgt mit Bemerkung 1.1.4.

ii) Zum Beweis der Darstellung von ν betrachte zunächst

$$I = \{x \in A;\ D_\mu\nu(x) = \infty\} \text{ (“infinity set”)}$$

mit

$$\mu(I) = 0 = \nu(I) = \int_I D_\mu\nu \, d\mu$$

gemäss Korollar 3.1.4. Analog betrachte

$$Z = \{x \in A;\ D_\mu\nu(x) = 0\} \text{ (“zero set”)}$$

mit

$$\nu(Z) \leq \inf_{\alpha>0} \alpha\, \mu(Z) = 0 = \int_Z D_\mu\nu \, d\mu.$$

Weiter sei

$$N = \{x \in A;\ \underline{D}_\mu\nu(x) < \overline{D}_\mu\nu(x) < \infty\}$$

mit

$$\mu(N) = 0$$

gemäss Lemma 5.2.1. Da $\nu \ll \mu$, folgt mit Korollar 3.1.3 auch

$$\nu(N) = 0 = \int_N D_\mu\nu \, d\mu.$$

Für $1 < t < \infty$ zerlege nun

$$A = Z \cup I \cup N \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m,$$

wobei

$$A_m = \{x \in A;\ t^m \leq D_\mu\nu(x) < t^{m+1}\},\ m \in \mathbb{Z}.$$

A_m ist μ-messbar gemäss Lemma 5.2.2 und damit auch ν-messbar nach Teil i), für jedes $m \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \nu(A_m) \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} t^{m+1}\mu(A_m) \\ &= t\sum_{m\in\mathbb{Z}} t^m \mu(A_m) \le t \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{A_m} D_\mu\nu\, d\mu = t\int_A D_\mu \nu\, d\mu, \end{aligned}$$

und analog

$$\nu(A) \ge \frac{1}{t}\int_A D_\mu\nu\, d\mu.$$

Grenzübergang $t \to 1$ liefert die Behauptung. □

Durch Anwendung von Satz 5.2.2 auf die von f^+, beziehungsweise f^- für ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ erzeugten Radonmasse erhalten wir die gewünschte Verallgemeinerung von Satz 5.1.1.

Satz 5.2.3. *(Lebesgue-Besicovitch-Differentiationssatz) Sei μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Dann gilt für μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f\, d\mu.$$

Beweis. OBdA sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. Zerlege $f = f^+ - f^-$. Für μ-messbares $B \subset \mathbb{R}^n$ setze $\nu^\pm(B) = \int_B f^\pm\, d\mu$ und für beliebiges $A \subset \mathbb{R}^n$ setze

$$\nu^\pm(A) = \inf\{\nu^\pm(B);\ A \subset B,\ B\ \mu\text{-messbar}\}.$$

Nach Satz 3.3.1 und Satz 1.2.2 definieren die Mengenfunktionen $\nu^\pm$ Radonmasse, und $\nu^\pm \ll \mu$.

Weiter folgt aus Satz 5.2.2

$$\nu^\pm(A) = \int_A D_\mu\nu^\pm\, d\mu = \int_A f^\pm\, d\mu,\ \forall A\ \mu\text{-messbar};$$

also gilt

$$D_\mu\nu^\pm = f^\pm\ \mu\text{-a.e.},$$

und mit Satz 1.1.2.ii) erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0}\fint_{B_r(x)} f\, d\mu &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu(B_r(x))}[\nu^+(B_r(x)) - \nu^-(B_r(x))] \\ &= \lim_{r\to 0}\lim_{\rho\uparrow r}\frac{1}{\mu(\overline{B_\rho(x)})}[\nu^+(\overline{B_\rho(x)}) - \nu^-(\overline{B_\rho(x)})] \\ &= D_\mu\nu^+(x) - D_\mu\nu^-(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x) \end{aligned}$$

für μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. □

5.3 Differentiation absolut stetiger Funktionen

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, oBdA von links stetig, mit

$$\lambda_F([a,b[) = \begin{cases} F(b) - F(a), & \text{falls } a \le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit zugehörigem Lebesgue-Stieltjes Mass

$$\Lambda_F(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k[);\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[\right\}$$

gemäss Abschnitt 1.5.

Definition 5.3.1. *F heisst* **absolut stetig** *auf $\mathbb{R}$, falls gilt:*

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (a_k, b_k)_{k\in\mathbb{N}},\ a_k \le b_k \le a_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon. \tag{5.3.1}$$

Bemerkung 5.3.1. *i)* F absolut stetig $\Rightarrow$ F gleichmässig stetig.

ii) F Lipschitz stetig $\Rightarrow$ F absolut stetig.

iii) Eine monotone, stetige Funktion muss **nicht** absolut stetig sein, wie das Beispiel der Cantor-Lebesgue Funktion in den Übungen zeigt.

Satz 5.3.1. *Es sind äquivalent:*

i) Λ_F ist absolut stetig bezüglich $\mathcal{L}^1$;

ii) F ist absolut stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Gemäss Satz 5.2.2 gilt für alle $\mathcal{L}^1$-messbaren $A \subset \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\Lambda_F(A) = \int_A f\, d\mathcal{L}^1$$

mit $f = D_{\mathcal{L}^1}\Lambda_F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$. Mit Satz 3.3.1 folgt für $(a_k, b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \le b_k \le a_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = \Lambda_F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[\right) \to 0,$$

falls

$$\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| \to 0.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ gemäss (5.3.1) und wähle eine offene Menge $B \supset A$ entsprechend Satz 1.3.2 mit $\mathcal{L}^1(B) < \delta$.

Nach Satz 1.3.1 gilt $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ mit disjunkten, halboffenen Intervallen $I_k = [a_k, b_k[$, $k \in \mathbb{N}$. OBdA dürfen wir annehmen, dass

$$a_k < b_k \le a_{k+1},\ k \in \mathbb{N},$$

und daher

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^1(I_k) = \mathcal{L}^1(B) < \delta.$$

Mit (5.3.1) und Satz 1.5.3 können wir nun abschätzen

$$\Lambda_F(A) \le \Lambda_F(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_F(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\Lambda_F(A) = 0$; das heisst, $\Lambda_F \ll \mathcal{L}^1$. □

Aus Satz 5.2.2 erhalten wir mit Satz 5.3.1 unmittelbar den ersten Teil des folgenden Satzes.

Satz 5.3.2. *(Rademacher): Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton und absolut stetig. Dann ist $D_{\mathcal{L}^1}\Lambda_F =: f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, und für alle $x_0,\ x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F(x) - F(x_0) = \Lambda_F(]x_0, x]) = \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy. \tag{5.3.2}$$

Insbesondere ist F in $\mathcal{L}^1$-a.e. Punkten $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Zum Beweis der Differenzierbarkeit von F an $\mathcal{L}^1$-fast jeder Stelle x schätze ab

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{r\to 0}} \left| \frac{F(x+r) - F(x)}{r} - f(x) \right| &= \overline{\lim_{r\to 0}}\ \frac{1}{r} \left| \int_x^{x+r} (f(y) - f(x))\,dy \right| \\ &\le \overline{\lim_{r\to 0}}\ \frac{1}{r} \int_x^{x+r} |(f(y) - f(x))|\,dy \\ &\le 2\overline{\lim_{r\to 0}} \fint_{B_r(x)} |(f(y) - f(x))|\,dy.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 5.1.1. □

Bemerkung 5.3.2. Ist umgekehrt für $0 \le f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ die Funktion F für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ durch (5.3.2) erklärt, so ist F nach Satz 3.3.1 und Satz 5.3.1 absolut stetig und nach Satz 5.1.1 $\mathcal{L}^1$-a.e. differenzierbar mit $F' = f$. Satz 5.3.2 liefert somit eine exakte Charakterisierung aller monotonen Funktionen, für die der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt.

Wir wollen dieses Ergebnis auch auf nicht notwendig monotone Funktionen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausdehnen.

Definition 5.3.2. *Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig.*

i) Für $a < b \in \mathbb{R}$ heisst

$$V_F([a,b[) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)|;\ a \le \ldots \le a_k \le b_k \le a_{k+1} \le \ldots < b \right\}$$

die **totale Variation** *von* F *auf* $[a, b[$.

ii) F *hat lokal endliche Variation,* $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, *falls* $V_F([a, b[) < \infty$ *für alle* $a < b \in \mathbb{R}$.

Lemma 5.3.1. *Sei* $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$. *Dann existieren* $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) =: F(x_0+)$ *sowie* $\lim_{x \uparrow x_0} F(x) =: F(x_0-)$.

Beweis. Nimm widerspruchsweise an,

$$\underline{\xi} = \liminf_{x \uparrow x_0} F(x) < \limsup_{x \uparrow x_0} F(x) = \overline{\xi}.$$

Dann existieren Folgen $(a_k), (b_k)$ mit

$$x_0 - 1 < a_k < b_k < a_{k+1} < x_0, \ k \in \mathbb{N}$$

so dass

$$F(a_k) \to \underline{\xi}, \ F(b_k) \to \overline{\xi} \ (k \to \infty);$$

also

$$V_F([x_0 - 1, x_0[) \geq \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = \infty$$

im Widerspruch zur Vorausssetzung $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Analog für $F(x_0+)$. □

Im folgenden sei nun $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ vorausgesetzt. Offenbar umfasst diese Klasse alle monotonen Funktionen. Wegen Lemma 5.3.1 dürfen wir F stets als von links stetig annehmen.

Lemma 5.3.2. *Sei* $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ *von links stetig.*

i) Für $a < b < c$ *gilt* $V_F([a, c[) = V_F([a, b[) + V_F([b, c[)$.

ii) $V_F([x, x_0[) \to 0$, *falls* $x \uparrow x_0$.

iii) $x \mapsto V_F([a, x[)$ *ist auf* $]a, \infty[$ *von links stetig .*

Beweis. *i)* "$\geq$" ist klar.

"$\leq$": Sei $a \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq y_k \leq x_{x+1} \leq \ldots \leq c$. Falls $x_k \leq y_k < b$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt offenbar

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| \leq V_F([a, b[),$$

also auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| \leq V_F([a, b[) + V_F([b, c[). \tag{5.3.3}$$

Analog schliessen wir, falls $b \leq x_k \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ oder falls $y_{k_0} < b \leq x_{k_0+1}$ für ein k_0.

Daher dürfen wir annehmen, dass $x_{k_0} < b \leq y_{k_0}$ für ein k_0. Wähle $\overline{x} = b$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle sodann $\overline{y} \in]x_{k_0}, b[$ mit $|F(b) - F(\overline{y})| < \varepsilon$. Wir führen $\overline{y} < \overline{x}$ als weitere Unterteilungspunkte des Intervalls $[x_{k_0}, y_{k_0}[$ ein mit

$$|F(y_{k_0}) - F(x_{k_0})| \leq |F(\overline{y}) - F(x_{k_0})| + |F(y_{k_0}) - F(\overline{x})| + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| \le \Big(\sum_{k<k_0} |F(y_k) - F(x_k)| + |F(\overline{y}) - F(x_{k_0})| \Big)$$
$$+ \Big(|F(y_{k_0}) - F(\overline{x})| + \sum_{k>k_0} |F(y_k) - F(x_k)| \Big) + \varepsilon \le V_F([a,b[) + V_F([b,c[) + \varepsilon.$$

Nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (5.3.3). Die Behauptung folgt.

ii) Nimm widerspruchsweise an, es gelte

$$\lim_{x \uparrow x_0} V_F([x, x_0[) =: 2\varepsilon > 0.$$

Dann gibt es für jedes $x < x_0$ Zahlen $x = a_0 < a_1 \le b_1 \le \ldots \le a_k \le b_k < \overline{x} < x_0$ mit

$$V_F([x, \overline{x}[) \ge \sum_{k=1}^{k} |F(b_k) - F(a_k)| \ge \varepsilon.$$

Zu $x_1 < x_0$ wähle iterativ $x_k = \overline{x}_{k-1} \in]x_{k-1}, x_0[, k \ge 2$, wie oben. Mit i) folgt

$$V_F([x_1, x_0[) \ge \sum_{k=1}^{\infty} V_F([x_k, \overline{x}_k[) = \infty$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $F \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

iii) Nach Teil i) folgt für $a < x < x_0$

$$V_F([a, x_0[) - V_F([a, x[) = V_F([x, x_0[).$$

Daher folgt Aussage iii) aus Aussage ii). □

Lemma 5.3.3. *Sei $F \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ von links stetig. Dann besitzt F eine bis auf eine additive Konstante eindeutige Darstellung $F = F_1 - F_2$ mit monotonen, von links stetigen Funktionen F_1, F_2, so dass*

$$\Lambda_{F_1}([a,b[) = V_F([a,b[) \ge \frac{1}{2} \Lambda_{F_2}([a,b[) \qquad (5.3.4)$$

für alle $a < b \in \mathbb{R}$, und F ist absolut stetig genau dann, wenn F_1 und F_2 absolut stetig sind.

Beweis. Offenbar ist für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$F_1 \colon x \mapsto \begin{cases} V_F([x_0, x[) & , \ x > x_0 \\ 0 & , \ x = x_0 \\ -V_F([x, x_0[) & , \ x < x_0 \end{cases}$$

monoton wachsend und nach Lemma 5.3.2 von links stetig. Für $F_2 := F_1 - F$ und $x_0 < x \le y$ gilt dann

$$\begin{aligned} F_2(y) - F_2(x) &= (F_1(y) - F_1(x)) - (F(y) - F(x)) \\ &\ge |F(y) - F(x)| - (F(y) - F(x)) \ge 0, \end{aligned}$$

und analog unter Verwendung von Lemma 5.3.2 für allgemeine $x \leq y \in \mathbb{R}$; das heisst, F_2 ist monoton wachsend. Da F und F_1 von links stetig sind, gilt dies auch für F_2.

Nach Konstruktion und Satz 1.5.3 gilt weiter

$$F_1(b) - F_1(a) = \Lambda_{F_1}([a,b[) = V_F([a,b[)$$

sowie

$$\Lambda_{F_2}([a,b[) = F_2(b) - F_2(a) \leq F_1(b) - F_1(a) + |F(b) - F(a)| \leq 2V_F([a,b[);$$

das heisst, wir erhalten (5.3.4).

Eindeutigkeit folgt aus (5.3.4), da diese Bedingung F_1 bis auf eine Konstante bestimmt, also auch $F_2 = F_1 - F$.

Offenbar sind analog zu Satz 5.3.1 die folgenden Aussagen äquivalent:

i) F ist absolut stetig.

ii) Λ_{F_1} ist absolut stetig. (Genauer: die Carathéodory-Erweiterung von V_F, welche jedoch nach (5.3.4) mit Λ_{F_1} übereinstimmt.)

iii) F_1 ist absolut stetig.

Wegen iii) $\Rightarrow$ i) ist dann auch die folgende Bedingung zu den vorgenannten äquivalent:

iv) F_1 und $F_2 = F_1 - F$ sind absolut stetig.

Das Lemma ist damit vollständig bewiesen. □

Korollar 5.3.1. *Eine absolut stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}^1$-a.e. differenzierbar mit*

$$F' = f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),$$

und für alle $x_0,\ x \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy.$$

Beweis. Zerlege $F = F_1 - F_2$ gemäss Lemma 5.3.3 und setze

$$f_i = D_{\mathcal{L}^1}\Lambda_{F_i} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\ i = 1,2$$

gemäss Satz 5.3.2, $f = f_1 - f_2$. Aus Satz 5.3.2 folgt nun zunächst die Darstellung

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_0) &= (F_1(x_1) - F_1(x_0)) - (F_2(x_1) - F_2(x_0)) \\ &= \int_{x_0}^{x} f_1\,dy - \int_{x_0}^{x} f_2\,dy = \int_{x_0}^{x} f\,dy. \end{aligned}$$

Für $h > 0$ schätze ab

$$\begin{aligned} \Big|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\Big| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)|\,dx\,. \end{aligned}$$

Da $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, strebt die rechte Seite nach Korollar 5.1.1 gegen 0 für $h \to 0$; also ist F $\mathcal{L}^1$-a.e. differenzierbar mit $F' = f$. □

5.4 Lebesgue-Zerlegung

Auch ohne die Voraussetzung $\nu \ll \mu$ erhalten wir eine interessante Darstellung von ν.

Satz 5.4.1. *(Lebesgue-Zerlegung) Seien μ, ν Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ von ν in Radonmasse $\nu_{ac} \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ mit $D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}$, $D_\mu \nu_s = 0$ μ-a.e., und es gilt*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu + \nu_s(A)$$

für jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir führen den Beweis auf Satz 5.2.2 zurück.

OBdA seien $\mu(\mathbb{R}^n),\ \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Setze

$$\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R}^n;\ A \text{ Borelsch},\ \mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0\}.$$

Wähle $B_k \in \mathcal{E}$ mit

$$\nu(B_k) \le \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A) + \frac{1}{k}.$$

OBdA dürfen wir annehmen $B_k \supset B_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$. Setze $B = \bigcap_{k=1}^\infty B_k$ mit

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(\mathbb{R}^n \setminus B_k) = 0;$$

also $B \in \mathcal{E}$, und

$$\nu(B) = \lim_{k \to \infty} \nu(B_k) = \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A).$$

Setze nun

$$\nu_{ac} = \nu \lfloor B,\ \nu_s = \nu \lfloor (\mathbb{R}^n \setminus B).$$

ν_{ac} und ν_s sind Radonmasse nach Beispiel 1.7.1.iii), und $\nu_s \perp \mu$, da

$$\nu_s(B) = 0 = \mu(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Weiter gilt für jede Borelmenge $A \subset B$ mit $\mu(A) = 0$ offenbar $B \setminus A \in \mathcal{E}$, also

$$\nu(A) = \nu(B) - \nu(B \setminus A) \le 0 \tag{5.4.1}$$

wegen Minimalität von $\nu(B)$; das heisst

$$\nu_{ac} \ll \mu.$$

(Da μ, ν als Radonmasse insbesondere Borel-regulär sind, genügt es, die Bedingung (5.4.1) für Borelmengen zu prüfen.)

Behauptung 1: Sei $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ eine beliebige Zerlegung von ν in Radonmasse $\nu_{ac} \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$. Dann gilt $D_\mu \nu_s = 0$ μ-a.e.

Beweis. Sei B Borelsch mit $\nu_s(B) = 0 = \mu(\mathbb{R}^n \setminus B)$. Für $0 < \alpha < \infty$ setze

$$C = \{x \in B;\ D_\mu \nu_s(x) \geq \alpha\}.$$

Mit Lemma 5.2.1 erhalten wir

$$\alpha\, \mu(C) \leq \nu_s(C) \leq \nu_s(B) = 0;$$

das heisst $\mu(C) = 0$. Somit folgt $D_\mu \nu_s = 0$ μ-a.e. □

Es folgt $D_\mu \nu_{ac} = D_\mu \nu$ μ-a.e., und Satz 5.2.2 liefert für Borel messbares $A \subset \mathbb{R}^n$ die gewünschte Darstellung

$$\nu_{ac}(A) = \int_A D_\mu \nu_{ac}\, d\mu = \int_A D_\mu \nu\, d\mu,$$

aus der auch die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt. □

Anwendung 5.4.1. *(Ableitung monotoner Funktionen) Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, von links stetig mit assoziiertem Lebesgue-Stieltjes Mass Λ_F. Gemäss Satz 5.4.1 besitzt Λ_F eine Zerlegung $\Lambda_F = \Lambda_F^{ac} + \Lambda_F^s$ bezüglich $\mu = \mathcal{L}^1$, und es existiert*

$$F' = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_F = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_F^{ac} =: f \ \mu\text{-a.e.}$$

Weiter gilt $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, und

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f\, dx = \Lambda_F^{ac}(]x_0, x_1]) &= \Lambda_F(]x_0, x_1]) - \Lambda_F^s(]x_0, x_1]) \\ &\leq \Lambda_F(]x_0, x_1]) = F(x_1) - F(x_0), \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

da trivialerweise $\Lambda_F^s(]x_0, x_1]) \geq 0$.

Beispiel 5.4.1. *i)* Sei $F = \chi_{[0,\infty[}$ die "Heaviside function". Da $F \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $F'(x) = 0$ für $x \neq 0$, folgt $\Lambda_F^{ac} = 0$. Weiter gilt

$$\Lambda_F([a, b[) = 1, \text{ falls } a \leq 0 < b,$$

und $\Lambda_F([a, b[) = 0$ sonst; also $\Lambda_F = \Lambda_F^s = \delta_0$. Beachte: F ist unstetig bei $x = 0$.

ii) Sei F die in den Übungen definierte Cantor-Lebesgue Funktion. Da F stückweise konstant ist auf $\mathbb{R} \setminus C$, wobei C die klassische Cantor-Menge ist mit $\mathcal{L}^1(C) = 0$, folgt $F' = 0$ $\mathcal{L}^1$-a.e. und $\Lambda_F^{ac} = 0$. Weiter gilt $\operatorname{supp} \Lambda_F^s \subset C$; jedoch enthält Λ_F^s keine Punktmassen der Form $a \cdot \delta_{x_0}$, da F stetig ist.

5.5 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir gehen nun der Frage nach, ob man auch abstrakte Masse analog zum vorangegangenen Abschnitt zerlegen kann.

Sei X eine Menge, $\mu\colon 2^X \to [0, \infty]$ ein Mass auf X, Σ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen. Weiter sei $\Phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ endlich und σ-additiv. Beispiele sind die zuvor betrachteten Fälle i) $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \mathcal{L}^n$, $\Phi = \int f\, d\mu$ für ein $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, oder ii) $X = \mathbb{R}$, $\Phi = \Lambda_F$ für $F \in BV(\mathbb{R})$.

Definition 5.5.1. *Für $S \in \Sigma$ setze*

$$\overline{V}(S) = \sup_{A \subset S,\, A \in \Sigma} \Phi(A), \ \underline{V}(S) = \sup_{A \subset S,\, A \in \Sigma} (-\Phi(A)).$$

Die Zahl

$$V(S) = \overline{V}(S) + \underline{V}(S)$$

heisst die **totale Variation** *von Φ auf S.*

Bemerkung 5.5.1. Da Φ σ-additiv, gilt insbesondere $\Phi(\emptyset) = 0$. Folglich sind die Mengenfunktionen $\underline{V}$, $\overline{V}$ und V nicht negativ, endlich, und σ-subadditiv.

Satz 5.5.1. *i) V, $\underline{V}$ und $\overline{V}$ sind nicht negative Masse, und es gilt die Jordan-Zerlegung*

$$\forall\, S \in \Sigma\colon \Phi(S) = \overline{V}(S) - \underline{V}(S).$$

ii) Weiter existiert $P \in \Sigma$ mit

$$\overline{V}(S) = \Phi(S \cap P), \ \underline{V}(S) = -\Phi(S \setminus P)$$

für $S \in \Sigma$ (Hahn-Zerlegung).

Beispiel 5.5.1. *i)* Falls $\Phi = \int f \, d\mathcal{L}^n$, so gilt $P = \{x;\ f(x) \geq 0\}$, $V = \int |f| \, d\mathcal{L}^n$.

ii) Falls $\Phi = \Lambda_F$, so ist $V = \Lambda_F$.

Beweis von Satz 5.5.1. Es genügt, eine Menge $P \in \Sigma$ zu finden mit

$$\begin{aligned} &\Phi(A) \geq 0 \text{ für alle } A \subset P,\ A \in \Sigma, \\ &\Phi(A) \leq 0 \text{ für alle } A \subset X \setminus P,\ A \in \Sigma. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Es folgt, $\overline{V} := \Phi \lfloor P \geq 0$, und $\overline{V}$ ist σ-additiv auf Σ; analog für $\underline{V}$ und V. Die Mengenfunktionen $\overline{V}$, $\underline{V}$ und V lassen sich nach Satz 1.2.2 zu Massen auf X erweitern. Die Darstellungen i) und ii) ergeben sich unmittelbar aus (5.5.1).

Zur Konstruktion von P betrachte eine Folge $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in Σ mit

$$\overline{V}(P_k) \geq \Phi(P_k) \geq \overline{V}(X) - 2^{-k},\ k \in \mathbb{N}. \tag{5.5.2}$$

Mit

$$\sup_{A \subset P_k} \Phi(P_k \setminus A) \leq \overline{V}(P_k) \leq \overline{V}(X)$$

folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\underline{V}(P_k) = \sup_{A \subset P_k} (-\Phi(A)) \leq \sup_{A \subset P_k} \Phi(P_k \setminus A) - \Phi(P_k) \leq 2^{-k}.$$

Setze

$$P = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq l} P_k \in \Sigma.$$

Die σ-Subadditivität von $\underline{V}$ liefert

$$\underline{V}(P) \le \lim_{l\to\infty} \underline{V}\Big(\bigcup_{k\ge l} P_k\Big) \le \lim_{l\to\infty} \Big(\sum_{k\ge l} \underline{V}(P_k)\Big) \le \lim_{l\to\infty} 2^{-l} = 0.$$

Für alle $A \subset P$, $A \in \Sigma$ gilt somit

$$\Phi(A) \ge -\underline{V}(P) = 0$$

und daher

$$\Phi(P) = \Phi(A) + \Phi(P \setminus A) \ge \Phi(A).$$

Nach Übergang zum Supremum bzgl. A erhalten wir die Ungleichung

$$\overline{V}(P) \ge \Phi(P) \ge \sup_{A\subset P, A\in\Sigma} \Phi(A) = \overline{V}(P);$$

das heisst,

$$\Phi(P) = \overline{V}(P). \tag{5.5.3}$$

Für $l \in \mathbb{N}$ schreibe

$$P_l \subset P \cup \bigcup_{k\ge l} P_k \setminus P_{k+1}.$$

Es folgt

$$\overline{V}(P_l) \le \overline{V}(P) + \sum_{k=l}^{\infty} \overline{V}(P_k \setminus P_{k+1}).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und jedes $A \subset X \setminus P_k$ gilt nun

$$\Phi(A) = \Phi(A \cup P_k) - \Phi(P_k) \le \overline{V}(X) - \Phi(P_k) \le 2^{-k}.$$

Damit erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\overline{V}(P_k \setminus P_{k+1}) \le \sup_{A\subset X\setminus P_{k+1}} \Phi(A) \le 2^{-k-1},$$

und mit (5.5.2) folgt

$$\overline{V}(P) \ge \lim_{l\to\infty} \Big(\overline{V}(P_l) - \sum_{k=l}^{\infty} \overline{V}(P_k \setminus P_{k+1})\Big) = \overline{V}(X).$$

Mit (5.5.3) gilt daher

$$\Phi(P) = \overline{V}(X).$$

Für $A \subset X \setminus P$, $A \in \Sigma$ können wir daher abschätzen

$$\Phi(A) + \Phi(P) = \Phi(A \cup P) \le \overline{V}(X) = \Phi(P).$$

Da $|\Phi(P)| < \infty$, folgt nach Subtraktion von $\Phi(P)$

$$\Phi(A) \le 0, \ \forall A \subset X \setminus P, A \in \Sigma,$$

wie gewünscht. □

Lemma 5.5.1. *Sei $\Phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ σ-additiv und endlich, $\Phi \geq 0$. Sei weiter $S \in \Sigma$ mit $\mu(S) < \infty$, $0 < \alpha < \infty$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung*

$$S = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

mit $\mu(N) = 0$, $S_k \in \Sigma$ so, dass für μ-messbares $A \subset S_k$ gilt

$$\alpha(k-1) \cdot \mu(A) \leq \Phi(A) \leq \alpha k \cdot \mu(A), \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 5.5.2. Vergleiche Lemma 5.2.1!

Beweis. OBdA sei $S = X$, $\alpha = 1$. (Sonst betrachte $\tilde{\Phi} = \frac{\Phi \lfloor S}{\alpha}$).

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte

$$\Phi_k = \Phi - k\,\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$$

Φ_k ist σ-additiv. Wähle $P_k \in \Sigma$ zu Φ_k gemäss Satz 5.5.1 mit

$$\Phi_k \lfloor P_k^c \leq 0 \leq \Phi_k \lfloor P_k, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Das heisst

$$\Phi(A) \geq k\mu(A), \;\; \forall A \subset P_k, \;\; A \in \Sigma,$$

bzw.

$$\Phi(A) \leq k\mu(A), \;\; \forall A \subset P_k^c, \;\; A \in \Sigma.$$

Aus $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erhalten wir eine monotone Folge von Mengen mit denselben Eigenschaften, indem wir setzen

$$Q_k = \bigcup_{l \geq k} P_l.$$

Wir prüfen leicht, dass gilt

$$\Phi(A) \geq k\mu(A), \;\; \forall A \subset Q_k, \;\; A \in \Sigma,$$

bzw.

$$\Phi(A) \leq k\mu(A), \;\; \forall A \subset Q_k^c, \;\; A \in \Sigma.$$

Definiere weiter

$$N = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k, \;\; S_1 = Q_1^c, \;\; S_k = Q_{k-1} \setminus Q_k, \;\; k \geq 2.$$

Aus der Abschätzung

$$k\,\mu(N) \leq \Phi(N) \leq \Phi(X), \;\; \forall k,$$

erhalten wir unmittelbar $\mu(N) = 0$. Für $A \subset S_k$, $A \in \Sigma$, folgt zudem

$$(k-1)\,\mu(A) \leq \Phi(A) \leq k\,\mu(A),$$

wie gewünscht. $\square$

Beachte, dass man das μ-Integral einer Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ analog zu Abschnitt 3.1 auch in einem beliebigen Massraum (X, μ, Σ) definieren kann. Die Konstruktion der Räume $L^p(X, \mu)$ verläuft dann wie in Abschnitt 3.5, und es gelten die zu Satz 3.5.1, Korollar 3.5.2 analogen Resultate, insbesondere sind diese Räume auch vollständig analog zu Lemma 3.5.2. Im folgenden sei der Einfachheit halber stets $\mu(X) < \infty$ vorausgesetzt.

Satz 5.5.2. *Sei (X, μ, Σ) ein Massraum mit $\mu(X) < \infty$, $\Phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ σ-additiv und endlich. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$\Phi = \Phi_{ac} + \Phi_s \text{ (Lebesgue-Zerlegung)}$$

mit σ-additiven Mengenfunktionen $\Phi_s \perp \mu$, $\Phi_{ac} \ll \mu$, und

$$\Phi_{ac}(A) = \int_A f\, d\mu, \;\; \Phi_s(A) = \Phi(A \cap N)$$

für ein geeignetes $f \in L^1(X, \mu)$ und ein geeignetes $N \in \Sigma$ mit $\mu(N) = 0$.

Beweis. *i)* Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sei

$$\Phi = \beta + \sigma = \gamma + \tau$$

mit $\beta, \gamma \ll \mu$ sowie $\sigma, \tau \perp \mu$. Dann ist $\rho := \sigma - \tau = \gamma - \beta$ absolut stetig und zugleich singulär bezüglich μ. Da ρ singulär, existiert $S \in \Sigma$ mit $\mu(S) = 0$ und

$$\rho(A) = \rho(A \cap S), \forall A \in \Sigma.$$

Da andererseits $\rho \ll \mu$ und $\mu(A \cap S) \leq \mu(S) = 0$ für alle $A \in \Sigma$, folgt

$$\rho(A) = \rho(A \cap S) = 0, \forall A \in \Sigma;$$

das heisst, $\rho = 0$.

ii) Zum Beweis der Existenz der Zerlegung genügt es, den Fall $\Phi \geq 0$ zu betrachten. (Sonst betrachte $\overline{V}$, bzw. $\underline{V}$.)

Für $l \in \mathbb{N}$ wähle $\alpha = 2^{-l}$ und zerlege disjunkt

$$X = N_l \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{kl}$$

gemäss Lemma 5.5.1 mit $\mu(N_l) = 0$ und mit $S_{kl} \in \Sigma$, so dass für μ-messbares $A \subset S_{kl}$ gilt

$$2^{-l}(k-1) \cdot \mu(A) \leq \Phi(A) \leq 2^{-l} k \cdot \mu(A), \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{5.5.4}$$

Setze weiter

$$f_l = 2^{-l} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \chi_{S_{kl}}, \;\; l \in \mathbb{N}.$$

Schliesslich sei $N = \cup_{l=1}^{\infty} N_l$ mit $\mu(N) = 0$.

Es folgt für alle $A \in \Sigma$:

$$\begin{aligned}\int_A f_l\,d\mu = \int_{A\setminus N} f_l\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A\cap S_{kl}\setminus N} f_l\,d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty}\Phi(A\cap S_{kl}\setminus N)\\ = \Phi(A\setminus N) \le \int_A (f_l + 2^{-l})\,d\mu = \int_A f_l\,d\mu + 2^{-l}\mu(X).\end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Behauptung 1: Es gilt $|f_l - f_{l+1}| \le 2^{-l}$ μ-a.e. auf X.

Beweis. Es genügt, die Ungleichung für μ-a.e. $x \in S_{kl}\setminus N \subset \cup_{k'=1}^{\infty} S_{kl}\cap S_{k'(l+1)}$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Setze $a := 2^{-l}(k-1) < b := 2^{-l}k$, $a' := 2^{-(l+1)}(k'-1) < b' := 2^{-(l+1)}k'$. Gemäss (5.5.4) gelten für μ-messbares $A \subset S_{kl}\cap S_{k'(l+1)}$ somit die Abschätzungen

$$a\;\mu(A) \le \Phi(A) \le b\;\mu(A)\,,$$

sowie

$$a'\;\mu(A) \le \Phi(A) \le b'\;\mu(A)\,.$$

Kombination dieser Abschätzungen ergibt

$$(a-b')\mu(A) \le 0,\;\; (a'-b)\mu(A) \le 0\,.$$

Falls also $\mu(S_{kl}\cap S_{k'(l+1)}) > 0$ für einen Index k', so folgt für $x \in S_{kl}\cap S_{k'(l+1)}$ nach Definition von f_l, f_{l+1}

$$\begin{aligned}f_l(x) = a \le b' = a' + 2^{-(l+1)} = f_{l+1}(x) + 2^{-(l+1)}\,,\\ f_{l+1}(x) = a' \le b = a + 2^{-l} = f_l(x) + 2^{-l}\,.\end{aligned}$$

Damit gilt μ-a.e. auf S_{kl} die Abschätzung

$$|f_l - f_{l+1}| \le 2^{-l},$$

wie gewünscht. □

Da $\mu(X) < \infty$, ist $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gemäss Behauptung 1 Cauchy-Folge in $L^1(X,\mu)$. Nach Lemma 3.5.2 existiert $\lim_{l\to\infty} f_l =: f \in L^1(X,\mu)$.

Setze $\sigma = \Phi\lfloor N$ und definiere

$$\beta(A) = \int_A f\,d\mu,\;\; A \in \Sigma.$$

Offenbar gilt $\sigma \perp \mu$, $\beta \ll \mu$. Grenzübergang $l \to \infty$ in (5.5.5) liefert zudem

$$\beta(A) = \int_A f\,d\mu = \Phi(A\setminus N),\;\; A \in \Sigma.$$

Für alle $A \in \Sigma$ erhalten wir somit die Darstellung

$$\Phi(A) = \Phi(A\setminus N) + \Phi(A\cap N) = \beta(A) + \sigma(A)\,,$$

wie gewünscht. □

Korollar 5.5.1. *(Radon-Nikodym) Seien X, μ, Σ, $\Phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ wie oben, wobei $\Phi \ll \mu$. Dann existiert $f \in L^1(X, \mu)$ mit*

$$\Phi(A) = \int_A f \, d\mu, \ \forall A \in \Sigma. \tag{5.5.6}$$

Beispiel 5.5.2. Sei $X = \{1, 2\}$, und sei μ das Zählmass mit $\Sigma = 2^X$, $\Phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(\emptyset) = 0$, $\Phi(\{1\}) = a$, $\Phi(\{2\}) = b$, $\Phi(X) = a + b$. Dann erhalten wir die Darstellung (5.5.6) bei Wahl von $f = a\chi_{\{1\}} + b\chi_{\{2\}}$.

Bemerkung 5.5.3. Wie das obige Beispiel zeigt, ist der Satz von Radon-Nikodym kein Differenzierbarkeitstheorem; wir können jedoch die in Korollar 5.5.1 konstruierte Funktion f wiederum ansehen als Dichte von Φ bezüglich μ.