Funktionalanalysis I

Prof. Dr. Michael Struwe

Herbstsemester 2019

ETH Zürich

Worum geht es?

Grob gesagt, geht es in dieser Vorlesung um die Auflösung linearer Gleichungssysteme der Art

$$Ax = y,$$

wobei $A\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung ist zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen X und Y und wo zu gegebenem $y \in Y$ eine Lösung $x \in X$ gesucht wird.

Beispiel Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$. Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

kann man auffassen als Gleichung der Form $Au = f$ mit $X = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $A\colon H^2 \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Zusätzlich zur linearen Struktur des Problems bedarf es im Fall unendlicher Dimension weiterer analytischer und geometrischer Strukturen, insbesondere spielen Vollständigkeit, Kompaktheit, beziehungsweise Konvexität eine Rolle. Je nachdem ist daher der "richtige" Rahmen für die mathematische Behandlung ein normierter Vektorraum (Linearität) oder ein metrischer Raum (Vollständigkeit, Kompaktheit), vielleicht auch ein "lokal konvexer topologischer Vektorraum", in dieser Vorlesung jedoch meist ein Banachraum oder sogar ein Hilbertraum.

Wie das Beispiel zeigt, genügen für die Anwendungen die klassischen Funktionenräume allein nicht. In der Vorlesung "Funktionalanalysis II" werden die für die Behandlung partieller Differentialgleichungen fundamentalen Sobolev-Räume eingeführt und die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen entwickelt

Die Vorlesung stützt sich auf die grosse verfügbare Lehrbuchliteratur, vor allem jedoch auf die nachfolgend aufgeführten Texte. Das hier vorliegende Skript zu meiner Vorlesung im akademischen Jahr 2019 ist eine überarbeitete und leicht erweiterte Fassung des Skriptums zu meinen gleichnamigen Vorlesungen der Jahre 2007 und 2013. Auch für die vorliegende neue Fassung erhielt ich wieder zahlreiche hilfreiche Kommentare von Studierenden, Assistierenden und Kollegen, die ich sehr dankbar aufgenommen habe. Insbesondere danke ich Alessandro Carlotto für seine detaillierten und sorgfältigen Hinweise.

Michael Struwe Zürich, Dezember 2019

Literaturverzeichnis

[1] Alt, Hans Wilhelm: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1985.

[2] Bachmann, George; Narici, Lawrence: *Functional analysis*, Academic Press, 1966.

[3] Brezis, Haim: *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[4] Dunford, Nelson; Schwartz, Jacob: *Linear operators*, Wiley, 1988.

[5] Evans, Lawrence Craig: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, 2. Auflage, American Mathematical Society, 2010.

[6] Giaquinta, Mariano: *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.

[7] Rudin, Walter: *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[8] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis*, Springer, 4. Auflage, 2002.

[9] Yosida, Kosaku: *Functional analysis*, Nachdruck der 6. Auflage von 1980, Springer, Classics in Mathematics, 1995.

[10] Zehnder, Eduard: *Skript zur Vorlesung über Funktionalanalysis*, Mitschrift von Christian Frei: http://christianfrei.gmxhome.de/

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Funktionalanalysis I

Kapitel 1

Vollständigkeit, Baire-Kategorie

1.1 Ein "nichtlineares" Problem

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, und für jedes $x \in [0,1]$ existiere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

Ist f dann in mindestens einem Punkt x_0 stetig? – und liegt damit, durch Iteration des Arguments in Teilintervallen der Länge $\frac{1}{n}, n \in N$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f sogar dicht in $[0,1]$?

Baire fand die geniale Lösung dieses Problems auf dem Umweg über das für die Funktionalanalysis äusserst fruchtbare Konzept der Baire Kategorie .

1.2 Metrische Räume

Sei (M,d) ein metrischer Raum; das heisst, $d\colon M\times M \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

i) $d(x,y) \geq 0$, "=" gdw. $x = y$ (Definitheit),

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecks-Ungleichung).

Beispiel 1.2.1. i) Jede Teilmenge eines normierten Raums $(X, ||\cdot||)$ kann in kanonischer Weise als metrischer Raum mit Metrik

$$d(x,y) = ||x-y||$$

aufgefasst werden; zum Beispiel $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

ii) Sei $S = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}; x_k \in \mathbb{R}\}$ der Raum aller Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$. Durch

$$d((x_k),(y_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$$

wird eine Metrik auf S erklärt.

Wir wiederholen kurz die wichtigsten topologischen Begriffe:

i) $\Omega \subset M$ heisst **offen**, falls gilt

$$\forall x \in \Omega\, \exists r > 0 \colon B_r(x) = \{y \in M; d(x,y) < r\} \subset \Omega$$

ii) $A \subset M$ heisst **abgeschlossen**, falls $A^c = M \setminus A$ offen ist.

Für $\Omega \subset M$ sind ferner definiert:

iii) $\overset{\circ}{\Omega} = \bigcup_{G\subset\Omega,\ G \text{ offen}} G$: der **offene Kern** von Ω,

iv) $\overline{\Omega} = \bigcap_{A\supset\Omega,\ A \text{ abgeschlossen}} A = \left((\Omega^c)^\circ\right)^c$: die **abgeschlossene Hülle** von Ω,

v) $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$: der **Rand** von Ω. Somit wird $\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$ disjunkt zerlegt.

vi) $\Omega \subset M$ heisst **dicht**, falls $\overline{\Omega} = M$, das heisst, falls

$$\forall B = B_r(x) \subset M \colon B \cap \Omega \neq \emptyset. \tag{1.2.1}$$

vii) $\Omega \subset M$ heisst **nirgends dicht**, falls $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \emptyset$, das heisst, falls

$$\forall B = B_r(x) \subset M \colon B \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset. \tag{1.2.2}$$

Beispiel 1.2.2. Eine endliche Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist nirgends dicht, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist dicht.

Für das folgende ist insbesondere von Bedeutung:

Satz 1.2.1. *Sei $U \subset M$, $A = U^c = M \setminus U$. Es sind äquivalent:*

i) U ist offen und dicht;

ii) A ist abgeschlossen und nirgends dicht.

Beweis. *i) $\Rightarrow$ ii):* Sei U offen und dicht. Dann ist $A = U^c$ abgeschlossen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \setminus \overline{A} = B \setminus A = B \cap U \neq \emptyset.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei A abgeschlossen und nirgends dicht. Dann ist $U = A^c$ offen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \cap U = B \setminus A = B \setminus \overline{A} \neq \emptyset.$$

□

Diese Begriffe sind natürlich bereits auf der Stufe eines topologischen Raumes erklärt. Falls (M, d) metrisch ist, so gibt es äquivalente Kriterien mit Folgen in M; zum Beispiel gilt

Satz 1.2.2. *$A \subset M$ ist abgeschlossen, gdw. für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A und $x \in M$ gilt:*

$$x_k \to x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Ein erst auf der Stufe metrischer Räume definierter Begriff ist der Begriff einer Cauchy-Folge und der Begriff der Vollständigkeit.

Definition 1.2.1. *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine* **Cauchy-Folge** *in M, falls*

$$d(x_k, x_l) \to 0 \ (k, l \to \infty).$$

Definition 1.2.2. *(M, d) heisst* **vollständig** *, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M konvergiert.*

Beispiel 1.2.3. i) $C^0([0, 1])$ mit der von der Supremumsnorm

$$||f||_{C^0} = \max_{0\le t\le 1} |f(t)|$$

induzierten Metrik ist vollständig.

ii) Die Räume $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, sowie $C^m(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}_0$, sind vollständig.

iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ mit kompakten $K_j \subset K_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^0(\Omega)$ mit der Metrik

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||f - g||_{C^0(K_j)}}{1 + ||f - g||_{C^0(K_j)}}$$

analog zu Beispiel 1.2.1 ii) vollständig. (Die von d induzierte Topologie auf $C^0(\Omega)$ heisst **compact-open topology**.)

1.3 Baire-Kategorie

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $M \neq \emptyset$.

Satz 1.3.1. *Falls (M, d) vollständig ist, so gelten die folgenden (äquivalenten) Aussagen*

i) Sei $U_j \subset M$ offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ dicht in M.

ii) Falls $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\circ} \neq \emptyset$ mit abgeschlossenen $A_j, j \in \mathbb{N}$, so gibt es mindestens ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$. Insbesondere gilt:

iii) Falls $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit abgeschlossenen $A_j, j \in \mathbb{N}$, so gibt es mindestens ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$.

Beispiel 1.3.1. Die Beispiele

i) $M = \mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$

und

ii) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$

mit $A_x = \{x\} = \overline{A}_x$ und $\overset{\circ}{A}_x = \emptyset$ zeigen, dass in Teil ii) des Satzes die Annahmen der Abzählbarkeit der Familie (A_j) und die Vollständigkeit von M notwendig sind.

Beweis. i) Aufgrund der Charakterisierung (1.2.1) dichter Mengen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung: Für $x \in M, r > 0$ gilt stets $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$.

Beweis. Seien $x \in M, r > 0, B = B_r(x)$. Konstruiere $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ induktiv, wie folgt.

a) Da U_1 dicht und offen, gilt

$$U_1 \cap B \neq \emptyset, U_1 \cap B \text{ offen.}$$

Wähle $x_1 \in U_1 \cap B, 0 < r_1 < \frac{1}{2}$ mit

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{2r_1}(x_1) \subset U_1 \cap B. \tag{1.3.1}$$

b) Seien $x_1, \ldots, x_{j-1} \in M, r_1, \ldots, r_{j-1}$ bereits bestimmt. Beachte, dass wie oben gilt

$$U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \neq \emptyset, \quad U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \text{ offen.}$$

Wähle $x_j \in U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}), 0 < r_j < 2^{-j}$ mit

$$\overline{B_{r_j}(x_j)} \subset B_{2r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}). \tag{1.3.2}$$

Dann erhalten wir für alle $j > k \in \mathbb{N}$ die Kette von Inklusionen

$$x_j \in B_{r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset \ldots \subset B_{r_k}(x_k), \tag{1.3.3}$$

also insbesondere

$$d(x_j, x_k) \leq r_k < 2^{-k} \to 0 \quad (j \geq k \to \infty);$$

das heisst, $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig, existiert

$$x^* = \lim_{j \to \infty} x_j,$$

und nach Grenzübergang $j \to \infty$ in (1.3.3) folgt mit (1.3.2)

$$\forall k \colon x^* \in \overline{B_{r_k}(x_k)} \subset U_k.$$

Insbesondere erhalten wir $x^* \in U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Für $k = 1$ liefert (1.3.1) zudem $x^* \in U_1 \cap B \subset B$, also

$$x^* \in U \cap B \neq \emptyset,$$

wie gewünscht. □

i) ⇒ iii): (indirekt) Widerspruchsweise nehmen wir an

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

mit abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$. Setze

$$U_j = A_j^c = M \setminus A_j, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 1.2.1 ist U_j offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$. Nach Annahme gilt jedoch

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = \emptyset$$

im Widerspruch zu i).

iii)⇒ ii): Betrachte den vollständigen metrischen Raum $(L, d) = (\overline{B_r(x)}, d)$, wo $B_{2r}(x) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und benutze iii), angewandt auf die Mengen $L \cap A_j$, $j \in \mathbb{N}$.

ii) ⇒ i): Sei U_j offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$, $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Widerspruchsweise nehmen wir an, dass $B = M \setminus \overline{U} \neq \emptyset$. Die Mengen $A_j = U_j^c$, $j \in \mathbb{N}$, sind abgeschlossenen und nirgends dicht, und mit $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme ii). □

Bemerkung 1.3.1. Die Äquivalenz der Aussagen i) - iii) des Satzes gilt ohne die Annahme, dass M vollständig ist.

Definition 1.3.1. *(Baire Kategorie)*

i) $A \subset M$ heisst **mager** *oder von* **1. Baire Kategorie**, *falls $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit nirgends dichten Mengen A_j, $j \in \mathbb{N}$; $Kat(A) = 1$.*

ii) $A \subset M$ heisst **fett** *oder von* **2. Baire Kategorie**, *falls A nicht von 1. Baire Kategorie ist; $Kat(A) = 2$.*

iii) $\Omega \subset M$ heisst **residuell**, *falls $\Omega^c = A$ mager ist.*

Beispiel 1.3.2. i) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \subset \mathbb{R}$ ist mager.

ii) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

iii) Abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind mager.

Frage: Gibt es überhaupt fette Mengen?

Satz 1.3.2. *(Baire) Sei (M, d) vollständig, $M \neq \emptyset$. Dann gilt:*

i) $Kat(M) = 2$

ii) $Kat(A) = 1 \Rightarrow Kat(A^c) = 2$, und A^c ist dicht in M.

iii) $\emptyset \neq U$ offen $\Rightarrow Kat(U) = 2$.

Beweis. i) Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3.1 iii).

ii) Falls $Kat(A) = Kat(A^c) = 1$, so wäre $Kat(M) = 1$ gemäss Beispiel 1.3.1 iii), also $Kat(A^c) = 2$. Sei

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$$

mit nirgends dichten $A_j, j \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_j = (\overline{A_j})^c$ offen und dicht, und nach Satz 1.3.1 i) ist

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \right)^c \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = A^c$$

dicht.

iii) Wäre $Kat(U) = 1$, so wäre gemäss ii) die Menge $U^c = A = \overline{A}$ dicht, also $A = M$, $U = \emptyset$. $\square$

“Typische” Beispiele magerer, beziehungsweise fetter Mengen sind somit die Teilmengen $\mathbb{Q}$, beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von $M = \mathbb{R}$. Beachte, dass gilt

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset.$$

Jedoch scheint es einen Zusammenhang mit dem Lebesgueschen Mass zu geben. Ist diese intuitive Vorstellung richtig?

Fragen: Sind Lebesgue-Nullmengen $A \subset \mathbb{R}$ (im Baireschen Sinne) “mager”? Haben magere Mengen $A \subset \mathbb{R}$ stets verschwindendes Lebesgue-Mass?

Beide Fragen sind mit “Nein” zu beantworten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3.3. Sei $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, und für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$U_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]q_k - 2^{-(j+k+1)}, q_k + 2^{-(j+k+1)}[$$

mit

$$\mathcal{L}^1(U_j) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-(j+k)} = 2^{-j}.$$

Die Mengen U_j sind offen und wegen

$$\overline{U_j} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

auch dicht. Nach Satz 1.2.1 ist $A_j = U_j^c$ nirgends dicht, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mager und daher $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = A^c$ fett nach Satz 1.3.2, jedoch gilt $\mathcal{L}^1(U) = \lim_{j \to \infty} \mathcal{L}^1(U_j) = 0$.

1.4 Erste Anwendung

Der Satz von Baire ist grundlegend für die Theorie linearer Gleichungen in Banach-Räumen. Als erste Anwendung stellen wir hier jedoch die Lösung des nichtlinearen Problems aus Abschnitt 1 vor.

Satz 1.4.1. *(Baire) Sei (M,d) vollständig, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon M \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, und es existiere der punktweise Limes*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R}$$

für jedes $x \in M$. Dann ist

$$R = \{x; f \text{ ist stetig an der Stelle } x\}$$

eine residuelle Menge, insbesondere also dicht in M.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ setze

$$P_{n,\varepsilon} = \{x;\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\}$$

und weiter

$$R_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P_{n,\varepsilon})^\circ.$$

Beachte, dass $R_\delta \subset R_\varepsilon$ für $\delta \le \varepsilon$.

Behauptung. $U := \bigcap_{j=1}^{\infty} R_{1/j} = R$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f.

Beweis. "$R \subset U$". Sei f in x_0 stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $r_0 > 0, n_0 = n_0(\varepsilon), r_n > 0$ $(n \ge n_0)$ mit

$$\sup_{x\in B_{r_0}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$$

und

$$\sup_{n\ge n_0} |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

sowie

$$\sup_{x\in B_{r_n}(x_0)} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$$

Dann folgt für $n \ge n_0, r < \min\{r_0, r_n\}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B_r(x_0);$$

also $B_r(x_0) \subset P_{n,\varepsilon}, x_0 \in \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon} \subset R_\varepsilon$. Also $x_0 \in U$.

"$U \subset R$". Sei f in x_0 unstetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f = \sup_{B_r(x_0)} f - \inf_{B_r(x_0)} f > 3\varepsilon, \forall r > 0.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $r_n > 0$ mit

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n < \varepsilon, \forall r < r_n.$$

Schätze ab für $r < r_n$

$$\begin{aligned} 2\sup_{B_r(x_0)} |f_n - f| &\ge \sup_{x,y\in B_r(x_0)} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \\ &\ge \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f - \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n > 2\varepsilon; \end{aligned}$$

das heisst

$$x_0 \notin \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit $x_0 \notin R_\varepsilon$ für $\varepsilon < \varepsilon_0(x_0)$, daher auch $x_0 \notin U$. □

Behauptung. R_ε ist offen und dicht für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Offenbar ist R_ε offen, $\varepsilon > 0$. Betrachte für $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$F_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Beachte, dass mit $f_{n+k}(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$ folgt $F_{n,\varepsilon} \subset P_{n,\varepsilon}$. Wegen $f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$ gilt zudem $\bigcup_{n=1}^\infty F_{n,\varepsilon} = M, \forall \varepsilon > 0$. Weiter ist

$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^\infty \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen. Also gilt $\partial F_{n,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon} \setminus \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$, und mit $\big(\partial F_{n,\varepsilon}\big)^\circ \subset \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ folgt $(\partial F_{n,\varepsilon})^\circ = \emptyset$.

Setze $A_{n,\varepsilon} = \partial F_{n,\varepsilon}$. Dann ist $A_{n,\varepsilon}$ abgeschlossen und nirgends dicht und liefert die magere Menge

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^\infty A_{n,\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^\infty (F_{n,\varepsilon} \setminus \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}) \supset \bigcup_{n=1}^\infty F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon} \supset M \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon} = M \setminus R_\varepsilon.$$

Satz 1.3.2 liefert die Behauptung. □

Setze nun

$$U_j = R_{1/j}, A_j = R_{1/j}^c.$$

Dann ist $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ mager, also

$$R = U = \bigcap_{j=1}^\infty U_j = A^c$$

residuell, insbesondere dicht nach Satz 1.3.2 ii). □

Umgekehrt kann man fragen, wann sich eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise durch stetige Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, approximieren lässt.

Beispiel 1.4.1. Die Funktion $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ ist nirgends stetig, also nicht punktweise durch stetige f_n, $n \in \mathbb{N}$, approximierbar.

Weiter kann man fragen, unter welchen Bedingungen eine Funktion $f \in L^1([0,1])$ einen Vertreter $\tilde{f}$ mit obiger Eigenschaft besitzt. Kandidaten für $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wären in diesem Falle

a) die Mittel (der durch $f \equiv 0$ ausserhalb forgesetzten Funktion f), mit

$$f_n(x) = n \int_{x-\frac{1}{2n}}^{x+\frac{1}{2n}} f(y)\, dy \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

für fast alle $x \in [0,1]$ und insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt, oder

b) die **Fourier-Reihe** der periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion f. OBdA sei die Periode auf 2π gestreckt. Setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt,\ k \in \mathbb{Z},$$

und definiere

$$f_n(x) = \sum_{|k|\le n} a_k e^{ikx},\ n \in \mathbb{N},.$$

Vergleiche dazu das Konvergenzkriterium von Dini:

Satz 1.4.2. *(Dini) Falls für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| dt < \infty,$$

so gilt für die obige Fourier-Reihe

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

Vergleiche Wheeden-Zygmund: *Measure and integral*, Theorem 12.28, S. 224. Eine weitere Anwendung liefert

Satz 1.4.3. *(Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit) Sei (M,d) vollständig, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, und sei $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$* **punktweise** *beschränkt in dem Sinne, dass*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda(x)| < \infty, \forall x \in M.$$

Dann gibt es eine offene Kugel $B \subset M$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda,\ x\in B}|f_\lambda(x)| < \infty;$$

das heisst, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist auf B **gleichmässig** *beschränkt.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere die abgeschlossene Menge

$$A_k = \{x \in M;\ \forall\lambda \in \Lambda\colon\ |f_\lambda(x)| \le k\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{\{x;\ |f_\lambda(x)| \le k\}}_{\text{abgeschlossen, da } f_\lambda \text{ stetig}}$$

mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = M$. Da M vollständig, gibt es gemäss Satz 1.3.1 iii) ein k_0 mit $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$. Wähle $B \subset A_{k_0}$. □

Falls die Funktionen f_λ lineare Abbildungen auf einem Vektorraum sind, erhält man aus Satz 1.4.3 ein Kriterium für die gleichmässige Beschränktheit der f_λ auf einer Kugel um 0, das heisst für die gleichmässige Stetigkeit der f_λ. Es liegt daher nahe, nun auch die lineare Struktur einzubeziehen.

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

2.1 Normierte Räume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $||\cdot||\colon X \to \mathbb{R}$ eine Norm auf X; das heisst,

i) $||x|| \geq 0$, "$=$" gdw. $x = 0$ (Definitheit),

ii) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (positive Homogenität),

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung).

Mit der von $||\cdot||$ induzierten Metrik

$$d(x, y) = ||x - y||$$

ist X dann auch ein metrischer Raum.

Definition 2.1.1. $(X, ||\cdot||)$ *heisst ein* **Banachraum**, *falls X bezüglich d vollständig ist.*

Bemerkung 2.1.1. i) Die Norm ist (Lipschitz-)stetig auf X, da

$$\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||, \forall x, y \in X.$$

ii) Die Vektorraumoperationen sind ebenfalls stetig (Übung).

Beispiel 2.1.1. i) Sei M eine Menge, $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$B(M, X) = \{f\colon M \to X; \sup_{t \in M} ||f(t)||_X < \infty\}$$

ein Vektorraum mit der Norm

$$||f||_{B(M,X)} = \sup_{t \in M} ||f(t)||_X.$$

ii) $B(M, X)$ ist vollständig, wenn X vollständig ist.

Beweis. i) Mit den punktweise definierten Vektorraum-Verknüpfungen

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda f)(t) = \lambda f(t), t \in M$$

wird $B(M,X)$ zu einem Vektorraum. Dabei benutzen wir auch die Dreiecks-Ungleichung und die Homogenität der Norm. Die Eigenschaften i) und ii) einer Norm sind trivialerweise erfüllt; bezüglich iii) beachte

$$\begin{aligned}||f+g||_{B(M,X)} &= \sup_{t\in M} ||f(t)+g(t)||_X \le \sup_{t\in M}(||f(t)||_X + ||g(t)||_X) \\ &\le ||f||_{B(M,X)} + ||g||_{B(M,X)}.\end{aligned}$$

ii) Falls X vollständig ist, so sind Cauchy-Folgen (f_k) in $B(M,X)$ punktweise konvergent, denn für jedes $t \in M$ ist wegen

$$||f_j(t) - f_k(t)||_X \le ||f_j - f_k||_{B(M,X)} \to 0 \quad (j,k \to \infty)$$

auch die Folge $(f_k(t))$ eine Cauchy-Folge und es existiert $f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)$ mit

$$\begin{aligned}||f - f_k||_{B(M,X)} &= \sup_{t\in M} \lim_{j\to\infty} ||f_j(t) - f_k(t)||_X \\ &\le \limsup_{j\to\infty} ||f_j - f_k||_{B(M,X)} \to 0 \quad (k \to \infty).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $f \in B(M,X)$. □

Als Anwendung von Beispiel 2.1.1 zeigen wir, dass sich jeder metrische Raum (M,d) "isometrisch" in einen vollständigen metrischen Raum (M^*,d^*) einbetten lässt.

Seien $(M,d), (M^*,d^*)$ metrische Räume, $\Phi\colon M \to M^*$.

Definition 2.1.2. Φ *heisst* **Isometrie** *, falls gilt*

$$d^*(\Phi(x),\Phi(y)) = d(x,y), \forall x,y \in M.$$

Bemerkung 2.1.2. Eine Isometrie $\Phi\colon M \to M^*$ ist (Lipschitz) stetig und injektiv, und $\Phi^{-1}\colon \Phi(M) \to M$ ist (Lipschitz) stetig.

Satz 2.1.1. *Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (M^*,d^*) und eine Isometrie $\Phi\colon M \to M^*$.*

Bemerkung 2.1.3. i) Wir bezeichnen in diesem Falle den Raum $\tilde{M} := \overline{\Phi(M)}$ als **Vervollständigung** von M, (versehen mit der Metrik $\tilde{d} = d^*|_{\tilde{M}\times\tilde{M}}$).

ii) Man kann zeigen, dass die Vervollständigung bis auf Isometrien eindeutig ist.

Beweis von Satz 2.1.1. Wähle $M^* = B(M,\mathbb{R})$ mit der von $||\cdot||_{B(M,\mathbb{R})}$ induzierten Metrik d^*. Nach Beispiel 2.1.1 ist (M^*,d^*) vollständig.

Fixiere ein $x^* \in M$. Definiere nun $\Phi\colon M \to B(M,\mathbb{R})$ durch

$$\Phi\colon x \mapsto f_x(z) = d(x,z) - d(x^*,z).$$

Beachte

$$\forall z \in M\colon\ |f_x(z)| = |d(x,z) - d(x^*,z)| \leq d(x,x^*);$$

also $f_x \in B(M,\mathbb{R})$. Analog folgt

$$\begin{aligned} ||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} &= \sup_{z\in M} |f_x(z) - f_y(z)| \\ &= \sup_{z\in M} |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \end{aligned}$$

und

$$||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} \geq |f_x(x) - f_y(x)| = d(x,y).$$

Also ist Φ eine Isometrie. □

Seien $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ Normen auf X.

Definition 2.1.3. $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ *heissen* **äquivalent***, falls mit einer Konstanten* $C > 0$ *gilt*

$$\forall x \in X: C^{-1}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1. \tag{2.1.1}$$

Beispiel 2.1.2. i) Auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) ist jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm; also sind je zwei Normen auch zueinander äquivalent.

Beweis. Die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 1\}$$

ist kompakt, und jede Norm $||\cdot||_1$ ist bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ stetig, da für $x = x_0 + \xi$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit einer Konstanten $C > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |||x||_1 - ||x_0||_1| \leq ||x_1 - x_0||_1 &= ||\sum_{i=1}^n \xi_i e_i||_1 \\ \leq \sum_{i=1}^n ||\xi_i e_i||_1 &= \sum_{i=1}^n |\xi_i|\, ||e_i||_1 \leq C \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq Cn||\xi||\ . \end{aligned}$$

Also existieren

$$\max\nolimits_{x\in S^{n-1}} ||x||_1 = C_1,\ \min\nolimits_{x\in S^{n-1}} ||x||_1 = C_2^{-1} > 0\ .$$

Mit $C = \max\{C_1, C_2\}$ folgt (2.1.1). □

ii) Die Normen auf $C^0([0,1])$,

$$||f||_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,,\ ||f||_2 = \int_0^1 |f(t)|\ dt$$

sind nicht äquivalent, da für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(t) = t^n,\ 0 \leq t \leq 1,$$

gilt

$$||f_n||_1 = 1, \; ||f_n||_2 = \frac{1}{n+1} \to 0 \; (n \to \infty) \; .$$

Hingegen lässt sich das Ergebnis aus Beispiel 2.1.2 i) auf jeden Vektorraum endlicher Dimension übertragen.

Satz 2.1.2. *Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum X sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Wir führen die Aussage auf den Fall $X = \mathbb{R}^n$, beziehungsweise $X = \mathbb{C}^n$ zurück. OBdA sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wähle eine Basis $e_1, \dots, e_n$ für X. Dann ist die Abbildung

$$\Phi \colon \mathbb{R}^n \to X, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$$

linear und injektiv, mit der Rangformel also auch surjektiv. Seien $|| \cdot ||_1^X$, $|| \cdot ||_2^X$ Normen auf X. Definiere

$$||x||_1 = ||\Phi(x)||_1^X, x \in \mathbb{R}^n,$$

und analog $||x||_2$. Die Eigenschaften i), ii) einer Norm folgen aus der Definitheit und Homogenität von $|| \cdot ||_1^X$, da Φ linear ist und injektiv. Mit der Linearität von Φ folgt ebenso für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Dreiecksungleichung

$$||x + y||_1 = ||\Phi(x) + \Phi(y)||_1^X \leq ||\Phi(x)||_1^X + ||\Phi(y)||_1^X = ||x||_1 + ||y||_1$$

aus derjenigen für $|| \cdot ||_1^X$, und ebenso für $|| \cdot ||_2^X$. Nach Beispiel 2.1.2 i) gibt es $C > 0$ mit

$$C^{-1} ||\Phi(x)||_1^X = C^{-1} ||x||_1 \leq ||x||_2 = ||\Phi(x)||_2^X \leq C ||x||_1 = C ||\Phi(x)||_1^X .$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da Φ surjektiv, folgt die Behauptung. ☐

Satz 2.1.3. *Endlich-dimensionale Teilräume eines normierten Raumes sind vollständig, insbesondere abgeschlossen.*

Beweis. Sei $Y \subset X$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum des normierten Raumes $(X, || \cdot ||_X)$, $\dim_{\mathbb{R}}(Y) = n$. Sei $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to Y$ wie im Beweis von Satz 2.1.2, $||x|| = ||\Phi(x)||_X$ die induzierte Norm in $\mathbb{R}^n$.

Cauchy-Folgen $(y_k) \subset Y$ werden unter Φ^{-1} abgebildet auf Cauchy-Folgen (x_k) im $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||)$. Wegen Beispiel 2.1.2.i) sind dies auch Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert der Limes $x := \lim_{k \to \infty} x_k$, und $y_k \to y := \Phi(x)$ $(k \to \infty)$. Somit ist Y vollständig.

Abgeschlossenheit erhält man mit dem Folgenkriterium gemäss Satz 1.2.2. ☐

Für ∞-dimensionale Unterräume ist das Ergebnis der Satz 2.1.3 im allgemeinen nicht richtig.

Beispiel 2.1.3. Betrachte $C^0([0,2])$ als Unterraum von $(L^1([0,2]), ||\cdot||_{L^1})$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,2])$ mit

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in $L^1([0,2])$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1; \end{cases}$$

jedoch gilt $f \notin C^0([0,2])$.

Abstrakt kann man auch wie folgt argumentieren: $C^0([0,2])$ ist ein strikt in $L^1([0,2])$ enthaltener Teilraum, jedoch gilt $L^1([0,2]) = \overline{C^0([0,2])}$.

Wir wiederholen den Begriff der Kompaktheit in metrischen Räumen (M,d).

Definition 2.1.4. *$K \subset M$ heisst (folgen-)* **kompakt***, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ gilt das einfache Kriterium: $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Vergleichbare Kompaktheitskriterien in $C^0(\overline{\Omega})$ oder $L^p(\Omega)$ werden wir später kennenlernen; siehe Satz 6.3.1, bzw. Satz 6.3.2.

In metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit ferner äquivalent zur "Heine-Borel-Eigenschaft" oder Überdeckungskompaktheit.

Definition 2.1.5. *$K \subset M$ heisst* **überdeckungskompakt***, falls jede offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Die "Heine-Borel-Eigenschaft" benutzt man zur Definition von Kompaktheit in topologischen Räumen.

Schliesslich kann man endlich-dimensionale Vektorräume auch wie folgt charakterisieren.

Satz 2.1.4. *Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\dim(X) < \infty$.

ii) Die Einheitssphäre $S = \{x \in X;\ ||x|| = 1\}$ in X ist kompakt.

Beweis. i) $\Rightarrow$ *ii):* Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n, \Phi\colon \mathbb{R}^n \to X$ der Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 2.1.2, $||\cdot||_1$ die durch Φ induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\Phi^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x||_1 = 1\} =: S_1.$$

Wegen Beispiel 2.1.2.i) ist $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Φ ist stetig. Damit ist auch $\Phi(S_1) = S$ kompakt.

ii) $\Rightarrow$ *i):* (indirekt) Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = \infty$. Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in S, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Falls die Norm auf X von einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ induziert wird, das heisst, falls

$$\forall x \in X\colon ||x|| = \sqrt{(x,x)},$$

so erhält man eine geeignete Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, indem man aus einer Folge linear unabhängiger Vektoren y_k mit dem Gram-Schmidtschen [1] Verfahren eine Folge orthonormaler Vektoren erzeugt mit

$$||x_k|| = 1,\ (x_i, x_k) = 0\ (i \neq k),$$

also auch

$$||x_i - x_k||^2 = ||x_i||^2 + ||x_k||^2 - 2(x_i, x_k) = 2\ (i \neq k).$$

Somit kann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben.

In einem allgemeinen normierten Raum erhält man analog eine geeignete Folge durch Anwendung des folgenden Lemmas. □

Lemma 2.1.1. *(Franz Riesz): Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$.*

Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in]0,1[$ ein $x \in X \setminus Y$ mit

i) $||x|| = 1$,

ii) $d(x,Y) = \inf_{y\in Y} ||x-y|| > 1-\varepsilon$.

Beweis. Wähle $x^* \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen, gilt

$$d\colon = d(x^*, Y) = \inf_{y\in Y} ||x^* - y|| > 0.$$

Wähle $y^* \in Y$ mit

$$d \leq ||x^* - y^*|| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Setze

$$x = \frac{x^* - y^*}{||x^* - y^*||}$$

mit $||x|| = 1$ und

$$d(x,Y) = \inf_{y\in Y} ||\frac{x^* - y}{||x^* - y^*||}|| = \frac{d}{||x^* - y^*||} > 1 - \varepsilon.$$

□

Beweis von Satz 2.1.4 ii) ⇒ i) (vollendet). Seien $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren, $Y_k = \text{span}\{y_l;\ l \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.1.3 ist Y_k für jedes k abgeschlossen. Wähle $x_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$ und für $k \geq 2$ wähle $x_k \in Y_k \setminus Y_{k-1}$ mit

$$||x_k|| = 1, \quad d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}$$

gemäss Lemma 2.1.1. Dann gilt für $k > l$ stets

$$||x_k - x_l|| \geq d(x_k, Y_l) \geq d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}.$$

Also ist S nicht kompakt. □

[1] siehe zum Beispiel Werner, S. 202

2.2 Stetige lineare Abbildungen

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Vektorräume, $A\colon X \to Y$ linear.

Satz 2.2.1. *Es sind äquivalent:*

i) A ist stetig in $0 \in X$*;*

ii) A ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$*;*

iii) A ist gleichmässig stetig auf X*;*

iv) A ist Lipschitz stetig;

v) $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y < \infty$.

Beweis. *v)* $\Rightarrow$ *iv):* Mit der Linearität von A folgt für $x_1 \neq x_2 \in X$

$$\begin{aligned} ||Ax_1 - Ax_2||_Y = ||A(x_1 - x_2)||_Y &= ||x_1 - x_2||_X \, ||A\frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||_X}||_Y \\ &\le \sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y ||x_1 - x_2||_X. \end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *i)* ist klar.

i) $\Rightarrow$ *v):* (indirekt) Sei $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y = \infty$. Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$||x_n||_X \le 1, \quad 0 < ||Ax_n||_Y \to \infty \ (n \to \infty).$$

Dann gilt

$$z_n = \frac{x_n}{||Ax_n||_Y} \to 0 \text{ in } X \ (n \to \infty);$$

jedoch folgt mit der Linearität von A

$$||Az_n||_Y = 1, n \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur angenommenen Stetigkeit in $0 \in X$. □

Zusammen mit Satz 2.1.2 folgt:

Satz 2.2.2. *Sei X endlich-dimensional,* $A\colon X \to Y$ *eine lineare Abbildung. Dann ist A (Lipschitz) stetig.*

Beweis. $||x||_* := ||x||_X + ||Ax||_Y$ definiert eine Norm, die von A induzierte "Graphennorm" auf X. Nach Satz 2.1.2 gibt es $C > 0$ mit

$$\forall x \in X\colon ||Ax||_Y \le ||x||_* \le C||x||_X.$$

□

Satz 2.2.2 gilt nicht mehr, falls X unendlich-dimensional ist.

Beispiel 2.2.1. Sei $X = Y = C^0([0,1])$, $||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}$, $||\cdot||_Y = ||\cdot||_{C^0}$, $A = id$. Analog zu Beispiel 2.1.2.ii) gilt

$$\sup_{||f||_{L^1} \le 1} ||f||_{C^0} = \infty;$$

also ist A nicht stetig.

Setze
$$L(X,Y) = \{A\colon X \to Y;\ A \text{ ist linear und stetig}\}.$$
$L(X,Y)$ ist ein Vektorraum mit Norm
$$||A||_{L(X,Y)} = \sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y = \sup_{x \ne 0} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X},$$
und es gilt
$$\forall x \in X\colon ||Ax||_Y \le \|A\|_{L(X,Y)} \|x\|_X.$$
Falls $X = Y$ (mit derselben Norm), so setze
$$L(X,X) = L(X).$$

Satz 2.2.3. *i) Seien X, Y, Z normierte Vektorräume, $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$. Dann gilt $BA \in L(X,Z)$, und*
$$||BA||_{L(X,Z)} \le ||A||_{L(X,Y)} ||B||_{L(Y,Z)}.$$
ii) Die obige Abbildung $A, B \mapsto BA$ ist stetig.

Beweis. i) Für $x \in X$ schätze ab
$$\begin{aligned} ||(BA)x||_Z = ||B(Ax)||_Z &\le ||B||_{L(Y,Z)} ||Ax||_Y \\ &\le ||B||_{L(Y,Z)} ||A||_{L(X,Y)} ||x||_X. \end{aligned}$$
ii) Stetigkeit der Verkettung folgt aus
$$BA - B_0A_0 = (B - B_0)A + B_0(A - A_0)$$
mit i). □

Falls $X = Y$, so können wir $L(X)$ wegen Satz 2.2.3 als Algebra auffassen. Insbesondere sind die Potenzen $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k-\text{mal}}$ eines $A \in L(X)$ definiert.

Für die Existenz von **Potenzreihen** benötigen wir die Vollständigkeit.

Satz 2.2.4. *Ist Y ein Banach-Raum, so ist auch $L(X,Y)$ ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, das heisst,
$$\sup_{||x||_X \le 1} ||A_n x - A_l x||_Y \to 0 \ (n, l \to \infty).$$
Dann ist $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge für jedes $x \in X$ mit $||x||_X \le 1$, wegen der Linearität also auch für beliebiges $x \in X$. Falls Y vollständig ist, existiert der punktweise Limes
$$Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x,\ x \in X.$$
A ist linear wegen der Linearität von A_n und Stetigkeit der Vektorraum-Operationen, und aus
$$||Ax||_Y = ||\lim_{n \to \infty} (A_n x)||_Y = \lim_{n \to \infty} ||A_n x||_Y \le \limsup_{n \to \infty} ||A_n||_{L(X,Y)} ||x||_X$$

folgt die Beschränktheit und damit wegen Satz 2.2.1 auch die Stetigkeit von A.

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}||Ax - A_n x||_Y &= ||\lim_{l\to\infty}(A_l x - A_n x)||_Y = \lim_{l\to\infty}||(A_l - A_n)(x)||_Y \\ &\le \limsup_{l\to\infty}||A_l - A_n||_{L(X,Y)}||x||_X \to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

und daher nach Übergang zum Supremum bezüglich $||x||_X \le 1$

$$||A - A_n||_{L(X,Y)} \le \limsup_{l\to\infty}||A_l - A_n||_{L(X,Y)} \to 0\ (n\to\infty).$$

Vergleiche den Beweis von ii) in Beispiel 2.1.1. □

Analog zum Kriterium der absoluten Konvergenz für die Konvergenz von Reihen in $\mathbb{R}$ gilt der folgende Satz.

Satz 2.2.5. *Sei Y ein Banach-Raum, $A_j \in L(X,Y)$, $j \in \mathbb{N}$, und es gelte*

$$\sum_{j=1}^{\infty}||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Dann existiert

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}A_j \in L(X,Y).$$

Beweis. Sei $S_n = \sum_{j=1}^{n}A_j$, $n \in \mathbb{N}$. Da

$$||S_n - S_l||_{L(X,Y)} \le \sum_{j=l+1}^{n}||A_j||_{L(X,Y)} \to 0 (n \ge l \to \infty),$$

ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, nach Satz 2.2.4 also konvergent. □

Wir betrachten nun speziell Potenzreihen in $L(X)$.

Beispiel 2.2.2. i) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert die Reihe $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \in L(X)$.

Beweis. Mit der Abschätzung $||A^k||_{L(X)} \le ||A||_{L(X)}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}||\frac{A^k}{k!}||_{L(X)} \le \exp(||A||_{L(X)}) < \infty.$$

□

ii) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$, $||A||_{L(X)} < 1$. Dann existiert die **Neumann-Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty}A^k \in L(X)$, und es gilt (mit $1 = A^0 = id$)

$$(1-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}A^k(1-A) = 1; \tag{2.2.1}$$

das heisst, die Abbildung $1 - A$ ist invertierbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1 - A)^{-1}.$$

Beweis. Konvergenz der Reihe $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}$, folgt analog zu i) mit dem Konvergenzkriterium für die geometrische Reihe. Die Identität (2.2.1) folgt aus

$$(1 - A)S_n = S_n(1 - A) = S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 + (S_n - S_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

Satz 2.2.6. *Sei X ein normierter Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert*

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le ||A||_{L(X)}.$$

r_A heisst **Spektralradius** *von A.*

Beispiel 2.2.3. Sei $A \in L(X)$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $0 \neq x_\lambda \in X$. Mit

$$A^n x_\lambda = \lambda A^{n-1} x_\lambda = \cdots = \lambda^n x_\lambda$$

folgt dann $||A^n||_{L(X)} \ge |\lambda|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $r_A \ge |\lambda|$.

Beweis von Satz 2.2.6. Beachte, dass Satz 2.2.3 ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon ||A^n||_{L(X)}^{1/n} \le ||A||_{L(X)}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \le \inf_{n>1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ schreibe $n = kl + m$, $m < k$. Mit Satz 2.2.3 folgt

$$\begin{aligned} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} &\le ||A^{kl}||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} ||A^m||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \\ &\le ||A^k||_{L(X)}^{\frac{l}{n}} ||A||_{L(X)}^{\frac{m}{n}} \\ &\to ||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \le \inf_{j\in\mathbb{N}} ||A^j||_{L(X)}^{\frac{1}{j}} + \varepsilon \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le \inf_{n\ge1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le \liminf_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}},$$

wie gewünscht. □

Als Folgerung notieren wir abschliessend:

Satz 2.2.7. *Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$ mit $r_A < 1$. Dann konvergiert die Neumann-Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} A^j \in L(X)$, und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (1 - A)^{-1} \in L(X).$$

Beweis. Die Konvergenz der Reihe folgt aus Satz 2.2.5 mit dem Wurzelkriterium. Die Behauptung folgt dann wie in Beispiel 2.2.2.ii). □

Setze

$$Gl(X) = \{A \in L(X);\ A \text{ invertierbar und } A^{-1} \in L(X)\}.$$

Bemerkung 2.2.1. In Abschnitt 3.2 werden wir sehen, dass für bijektive Abbildungen $A \in L(X)$ eines Banachraums X die Inverse automatisch stetig ist.

Aus Satz 2.2.7 folgt nun

Satz 2.2.8. *Sei X ein Banach-Raum. Dann ist $Gl(X)$ offen in $L(X)$.*

Beweis. Sei $A_0 \in Gl(X)$, $A \in L(X)$ mit

$$||A - A_0||_{L(X)} < ||A_0^{-1}||_{L(X)}^{-1}.$$

Wir zeigen $A \in Gl(X)$. Schreibe dazu

$$A = A_0 + (A - A_0) = A_0(1 + A_0^{-1}(A - A_0)).$$

Satz 2.2.3 liefert die Abschätzung

$$||A_0^{-1}(A - A_0)||_{L(X)} \leq ||A_0^{-1}||_{L(X)}||A - A_0||_{L(X)} < 1.$$

Mit Satz 2.2.7 folgt

$$(1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1} \in L(X),$$

und mit Satz 2.2.3 erhalten wir

$$A^{-1} = (1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1}A_0^{-1} \in L(X),$$

wie gewünscht. □

2.3 Quotientenraum

Sei X ein Vektorraum, $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Definiere die Äquivalenzrelation

$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$

mit Äquivalenzklassen

$$[x] = x + Y.$$

Beachte, dass $[\alpha x] = \alpha[x]$ für $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei wir für $\alpha = 0$ identifizieren

$$0 = 0[x] = [0] = Y;$$

weiter gilt $[x_1 + x_2] = [x_1] + [x_2]$; das heisst

$$X/Y := \{[x]; x \in X\}$$

ist ein Vektorraum. Es sei π die kanonische Quotientenabbildung

$$\pi \colon X \ni x \mapsto [x] \in X/Y.$$

Satz 2.3.1. *Sei $||\cdot||_X$ Norm auf X, $Y \subset X$ abgeschlossen, $Y \neq X$. Dann ist*

$$||[x]||_{X/Y} := \inf_{y \in Y} ||x - y||_X = \operatorname{dist}(x, Y)$$

eine Norm auf X/Y, und π ist stetig mit

$$||\pi||_{L(X,X/Y)} = 1.$$

Falls $(X, ||\cdot||_X)$ vollständig ist, so auch $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$.

Bemerkung 2.3.1. Auf die Abgeschlossenheit von Y kann man nicht verzichten. Falls $Y \subset X$ ein dichter Unterraum ist, so gilt $\inf_{y \in Y} ||x - y||_X = 0$, $x \in X$.

Beweis von Satz 2.3.1. i) Zum Beweis der Definitheit sei $||[x]||_{X/Y} = 0$ für ein $x \in X$. Dann gibt es eine Folge $(y_k) \subset Y$, so dass $||x - y_k||_X \to 0$ für $k \to \infty$. Mit der Abgeschlossenheit von Y folgt $x = \lim_{k \to \infty} y_k \in Y$, also $[x] = [0]$.

Die Homogenität der Norm $||\cdot||_{X/Y}$ ist offensichtlich.

Schliesslich zeigen wir die Dreiecks-Ungleichung. Zu $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$ wähle $y_1, y_2 \in Y$ mit

$$||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \leq ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} ||[x_1] + [x_2]||_{X/Y} &= ||[x_1 + x_2]||_{X/Y} \leq ||(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)||_X \\ &\leq ||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \leq ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

ii) Mit $||\pi(x)||_{X/Y} = ||[x]||_{X/Y} \leq ||x||_X$ folgt sofort $||\pi||_{L(X,X/Y)} \leq 1$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $x = x_\varepsilon \in X \setminus Y$ gemäss dem Lemma 2.1.1 von Riesz mit

$$||x||_X = 1, \operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon.$$

Mit

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||_X = ||[x]||_{X/Y}$$

folgt

$$||\pi||_{L(X,X/Y)} \geq \frac{||[x]||_{X/Y}}{||x||_X} > 1 - \varepsilon.$$

iii) Zum Beweis der Vollständigkeit des Raumes X/Y im Falle eines Banachraums X sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $||[x_k] - [x_l]||_{X/Y} \to 0$ $(k, l \to \infty)$. Es genügt zu zeigen, dass für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ der Limes $[x] = \lim_{k\to\infty,\, k\in\Lambda}[x_k]$ existiert. OBdA dürfen wir daher annehmen, dass

$$||[x_k] - [x_{k-1}]||_{X/Y} < 2^{-k},\ k > 1.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle induktiv $y_k \in Y$, $z_k \in X$ wie folgt. Setze $y_1 = 0$, $z_1 = x_1$, und für $k > 1$ wähle $y_k \in Y$ so, dass für $z_k = x_k - y_k \in X$ mit $[z_k] = [x_k]$ gilt

$$\begin{aligned} ||z_k - z_{k-1}||_X &< ||[z_k] - [z_{k-1}]||_{X/Y} + 2^{-k} \\ &= ||[x_k] - [x_{k-1}]||_{X/Y} + 2^{-k} < 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Dann ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, und es existiert $z = \lim_{k\to\infty} z_k \in X$. Mit

$$||[x_k] - [z]||_{X/Y} = ||[z_k] - [z]||_{X/Y} \le ||z_k - z||_X \to 0 \quad (k \to \infty)$$

folgt die Behauptung. □

2.4 Hilberträume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $(\cdot,\cdot)\colon X \times X \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 2.4.1. $(\cdot,\cdot)$ *heisst* **Skalarprodukt** *auf X, falls gilt*

i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $\forall x, y \in X$,

ii) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$,

iii) $(x, x) \ge 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bemerkung 2.4.1. i) Mit i) und ii) erhalten wir im Falle des Skalarkörpers $\mathbb{C}$ auch

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha}\overline{(x, y)} = \overline{\alpha}(x, y)$$

für alle $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

ii) Falls X ein Raum mit Skalarprodukt ist, so definiert

$$||x|| := \sqrt{(x, x)},\ x \in X,$$

die **kanonische Norm** in X.

Beweis. Die Definitheit und die positive Homogenität sind klar. Die Dreiecks-Ungleichung folgt mit der nachstehenden Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 2.4.1, aus der Rechnung

$$||x+y||^2 = (x, x) + 2Re(x, y) + (y, y) \le ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

□

Lemma 2.4.1. *(Cauchy-Schwarz) Es gilt*

$$|(x, y)| \le ||x||\,||y||,\ \forall x, y \in X.$$

Beweis. OBdA gelte $||x|| = ||y|| = 1$. Setze $t = \overline{(x, y)}$ und beachte, dass damit $(x, y - tx) = 0$. Mit

$$1 = ||y||^2 = ||tx + (y - tx)||^2 = |t|^2||x||^2 + ||y - tx||^2 \geq |t|^2 = |(x, y)|^2$$

folgt die Behauptung. □

Definition 2.4.2. *Der Raum $(X, (\cdot, \cdot))$ heisst* **Hilbertraum** *falls X bzgl. $|| \cdot ||$ vollständig ist.*

Beispiel 2.4.1. i) $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ sind Hilberträume mit dem üblichen Skalarprodukt.

ii) Der Raum $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\, dt\ .$$

Zu $Y \subset X$ sei

$$Y^\perp = \{z \in X;\ \forall y \in Y : (z, y) = 0\}.$$

Lemma 2.4.2. *$Y^\perp$ ist abgeschlossener linearer Unterraum, $Y^\perp = \left(\overline{span\ Y}\right)^\perp$.*

Beweis. Linearität von $Y^\perp$ folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarprodukts. Falls weiter $(z_k) \subset Y^\perp$ mit $z_k \to z$ $(k \to \infty)$, so gilt

$$\forall y \in Y : (z, y) = \lim_{k\to\infty} (z_k, y) = 0.$$

Also ist $Y^\perp$ abgeschlossen nach Satz 1.2.2. Analog erhält man $Y^\perp = \left(\overline{span\ Y}\right)^\perp$. □

Bemerkung 2.4.2. i) Falls $\overline{Y} = X$, so gilt $Y^\perp = \{0\}$.

ii) Offenbar gilt

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1^\perp \supset Y_2^\perp.$$

Beweis. i) Sei $z \in Y^\perp$. Falls $\overline{Y} = X$, so gibt es $(y_k) \subset Y$ mit $y_k \to z$ $(k \to \infty)$, also

$$||z||^2 = (z, z) = \lim_{k\to\infty} (z, y_k) = 0.$$

□

Lemma 2.4.3. *Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ genau ein $y_0 \in Y$ mit der Eigenschaft*

$$\forall y \in Y : (x_0 - y_0, y) = 0,$$

und

$$||x_0 - y_0|| = \operatorname{dist}(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} ||x_0 - y||.$$

(Der Punkt y_0 ist der "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf Y.)

Beweis. Zu vorgegebenem $x_0 \in X$ wähle $y_k \in Y$ mit

$$||x_0 - y_k|| \to \operatorname{dist}(x_0, Y) =: d \ (k \to \infty).$$

Behauptung 1. Es existiert $y_0 = \lim_{k\to\infty} y_k \in Y$, und $||x_0 - y_0|| = d$.

Beweis. Benutze die Parallelogramm-Identität

$$||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

mit $a = x_0 - y_k$, $b = x_0 - y_l$. Es folgt

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2 \lim_{k,l\to\infty} (||x_0 - y_k||^2 + ||x_0 - y_l||^2) \\ &= \lim_{k,l\to\infty} (4||x_0 - \frac{y_k + y_l}{2}||^2 + ||y_k - y_l||^2) \\ &\geq 4d^2 + \limsup_{k,l\to\infty} ||y_k - y_l||^2. \end{aligned}$$

Also ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da Y abgeschlossen, folgt die Behauptung. □

Behauptung 2. $\forall y_0 \in Y\colon ||x_0 - y_0|| = d \Leftrightarrow (x_0 - y_0) \perp Y$.

Beweis. Fixiere $y_0 \in Y$.

"$\Rightarrow$": Mit der Identität

$$||x_0 - y_0||^2 = d^2 \leq ||x_0 - y_0 + ty||^2 = ||x_0 - y_0||^2 + 2tRe(x_0 - y_0, y) + t^2||y||^2$$

für alle $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$\forall y \in Y\colon 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ||x_0 - y_0 + ty||^2 = 2Re(x_0 - y_0, y).$$

"$\Leftarrow$": Für jedes $0 \neq y \in Y$ definiert die Funktion $t \mapsto f(t) := ||x_0 - y_0 + ty||^2$ ein quadratisches Polynom in t mit $f'' > 0$. Falls $(x_0 - y_0) \perp Y$, so gilt zudem $f'(0) = 0$, und $f(0) = ||x_0 - y_0||^2 \leq ||x_0 - z||^2$ für jedes $z = y_0 + ty \in Y$. □

Seien $y_0, y_1 \in Y$ mit $(x_0 - y_0) \perp Y$, $(x_0 - y_1) \perp Y$, nach Behauptung 2 also $||x_0 - y_0|| = d = ||x_0 - y_1||$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d^2 &= ||x_0 - y_1||^2 = ||x_0 - y_0 - (y_1 - y_0)||^2 \\ &= ||x_0 - y_0||^2 + ||y_1 - y_0||^2 = d^2 + ||y_1 - y_0||^2, \end{aligned}$$

also $y_1 = y_0$. □

Korollar 2.4.1. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$, und sei $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $x_0 = y_0 + z$ mit $y_0 \in Y$, $z \in Y^\perp$ und*

$$||z|| = \operatorname{dist}(x_0, Y).$$

Mit Lemma 2.4.3 erhalten wir sofort auch den folgenden Satz.

Satz 2.4.1. *Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gilt*

$$X = Y \oplus Y^{\perp}$$

und jedes $x \in X$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$x = x^{||} + x^{\perp}, \text{ wobei } x^{||} \in Y, \ x^{\perp} \in Y^{\perp},$$

mit

$$||x||^2 = ||x^{||}||^2 + ||x^{\perp}||^2.$$

Insbesondere ist die Orthogonalprojektion $\pi_Y : X \to Y$ mit $\pi_Y(x) = x^{||}$ stetig, und X/Y ist isometrisch zu $Y^{\perp}$.

Bemerkung 2.4.3. Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum. Dann hat gemäss Satz 2.4.1 jeder abgeschlossene lineare Unterraum $Y \subset X$ das topologische Komplement $Y^{\perp}$ mit stetigen Projektionen

$$\pi_1 : X \ni x \mapsto x^{||} \in Y, \ \pi_2 = id - \pi_1 : X \ni x \mapsto x^{\perp} \in Y^{\perp}.$$

Für eine beliebige Menge $Y \subset X$ setze weiter

$$Y^{\perp\perp} = (Y^{\perp})^{\perp} \supset Y. \tag{2.4.1}$$

Mit Lemma 2.4.2 erhalten wir sofort $Y^{\perp\perp} \supset \overline{span\ Y}$. Wie das folgende Lemma zeigt, sind diese Mengen sogar gleich.

Lemma 2.4.4. *Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum. Dann gilt $Y^{\perp\perp} = \overline{span\ Y}$. Insbesondere ist $Y^{\perp\perp} = Y$ für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum $Y \subset X$.*

Beweis. Setze $W := \overline{span\ Y}$. Nach Lemma 2.4.2 gilt $W^{\perp} = Y^{\perp}$, also auch

$$W^{\perp\perp} = Y^{\perp\perp} \supset \overline{span\ Y} = W.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $W^{\perp\perp} \subset W$. Andernfalls gibt es $y \in W^{\perp\perp} \setminus W$, und nach Lemma 2.4.3) dürfen wir oBdA annehmen, dass $y \perp W$. Das heisst, $y \in W^{\perp} \cap W^{\perp\perp}$; also $(y, y) = 0$ im Widerspruch zur Wahl von y. $\square$

2.5 Produkte

Analog zu $\mathbb{R}^n$ kann man für Vektorräume $(X_i, ||\cdot||_i), 1 \le i \le n$, den Produktraum $X = \prod_{i=1}^n X_i$ definieren mit Elementen

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ x_i \in X_i \ (1 \le i \le n).$$

Wie in $\mathbb{R}^n$ kann man aus den Normen $||\cdot||_i$ der X_i verschiedene Normen für X ableiten, zum Beispiel für $1 \le p < \infty$ die Norm

$$||x||_{p,X} := \left(\sum_{i=1}^n ||x_i||_i^p \right)^{1/p},$$

oder die Norm

$$||x||_{\infty,X} := \max_i ||x_i||_i.$$

Diese sind wegen Beispiel 2.1.2 alle äquivalent, und die Projektionen

$$\pi_i \colon X \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i \in X_i$$

sind stetig, $1 \leq i \leq n$. X ist vollständig, falls alle X_i dies sind.

Kapitel 3

Prinzipien der Funktionalanalysis

3.1 Gleichmässige Beschränktheit

Wie angekündigt, liefert der Satz 1.4.3 von Baire im Kontext linearer Abbildungen auch Information “im Grossen”. Seien X, Y normierte Räume.

Satz 3.1.1. *(Banach-Steinhaus) Sei X vollständig, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $L(X,Y)$ punktweise beschränkt, das heisst*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda x||_Y < \infty, \forall x \in X.$$

Dann folgt

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} < \infty;$$

das heisst $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist gleichmässig beschränkt.

Beweis. Für $\lambda \in \Lambda$ definiere die stetige Abbildung $f_\lambda \colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\lambda(x) = ||A_\lambda x||_Y, x \in X.$$

Nach Annahme ist $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt.

Da X vollständig ist, existiert nach Satz 1.4.3 eine Kugel $B = B_r(x_0) \subset X$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B} |f_\lambda(z)| < \infty.$$

Es folgt für $||x||_X < 1$:

$$\begin{aligned} ||A_\lambda x||_Y &= \frac{1}{r} ||A_\lambda(x_0 + rx) - A_\lambda(x_0)||_Y \\ &\le \frac{1}{r} ||A_\lambda(x_0 + rx)||_Y + \frac{1}{r} ||A_\lambda x_0||_Y \\ &\le \frac{1}{r} \sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B_r(x_0)} |f_\lambda(z)| + \frac{1}{r} \sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda x_0||_Y =: M, \end{aligned}$$

gleichmässig in $\lambda \in \Lambda$ und $x \in X$ mit $||x||_X < 1$; also

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} \le M.$$

$\square$

Anwendung 3.1.1. Sei X vollständig, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ punktweise gegen $A\colon X \to Y$ konvergent. Dann ist A linear und stetig mit

$$||A||_{L(X,Y)} \le \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Beweis. Nach Satz 3.1.1 gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty$. Wähle eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$||A_j||_{L(X,Y)} \underset{(j\to\infty, j\in\Lambda)}{\to} \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} =: M < \infty.$$

Diese Teilfolge konvergiert natürlich ebenfalls punktweise gegen A. Offenbar ist A linear, und es gilt

$$||Ax||_Y = \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j x||_Y \le \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j||_{L(X,Y)} ||x||_X = M||x||_X$$

für alle $x \in X$. $\square$

Die Vollständigkeit von X ist wichtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.1.1. Sei $X = C^0([0,1]), ||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}$, und definiere $A_j\colon X \to \mathbb{R}$ mit $A_j f := j \int_{1-1/j}^1 f(t)\,dt$, $j \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt

$$|A_j f| \le j||f||_{L^1}, j \in \mathbb{N};$$

also ist $A_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig mit $||A_j||_{L(X,\mathbb{R})} \le j$, $j \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\forall f \in X\colon A_j f \underset{(j\to\infty)}{\to} Af := f(1);$$

jedoch ist $A\colon X \to \mathbb{R}$ unstetig. Wähle dazu $f_n(t) = t^n$ mit $||f_{n-1}||_{L^1} = 1/n$ und $Af_n = f_n(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Versehen wir jedoch $X = C^0([0,1])$ mit der Norm $||\cdot||_X = ||\cdot||_{C^0}$, so können wir abschätzen

$$|A_j f| \le ||f||_{C^0}, j \in \mathbb{N},$$

und für A mit $Af = f(1)$ gilt $A \in L(X,\mathbb{R})$.

3.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien X, Y normierte Räume, $A\colon X \to Y$ linear.

Definition 3.2.1. *A heisst* **offen**, *falls das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ offen ist in Y.*

Satz 3.2.1. *(Satz von der offenen Abbildung): Seien X, Y Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Dann gilt:*

i) Ist A surjektiv, so ist A offen.

ii) Ist A bijektiv, so gilt $A^{-1} \in L(Y,X)$.

Beweis. i) Wir führen den Beweis in 3 Schritten.

Behauptung 1. $\exists r > 0\colon B_{2r}(0;Y) \subset \overline{A(B_1(0;X))}$.

Beweis. Da A surjektiv, folgt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k(0;X)).$$

Da Y vollständig ist, gibt es nach Satz 1.3.1 iii) ein k_0 mit

$$\overset{\circ}{\overline{A(B_{k_0}(0;X))}} \neq \emptyset,$$

und es gibt $y_0 = A(x_0) \in Y, r_0 > 0$ mit

$$B_{r_0}(y_0;Y) \subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))}.$$

Sei $l_0 \geq ||x_0||_X, l_0 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus

$$B_{r_0}(y_0;Y) = Ax_0 + B_{r_0}(0;Y)$$

mit der Linearität von A

$$\begin{aligned} B_{r_0}(0;Y) &\subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))} - Ax_0 = \overline{A(B_{k_0}(0;X) - x_0)} \\ &\subset \overline{A(B_{k_0+l_0}(0;X))} = (k_0 + l_0)\overline{A(B_1(0;X))}. \end{aligned}$$

Wähle $r = \frac{r_0}{2(k_0+l_0)}$. □

Beachte, dass nach Behauptung 1 gilt

$$\forall s > 0\colon B_{sr}(0;Y) \subset \overline{A(B_{s/2}(0;X))}.$$

Behauptung 2. $B_r(0;Y) \subset A(B_1(0;X))$.

Beweis. Fixiere $y \in B_r(0;Y)$. Wir konstruieren iterativ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$\sum_{k=1}^{n} Ax_k \to y \ (n \to \infty).$$

Da X vollständig ist, existiert $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in B_1(0;X)$, und mit der Stetigkeit von A folgt

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = y.$$

Wähle $x_1 \in B_{1/2}(0;X)$ mit

$$||Ax_1 - y||_Y < \frac{r}{2}.$$

Setze $y_1 = y - Ax_1 \in B_{r/2}(0;Y)$.

Seien für $k \geq 1$ Punkte $x_1, \ldots, x_k$ sowie $y_1, \ldots, y_k$ bereits bestimmt mit

$$||x_l||_X < 2^{-l},\ y_l = y_{l-1} - Ax_l \in B_{2^{-l}r}(0;Y),\ 1 \leq l \leq k.$$

Wähle $x_{k+1} \in B_{2^{-k-1}}(0;X)$, so dass

$$y_{k+1} := y_k - Ax_{k+1} \in B_{2^{-k-1}r}(0;Y).$$

Dann folgt $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k = y_1 - \sum_{k=2}^{n} Ax_k = \ldots = y_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

wie gewünscht. □

Behauptung 3. A ist offen.

Beweis. Sei $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$, $y_0 = Ax_0$. Wähle $s > 0$ mit $B_s(x_0;X) \subset U$. Dann folgt mit Behauptung 2 sofort

$$\begin{aligned} B_{rs}(y_0;Y) &= y_0 + B_{rs}(0;Y) \subset Ax_0 + A(B_s(0;X)) \\ &= A(B_s(x_0;X)) \subset A(U). \end{aligned}$$

□

i) $\Rightarrow$ ii) Falls A bijektiv und offen, so ist für jede offene Menge $U \subset X$ das Urbild $(A^{-1})^{-1}(U) = A(U)$ von U unter A^{-1} offen, A^{-1} also stetig. □

Beispiel 3.2.1. i) Sei $X = Y$ mit Normen $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$, und es gelte mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$

$$||x||_2 \leq C||x||_1, \forall x \in X. \tag{3.2.1}$$

Ist X vollständig sowohl bezüglich $||\cdot||_1$ als auch bezüglich $||\cdot||_2$, so ist die Abbildung $A = id\colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ offen, und die Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ sind äquivalent.

Beweis. Wegen (3.2.1) ist A stetig. Falls X vollständig ist bezüglich $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$, so folgt mit Satz 3.2.1 auch die Stetigkeit von A^{-1}; das heisst, es gilt $||x||_1 \leq C'||x||_2, \forall x \in X$. □

ii) Betrachte insbesondere $X = C^0([0,1])$ mit den Normen $||\cdot||_1 = ||\cdot||_{C^0}$, $||\cdot||_2 = ||\cdot||_{L^1}$. Die Abbildung $A = id$ ist stetig aber nicht offen; sonst wären die Normen $||\cdot||_{C^0}$ und $||\cdot||_{L^1}$ auf $C^0([0,1])$ äquivalent.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Vollständigkeit von Y in Satz 3.2.1 nötig ist. Analog sieht man ein, dass auch die Vollständigkeit von X im allgemeinen notwendig ist. Betrachte dazu das Beispiel

iii) Sei $X = Y = l^2, ||\cdot||_2 = ||\cdot||_{l^2}$, und definiere eine Norm $||\cdot||_1$ auf X, wie folgt: Erweitere das System linear unabhängiger Vektoren $e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}, i = 1,2,3,\ldots$ zu einer algebraischen Basis (*"Hamel-Basis"*) $(b_\iota)_{\iota\in I}$ mit $||b_\iota||_{l^2} = 1,\ \iota \in I$. Dann hat jedes $x \in X$ genau eine Darstellung

$$x = \sum_{\iota\in I} \alpha_\iota b_\iota,$$

wobei nur **endlich** viele $\alpha_\iota \neq 0$. Setze

$$||x||_1 = \sum_{\iota \in I} |\alpha_\iota|\,, \forall x = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota b_\iota \in X.$$

Beachte, dass für $x = \sum_\iota \alpha_\iota b_\iota$ stets gilt

$$||x||_{l^2} \leq \sum_\iota |\alpha_\iota|\, ||b_\iota||_{l^2} = ||x||_1;$$

das heisst $A = id\colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ ist stetig. Jedoch gilt für $x_k = (\underbrace{1/\sqrt{k}, \ldots, 1/\sqrt{k}}_{k\text{-mal}}, 0, \ldots) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k e_i$

$$||x_k||_{l^2} = 1,\ ||x_k||_1 = \sqrt{k},\ k \in \mathbb{N};$$

also sind die Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_{l^2}$ nicht äquivalent, A^{-1} also nicht stetig und damit A nicht offen, und der Raum $(l^2, ||\cdot||_1)$ ist nicht vollständig.

Beispiel 3.2.2. Sei $(X, ||\cdot||_X)$ Banach-Raum, $Y \subset X$ abgeschlossen, $Y \neq X$, $\pi\colon X \to X/Y$ die kanonische Projektion. π ist stetig und surjektiv, der Raum $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$ vollständig nach Satz 2.3.1. Nach Satz 3.2.1 ist π daher offen, und die offenen Mengen in X/Y sind **genau** die Mengen $\{\pi(U);\ U \subset X \text{ offen}\}$.

3.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X, Y normierte Vektorräume, $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, wobei $D(A) \subset X$ ein linearer Unterraum ist.

Betrachte den **Graph von** A, also den linearen Raum

$$\Gamma_A = \{(x, Ax);\ x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Definition 3.3.1. *A heisst* **abgeschlossen**, *falls Γ_A abgeschlossen ist in $X \times Y$.*

Dabei versehen wir $X \times Y$ in üblicher Weise mit einer Norm, zum Beispiel mit der Norm

$$||(x, y)||_{X \times Y} = ||x||_X + ||y||_Y,\ \forall x \in X, y \in Y.$$

Beispiel 3.3.1. Falls $A \in L(X, Y)$ mit $D(A) = X$, so ist A abgeschlossen.

Beweis. Betrachte eine Folge $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in Γ_A mit

$$x_k \to x,\ y_k = Ax_k \to y\ (k \to \infty).$$

Da A stetig ist, folgt $y = \lim_{k\to\infty} Ax_k = Ax$; das heisst, $(x, y) \in \Gamma_A$. Also ist Γ_A abgeschlossen, und damit A. □

Falls X und Y vollständig sind, so ist für lineare Abbildungen $A\colon X \to Y$ die Stetigkeit sogar äquivalent zur Abgeschlossenheit.

Satz 3.3.1. *(Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien X, Y Banach-Räume, $A\colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

i) $A \in L(X, Y)$;

ii) A ist abgeschlossen.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) siehe Beispiel 3.3.1.

ii) $\Rightarrow$ i) Betrachte Γ_A, versehen mit der von der Norm $||\cdot||_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ induzierten Norm. Falls X, Y vollständig sind, so gilt dies auch für $X \times Y$. Ist daher Γ_A abgeschlossen in $X \times Y$, so ist $(\Gamma_A, ||\cdot||_{X\times Y})$ ein Banach-Raum.

Die Projektionen

$$\pi_X : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto x \in X,\ \ \pi_Y : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto Ax \in Y$$

sind stetig, $\pi_X : \Gamma_A \to X$ zudem surjektiv und injektiv. Nach dem Satz 3.2.1 von der offenen Abbildung folgt $\pi_X^{-1} \in L(X, \Gamma_A)$, und wir erhalten

$$A = \pi_Y \circ \pi_X^{-1} \in L(X, Y)$$

mit Satz 2.2.3. □

Bemerkung 3.3.1. Satz 3.3.1 vereinfacht den Nachweis der Stetigkeit einer linearen Abbildung $A\colon X \to Y$ erheblich. Statt der **zwei** Bedingungen

$$x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} x \Rightarrow \begin{cases} Ax_k \to y \ (k \to \infty) \\ y = Ax \end{cases}$$

genügt es für Banach-Räume X und Y, die **eine** Bedingung zu prüfen

$$x_k \to x,\ Ax_k \to y \ (k \to \infty) \Rightarrow Ax = y.$$

Beispiel 3.3.2. (Hellinger-Töplitz) Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum, und sei $A\colon H \to H$ linear und symmetrisch; das heisst,

$$\forall x, y \in H\colon (Ax, y)_H = (x, Ay)_H.$$

Dann ist A stetig.

Beweis. Wir zeigen, Γ_A ist abgeschlossen. Betrachte $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $H \times H$ mit

$$x_k \to x,\ y_k = Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $z \in H$

$$(y, z)_H \underset{(k\to\infty)}{\leftarrow} (y_k, z)_H = (Ax_k, z)_H = (x_k, Az)_H \underset{(k\to\infty)}{\to} (x, Az)_H = (Ax, z)_H;$$

das heisst,

$$\forall z \in H\colon (Ax - y, z)_H = 0.$$

Bei Wahl von $z = Ax - y$ folgt $Ax = y$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Der Graph Γ_A kann auch abgeschlossen sein, wenn $D(A)$ ein echter Teilraum von X und der Operator A unbeschränkt ist.

Beispiel 3.3.3. Sei $X = C^0([0,1])$, versehen mit der Supremumsnorm, $A = \frac{d}{dt}$ mit $D(A) = C^1([0,1]) \subset X$.

Behauptung 1. $A\colon D(A) \subset X \to X$ ist nicht stetig.

Beweis. Betrachte $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0,1])$ mit $f_n(t) = t^n, Af_n = nf_{n-1}$, und

$$||f_n||_{C^0} = 1,\ ||Af_n||_{C^0} = n||f_{n-1}||_{C^0} = n,\ n \in \mathbb{N};$$

also

$$\sup_{f\in D(A),||f||_{C^0}\le 1} ||Af||_{C^0} = \infty.$$

□

Behauptung 2. A ist abgeschlossen.

Beweis. Falls für Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0([0,1])$ gilt

$$f_n \overset{C^0}{\to} f, g_n = \frac{df_n}{dt} \overset{C^0}{\to} g\ (n \to \infty),$$

so folgt mit einem elementaren Satz der Analysis $f \in C^1([0,1])$, $g = \frac{df}{dt} = Af$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Im Satz 3.2.1 ii) von der offenen Abbildung können wir nun die Annahme der Stetigkeit von A durch die Annahme der Abgeschlossenheit ersetzen und diesen Satz auf unbeschränkte Operatoren erweitern.

Satz 3.3.2. *(Satz von der stetigen Inversen) Seien X, Y Banach-Räume, und sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, abgeschlossen, injektiv und surjektiv. Dann gibt es ein $B = A^{-1} \in L(Y,X)$ mit $AB = id_{|_Y}$, $BA = id_{|_{D(A)}}$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 ist jetzt die stetige Projektion $\pi_Y : \Gamma_A \to Y$ bijektiv, und $\pi_Y^{-1} \in L(Y, \Gamma_A)$; also $B := \pi_X \circ \pi_Y^{-1} \in L(Y,X)$, und $B = A^{-1}\colon Y \to D(A)$. □

Beispiel 3.3.4. Für den Operator A aus Beispiel 3.3.3 wähle als neuen Definitionsbereich

$$D(A) = C_0^1([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]);\ f(0) = 0\}.$$

Dann ist $A = \frac{d}{dt}\colon D(A) \subset C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ surjektiv und injektiv mit der stetigen Inversen

$$B\colon f \mapsto F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

3.4 Abschliessbare Operatoren

Seien X, Y normierte Vektorräume, $\Gamma \subset X \times Y$ ein linearer Unterraum.

Definition 3.4.1. *Γ heisst ein* **linearer Graph** *, falls gilt*

$$(x, y_1) \in \Gamma, (x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2,$$

oder, dazu äquivalent, falls gilt

$$(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0.$$

Bemerkung 3.4.1. Falls $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, so ist Γ_A offenbar ein linearer Graph.

Umgekehrt induziert ein linearer Graph $\Gamma \subset X \times Y$ genau eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \subset X \to Y$ mit $\Gamma = \Gamma_A$, gegeben durch

$$D(A) = \pi_X(\Gamma),\ Ax = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap \Gamma),\ x \in D(A).$$

Seien $A\colon D(A) \subset X \to Y$, $B\colon D(B) \subset X \to Y$ linear mit Graphen $\Gamma_A, \Gamma_B \subset X \times Y$.

Definition 3.4.2. *B heisst* **Erweiterung** *von A, $B \supset A$, falls $\Gamma_A \subset \Gamma_B$, oder – dazu äquivalent – falls*

$$D(A) \subset D(B) \text{ und } B_{|_{D(A)}} = A.$$

Definition 3.4.3. *A heisst* **abschliessbar**, *falls $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist. Der zugehörige Operator $\overline{A} \supset A$ mit $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A} \supset \Gamma_A$ heisst* **Abschluss** *von A.*

Bemerkung 3.4.2. i) Falls A abschliessbar ist, so ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung (im Sinne der Inklusion der Graphen) von A.

ii) Es gilt $D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}$, genauer

$$D(\overline{A}) = \{x \in X;\ \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A),\ y \in Y \colon (x_k, Ax_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} (x, y)\}.$$

Im Allgemeinen gilt $D(\overline{A}) \neq \overline{D(A)}$. So sind die Operatoren in Beispiel 3.3.3 oder in Beispiel 3.4.3 später in diesem Abschnitt abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich, dieser ist jedoch jeweils ein strikter Unterraum des Grundraumes.

Satz 3.4.1. *A ist abschliessbar genau dann, wenn für $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_A$ gilt:*

$$\big(x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} 0 \ \wedge\ y_k = Ax_k \underset{(k\to\infty)}{\to} y\big) \Rightarrow y = 0.$$

Beweis. A ist abschliessbar genau dann, wenn $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist und dies ist genau dann der Fall, wenn gilt: $(0, y) \in \overline{\Gamma_A} \Rightarrow y = 0$. □

Beispiel 3.4.1. Sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear und stetig. Dann ist A abschliessbar.

Beweis. Sei $(x_k, Ax_k = y_k) \in \Gamma_A$ mit $x_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$. Da A stetig, folgt

$$||Ax_k||_Y \leq \sup_{\substack{0\neq x\in D(A)\\ ||x||_X\leq 1}} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X} ||x_k||_X \to 0 \quad (k\to\infty),$$

also $Ax_k \to 0$ $(k\to\infty)$. □

Nicht jeder Operator ist abschliessbar.

Beispiel 3.4.2. Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, A die Abbildung

$$A\colon D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R});\ \mathrm{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\} \ni f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt.$$

(Dabei bezeichnet $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}}$ den "Träger" von f. Weiter schreiben wir $\Omega \subset\subset \mathbb{R}$, falls $\Omega \subset \mathbb{R}$ und Ω beschränkt.)

Für die Folge $f_k = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]} \in D(A)$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$||f_k||_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \quad (k\to\infty);$$

andererseits gilt jedoch

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon Af_k = 1.$$

Also ist A nicht abschliessbar nach Satz 3.4.1.

Die wichtigste Klasse abschliessbarer Operatoren sind lineare Differentialoperatoren. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, wobei $\mu = \mathcal{L}^n$ das Lebesguesche Mass bezeichnet.

Beispiel 3.4.3. $\Delta\colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist abschliessbar.

Beweis. Sei $((u_k, f_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Gamma_\Delta \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mit

$$u_k \overset{L^2}{\to} 0,\ f_k = \Delta u_k \overset{L^2}{\to} f\ (k\to\infty).$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, alle $k \in \mathbb{N}$ nach partieller Integration die Gleichung

$$\int_\Omega f_k\varphi\,dx = \int_\Omega \Delta u_k\varphi\,dx = \int_\Omega u_k\Delta\varphi\,dx.$$

Nach Grenzübergang $k\to\infty$ folgt

$$\forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega f\varphi\,dx = 0.$$

Da der Raum $C_c^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $L^2(\Omega)$, folgt $f = 0$; also ist Δ abschliessbar nach Satz 3.4.1. □

Allgemein betrachten wir für $1 \leq p \leq \infty$ Operatoren

$$A\colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$Au = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha(x) D^\alpha u, \ u \in C_c^\infty(\Omega),$$

mit Multi-Indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ vom Gewicht $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, und mit

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, 1 \le j \le n.$$

Die Koeffizientenfunktionen a_α seien der Einfachheit halber von der Klasse $C^N(\overline{\Omega})$ vorausgesetzt.

Satz 3.4.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann ist der oben definierte Operator*

$$A \colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

abschliessbar.

Beweis. Wir argumentieren wie in Beispiel 3.4.3. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to 0$ in $L^p(\Omega)$, $f_k := Au_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$, und sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Nach partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_k \varphi \, dx = \int_\Omega Au_k \varphi \, dx &= \sum_{|\alpha| \le N} \int_\Omega a_\alpha(x) D^\alpha u_k \varphi \, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \le N} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k D^\alpha (a_\alpha(x)\varphi) \, dx. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \colon \int_\Omega f\varphi \, dx = 0.$$

Der folgende Satz 3.4.3 ergibt $f = 0$; das heisst, A ist abschliessbar. □

Satz 3.4.3. *("Fundamentallemma der Variationsrechnung") Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Falls gilt*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \colon \int_\Omega f\varphi \, dx = 0,$$

so ist $f = 0$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.4.3. Die Annahme $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist zum Beispiel erfüllt, falls $f \in L^p(\Omega)$ für ein $p \in [1, \infty]$.

Beweis von Satz 3.4.3. Sei $x_0 \in \Omega$ Lebesgue-Punkt von f mit

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)| dx = 0,$$

und sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$. Wähle $\varphi \in C_c^\infty(B_r(0))$ mit $\int_{B_r(0)} \varphi \, dx = 1$, und setze

$$\varphi_k(x) = k^n \varphi(k(x - x_0)) \in C_c^\infty(B_{r/k}(x_0)) \subset C_c^\infty(\Omega), \ k \in \mathbb{N},$$

mit $\int_\Omega \varphi_k \, dx = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\Big| \int_\Omega (f(x) - f(x_0))\varphi_k(x)\, dx \Big| \le Ck^n \int_{B_{r/k}(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\, dx \underset{(k\to\infty)}{\to} 0,$$

und

$$0 = \int_\Omega f\varphi_k \, dx = \int_\Omega (f(x) - f(x_0))\varphi_k(x)\, dx + f(x_0) \underset{(k\to\infty)}{\to} f(x_0).$$

Da x_0 beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Im Falle der oben genannten Differentialoperatoren möchte man $\overline{A}$ und $D(\overline{A})$ gerne explizit bestimmen. Diese Frage führt auf die sogenannten **Sobolev-Räume**. Im Falle des Beispiels 3.4.3 etwa ist $D(\overline{\Delta}) \subset L^2(\Omega)$ der Raum

$$\begin{aligned} H_0^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\, \forall\, |\alpha| \le 2\colon D^\alpha u \in L^2(\Omega), \\ u = D_j u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,\ 1 \le j \le n\}; \end{aligned}$$

vergleiche Funktionalanalysis II.

Kapitel 4

Der Satz von Hahn-Banach, Konvexität

4.1 Der Satz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Siehe Satz 4.1.2 für den komplexen Fall.)

Definition 4.1.1. *Ein $p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst* **sublinear**, *falls gilt*

i) $p(\alpha x) = \alpha p(x),\ \forall x \in X, \alpha \geq 0.$

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ \forall x, y \in X.$

Beispiel 4.1.1. Jede Norm auf X ist sublinear.

Satz 4.1.1. *(Hahn-Banach): Sei M ein linearer Teilraum von X, $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in M. \tag{4.1.1}$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F_{|_M} = f$ und

$$F(x) \leq p(x),\ \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

Beweis. i) OBdA sei $M \neq X$; sonst wähle $F = f$. Wähle $x_1 \notin M$ und setze

$$M_1 = \{x + tx_1;\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Beachte, dass für $x, y \in M$ wegen Linearität von f und Sublinearität von p stets gilt

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

also auch

$$\forall x, y \in M\colon f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y). \tag{4.1.3}$$

Es folgt

$$\alpha := \sup_{x \in M} \left(f(x) - p(x - x_1)\right) < \infty,$$

und

$$\forall x \in M\colon\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_1).$$

Nach Übergang zum Supremum bezüglich $x \in M$ liefert (4.1.3) zudem

$$\forall y \in M\colon\ f(y) + \alpha \leq p(y + x_1).$$

Definiere $f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha,\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$ linear, $f_{1|M} = f$, und es gilt

$$\forall x \in M\colon\ f_1(x \pm x_1) = f(x) \pm \alpha \leq p(x \pm x_1). \tag{4.1.4}$$

Nach Multiplikation von (4.1.4) mit $t > 0$ und mit $t^{-1}x$ anstelle von x erhalten wir

$$\forall x \in M,\ t > 0\colon\ f_1(x \pm tx_1) = f(x) \pm t\alpha \leq p(x \pm tx_1),$$

also die Bedingung (4.1.1) auf dem Raum M_1.

ii) Mit transfiniter Induktion können wir uns nun eine lineare Fortsetzung g von f auf einem maximalen linearen Unterraum N von X verschaffen. Wir benutzen dazu das Zornsche Lemma. (Dies ist ein zum Auswahlaxiom oder zum Wohlordnungssatz äquivalentes Axiom; vergleiche Analysis I.)

Zornsches Lemma: *Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ nicht leer, partiell geordnet, und jede durch $\leq$ total ("linear") geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$ besitze eine obere Schranke. Dann besitzt $\mathcal{P}$ ein maximales Element.*

Setze

$$\mathcal{P} = \{(N, g);\ N \subset X \text{ linear},\ M \subset N,\ g\colon N \to \mathbb{R} \text{ linear},\ g_{|M} = f,\ g \leq p \text{ auf } N\}$$

und für $(N, g), (L, h) \in \mathcal{P}$ setze

$$(N, g) \leq (L, h) :\Leftrightarrow N \subset L, h_{|N} = g.$$

Offenbar ist $(\mathcal{P}, \leq)$ partiell geordnet, $(M, f) \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Sei $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$ linear geordnet. Setze

$$N = \bigcup_{\iota \in I} N_\iota$$

und für $x \in N$ setze

$$g(x) = g_\iota(x),\ \text{falls } x \in N_\iota.$$

Dann ist N ein linearer Unterraum von X, und g ist wohldefiniert und linear mit $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in N$. Sei nämlich $x \in N_\iota \cap N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ für $\iota, \kappa \in I$; dann gilt $g_{\kappa|N_\iota} = g_\iota$, also $g_\iota(x) = g_\kappa(x)$. Weiter gilt für $x \in N_\iota$, $y \in N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ auch $x, y \in N_\kappa$ und daher

$$g(x + y) = g_\kappa(x + y) = g_\kappa(x) + g_\kappa(y) = g(x) + g(y).$$

Schliesslich ist (N, g) obere Schranke für $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$, da für jedes $\iota \in I$ gilt

$$N_\iota \subset N \text{ und } g_{|N_\iota} = g_\iota.$$

Das Zornsche Lemma liefert nun ein (bezüglich $\leq$) maximales $(N, g) \in \mathcal{P}$, wie gewünscht.

Es gilt $N = X$, sonst liefert i) ein $(N_1, g_1) \in \mathcal{P}$ mit $(N, g) < (N_1, g_1)$ im Widerspruch zur Maximalität von (N, g). Setze $F = g$. □

Sei nun X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 4.1.2. *$p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst $\mathbb{C}$-**sublinear**, falls gilt*

i) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x),\ \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$,

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y),\ \forall x, y \in X$.

Bemerkung 4.1.1. Jedes $\mathbb{C}$-sublineare p ist auch $\mathbb{R}$-sublinear. Aus i), ii) folgt im komplexen Fall zusätzlich die Bedingung

iii) $p(x) \geq 0,\ \forall x \in X$.

Beweis. Für $x \in X$ schätze ab

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

□

Satz 4.1.2. *Sei X ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum, $M \subset X$ ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit*

$$\forall x \in M\colon\ |f(x)| \leq p(x), \tag{4.1.5}$$

für ein $\mathbb{C}$-sublineares p. Dann gibt es eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{C}$ mit $F_{|M} = f$ und

$$|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X.$$

Beweis. Betrachte $f_1 = Re\ f\colon M \to \mathbb{R}$. Beachte, f_1 ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt (4.1.5). Weiter gilt für $x \in M$ mit $f = f_1 + if_2$:

$$f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) = if(x) = -f_2(x) + if_1(x);$$

also

$$\forall x \in M\colon\ f_2(x) = -f_1(ix).$$

Sei $F_1\colon X \to \mathbb{R}$ die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von f_1 gemäss Satz 4.1.1 mit $F_{1|M} = f_1$ und

$$\forall x \in X\colon F_1(x) \leq p(x). \tag{4.1.6}$$

Setze

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix),\ x \in X.$$

F ist $\mathbb{R}$-linear und wegen $F(ix) = iF(x)$ auch $\mathbb{C}$-linear mit $F_{|M} = f$.

Schliesslich zeigen wir, dass F auch (4.1.5) erfüllt. Sei $x \in X$. Wähle $\alpha = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = F_1(\alpha x).$$

Dann folgt aus (4.1.6) und Definition 4.1.2

$$|F(x)| = F_1(\alpha x) \le p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x),$$

wie gewünscht. □

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber, falls nicht anders vermerkt, stets den reellen Fall.

Satz 4.1.1 gestattet es insbesondere, stetige lineare Abbildungen auf einem Unterraum M eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||_X)$ auf ganz X zu erweitern, mit derselben Abbildungsnorm.

Satz 4.1.3. *(Dominierte Fortsetzung) Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear und stetig.*

Dann gibt es $F \in L(X, \mathbb{R})$ mit $F_{|M} = f$ und

$$||F||_{L(X,\mathbb{R})} = ||f||_{L(M,\mathbb{R})} = \sup_{x\in M;\ ||x||_X \le 1} |f(x)|\,.$$

Beweis. Definiere $p\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = ||x||_X \cdot ||f||_{L(M,\mathbb{R})}.$$

p ist sublinear, $f \le p$ auf M. Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.1. □

4.2 Dualraum

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 4.2.1. $X^* := L(X, \mathbb{R})$ *heisst* **Dualraum** *von* X.

Notation: Für $x^* \in X^*$, $x \in X$ schreiben wir

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}.$$

Beachte, dass gemäss Beispiel 2.1.1 der Raum X^* stets ein Banachraum ist, unabhängig davon, ob dies für X gilt.

Wie "reichhaltig" ist X^*?

Satz 4.2.1. *Zu jedem $x \in X$ gibt es $x^* \in X^*$ mit*

$$\langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = ||x||_X^2 = ||x^*||_{X^*}^2.$$

Beweis. Betrachte $M = \operatorname{span}\{x\}$. Setze $f(tx) = t||x||_X^2$ mit $f \in L(M, \mathbb{R})$,

$$||f||_{L(M,\mathbb{R})} = \sup_{||tx||_X \le 1} |f(tx)| = ||x||_X.$$

Setze f gemäss Satz 4.1.3 fort zu $x^* \in L(X,\mathbb{R})$. Offenbar gilt

$$||x^*||_{X^*} = ||f||_{L(M,\mathbb{R})} = ||x||_X,\ \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = f(x) = ||x||_X^2.$$

□

Insbesondere erhalten wir die duale Charakterisierung der Norm.

Satz 4.2.2. *Es gilt*

i) $\forall x \in X\colon ||x||_X = \sup_{x^*\in X^*,\ ||x^*||_{X^*}\le 1} |\langle x^*, x\rangle|$;

ii) $\forall x^* \in X^*\colon ||x^*||_{X^*} = \sup_{x\in X,\ ||x||_X\le 1} |\langle x^*, x\rangle|$.

Das Supremum in i) wird stets sogar angenommen.

Beweis. i) OBdA sei $x \neq 0$; weiter dürfen wir wegen Homogenität annehmen, dass $||x||_X = 1$. Die Ungleichung $|\langle x^*, x\rangle| \le ||x||_X = 1$ für alle $x^* \in X^*$ mit $||x^*||_{X^*} \le 1$ folgt unmittelbar aus der Definition der Norm in X^*. Wählen wir weiter $x^* \in X^*$ gemäss Satz 4.2.1, erhalten wir $|\langle x^*, x\rangle| = 1$ und damit die Behauptung.

ii) Dies ist die Definition der Norm in X^*. □

Weiter kann man verschiedene Punkte $x \neq y$ in X durch ein $l \in X^*$ "trennen".

Satz 4.2.3. *Seien $x; y \in X$, $x \neq y$. Dann gibt es $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$.*

Beweis. Wähle l gemäss Satz 4.2.1 zum Vektor $y - x \in X$ mit

$$l(x-y) = l(x) - l(y) = ||x-y||_X^2 > 0.$$

□

Man kann sogar Punkte von (abgeschlossenen) Unterräumen trennen.

Satz 4.2.4. *Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $M \neq X$, und sei $x_0 \notin M$ mit*

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{x\in M} ||x_0 - x||_X > 0.$$

Dann gibt es $l \in X^*$ mit $l_{|_M} = 0$ und

$$||l||_{X^*} = 1,\ l(x_0) = d.$$

Beweis. Setze

$$M_0 = \{x + tx_0;\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}\},$$

und definiere die lineare Abbildung $f\colon M_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x + tx_0) = td.$$

Dann gilt: $f_{|_M} = 0$, $f(x_0) = d$.

Behauptung. $||f||_{L(M_0,\mathbb{R})} = 1$.

Beweis. Für $y = x + tx_0 \in M_0$ mit $t \neq 0$ gilt

$$|f(y)| = |t|\, d \le |t|\ ||x_0 - (\frac{-x}{t})||_X = ||tx_0 + x||_X = ||y||_X;$$

also $||f||_{L(M_0,\mathbb{R})} \leq 1$.

Umgekehrt wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $x = x_\varepsilon \in M$ mit

$$d \leq ||x_0 - x||_X < d + \varepsilon.$$

Es folgt für $y = x_0 - x \in M_0$

$$f(y) = d \geq \frac{d}{d+\varepsilon} ||y||_X; \tag{4.2.1}$$

das heisst

$$||f||_{L(M_0,\mathbb{R})} = \sup_{0 \neq y \in M_0} \frac{|f(y)|}{||y||_X} \geq \frac{d}{d+\varepsilon}.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Wähle $l = F$, die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.3. □

Bemerkung 4.2.1. Aus (4.2.1) folgt sogar für jedes $f \in X^*$ mit $f_{|_M} = 0$ und $|f(x_0)| =: d + 2\varepsilon > d$ die Abschätzung $||f||_{X^*} > 1$. Somit erfüllt das in Satz 4.2.4 konstruierte l die Bedingung

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = l(x_0) = \sup_{\substack{f_{|_M} = 0 \\ ||f||_{X^*} \leq 1}} |f(x_0)|;$$

das heisst, das Supremum wird für $f = l$ angenommen.

Sei $A \subset X$.

Definition 4.2.2. *Der* **Annihilator** *von A ist die Menge*

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f_{|_A} = 0\}.$$

Bemerkung 4.2.2. Offenbar gilt $A^\perp = \left(\overline{\operatorname{span}(A)}\right)^\perp$, wobei $\operatorname{span}(A)$ die lineare Hülle von A ist.

Satz 4.2.5. *Sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent*

i) $x_0 \in \overline{M}$;

ii) $\forall f \in M^\perp$: $f(x_0) = 0$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Sei $f \in M^\perp$, $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ mit $x_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $x_0 \notin \overline{M}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$ und $l_{|_{\overline{M}}} = 0$, also $l \in M^\perp$. □

Beispiel 4.2.1. Insbesondere gilt für jeden linearen Unterraum $M \subset X$:

$$\overline{M} = X \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}.$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Falls $\overline{M} = X$, so verschwindet gemäss Satz 4.2.5 jedes $f \in M^\perp$ an jeder Stelle $x_0 \in X$; also $M^\perp = \{0\}$.

"$\Leftarrow$": Falls $M^\perp = \{0\}$, so gilt gemäss Satz 4.2.5 die Aussage $x_0 \in \overline{M}$ für jedes $x_0 \in X$; also $\overline{M} = X$. □

Bemerkung 4.2.3. Zu $L \subset X^*$ sei

$$^\perp L = \{x \in X;\ \forall l \in L\colon l(x) = 0\}.$$

Dann gilt gemäss Satz 4.2.5 für jeden linearen Unterraum $M \subset X$ die Beziehung

$$^\perp(M^\perp) = \overline{M};$$

vergleiche Lemma 2.4.4.

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir den Dualraum eines normierten Raumes und dessen Trennungseigenschaften genauer.

4.3 Dualität im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum (über $\mathbb{R}$). Für $y \in H$ sei $j_y \in H^*$ die Abbildung

$$j_y(x) = (y, x)_H,\ x \in H.$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung

$$J\colon H \ni y \mapsto j_y \in H^*$$

erklärt.

Satz 4.3.1. *J ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Offenbar ist J linear. Weiter gilt für $y \in H$ mit Cauchy-Schwarz

$$||j_y||_{H^*} = \sup_{x\in H,\ ||x||_H\le 1} |j_y(x)| = \sup_{x\in H,\ ||x||_H\le 1} |(y,x)_H| \le ||y||_H.$$

Durch Einsetzen von $x = \frac{y}{||y||_H}$ erhält man sogar die Gleichheit der Norm. □

Tatsächlich ist J sogar ein Isomorphismus, insbesondere surjektiv.

Satz 4.3.2. *(Rieszscher Darstellungssatz) Zu jedem $l \in H^*$ gibt es genau ein $y \in H$ mit*

$$\forall x \in H\colon l(x) = (y, x)_H = j_y(x).$$

Beweis. OBdA sei $l \neq 0$; wegen Homogenität dürfen wir weiter annehmen, dass $||l||_{H^*} = 1$. Nach Definition der Operatornorm gibt es $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H mit

$$||y_k||_H = 1,\ l(y_k) \to ||l||_{H^*} = 1\ (k \to \infty).$$

Behauptung 1. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis. Benutze die Parallelogramm-Identität

$$\forall x, y \in H\colon ||x+y||_H^2 + ||x-y||_H^2 = 2(||x||_H^2 + ||y||_H^2).$$

Mit $x = y_j/2$, $y = y_k/2$ folgt

$$\forall j, k \in \mathbb{N}\colon ||\frac{y_j + y_k}{2}||_H^2 = 1 - ||\frac{y_j - y_k}{2}||_H^2. \tag{4.3.1}$$

Mit Fehler $o(1) \to 0$ $(j, k \to \infty)$ gilt somit

$$\begin{aligned} 1 + o(1) = \frac{1}{2}\big(l(y_j) + l(y_k)\big) &= l\big(\frac{y_j + y_k}{2}\big) \le ||l||_{H^*} ||\frac{y_j + y_k}{2}||_H \\ &= \sqrt{1 - ||\frac{y_j - y_k}{2}||_H^2}; \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{j,k\to\infty} ||y_j - y_k||_H = 0,$$

wie gewünscht. □

Da H vollständig, existiert $y = \lim_{k\to\infty} y_k \in H$, und $||y||_H = 1$.

Behauptung 2. $l = j_y$.

Beweis. Wegen Stetigkeit von l gilt

$$l(y) = \lim_{k\to\infty} l(y_k) = ||l||_{H^*} = 1 = ||y||_H^2 = j_y(y). \tag{4.3.2}$$

Sei

$$X = y^\perp = \{x \in H;\ (y, x)_H = 0\},$$

und sei $x \in X$ mit $||x||_H = 1$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$||y + \varepsilon x||_H^2 = ||y||_H^2 + 2\varepsilon(y, x)_H + \varepsilon^2 ||x||_H^2 = 1 + \varepsilon^2,$$

und die Vektoren

$$y_\varepsilon = \frac{y + \varepsilon x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

haben die Norm $||y_\varepsilon||_H = 1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Da für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$l(y_\varepsilon) \le 1 = l(y) = l(y_0),$$

folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(y_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(l(y) + \varepsilon l(x)) = l(x);$$

das heisst,

$$l_{|X} = 0 = j_{y|X}.$$

Da $H = span\{y\} + X$ nach Satz 2.4.1 folgt mit (4.3.2) die Behauptung. □

Offenbar ist y eindeutig bestimmt. Falls nämlich $l = j_y = j_z$, so folgt aus der Gleichheit $(y, x)_H = (z, x)_H$ für alle $x \in H$ bei Wahl von $x = y - z$, dass $y = z$. □

Mittels J können wir daher den Dualraum H^* von H mit H "identifizieren".

Bemerkung 4.3.1. i) Bedingung (4.3.1) besagt, dass die 1-Kugel in H **gleichmässig** strikt konvex ist.

ii) Variationelle Charakterisierung: Zu $l \in H^*$ sei $F\colon H \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{1}{2}(x,x)_H - l(x),\ x \in H.$$

Dann gilt für $y, z \in H$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$F(y+\varepsilon z) = F(y) + \varepsilon\big((y,z)_H - l(z)\big) + \frac{\varepsilon^2}{2}(z,z)_H;$$

also

$$j_y = l \Leftrightarrow F(y) = \min_{x \in H} F(x).$$

Eine wichtige Anwendung von Satz 4.3.2 liefert der folgende Satz.

Satz 4.3.3. *(Lax-Milgram) Sei $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear und stetig mit*

$$\forall x, y \in H\colon\ |a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H ||y||_H.$$

Mit einer Konstanten $\lambda > 0$ gelte weiter

$$\forall x \in H\colon a(x,x) \ge \lambda ||x||_H^2.$$

Dann gibt es eine stetige Bijektion $A \in L(H)$ mit

$$\forall x, y \in H\colon a(x,y) = (Ax, y)_H,$$

und es gilt

$$||A||_{L(H)} \le \Lambda,\ ||A^{-1}||_{L(H)} \le \lambda^{-1}.$$

Bemerkung 4.3.2. Die Bilinearform a muss nicht symmetrisch sein.

Beweis. Für alle $x \in H$ ist

$$l_x\colon y \mapsto a(x,y)$$

linear und

$$||l_x||_{H^*} = \sup_{y \in H,\ ||y||_H \le 1} |a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H < \infty.$$

Nach Satz 4.3.2 existiert $Ax := J^{-1} l_x \in H$ mit

$$\forall y \in H\colon a(x,y) = l_x(y) = (Ax, y)_H.$$

Offenbar ist A linear und wegen

$$||Ax||_H = ||l_x||_{H^*} \le \Lambda ||x||_H$$

gilt $A \in L(H)$, $||A||_{L(H)} \le \Lambda$.

Behauptung 1. A ist injektiv mit $||Ax||_H \geq \lambda ||x||_H$, $x \in H$.

Beweis. Für $x \in H$ gilt

$$(Ax, x)_H = a(x, x) \geq \lambda ||x||_H^2.$$

Mit

$$(Ax, x)_H \leq ||Ax||_H ||x||_H$$

folgt

$$||Ax||_H \geq \lambda ||x||_H;$$

insbesondere erhalten wir $Ax \neq 0$, falls $x \neq 0$. □

Behauptung 2. $im(A) = A(H)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H mit

$$Ax_k \to y \quad (k \to \infty).$$

Mit Behauptung 1 folgt

$$||x_k - x_l||_H \leq \lambda^{-1} ||A(x_k - x_l)||_H = \lambda^{-1} ||Ax_k - Ax_l||_H \to 0 \quad (k, l \to \infty).$$

Sei $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Da $A \in L(H)$, erhalten wir

$$Ax = \lim_{k\to\infty} Ax_k = y;$$

das heisst, $im(A)$ ist abgeschlossen. □

Behauptung 3. A ist surjektiv.

Beweis. Sei widerspruchsweise $M := im(A) \neq H$. Wähle $0 \neq y \in M^\perp$ gemäss Satz 2.4.1. Da $Ay \in M$, folgt mit

$$0 < \lambda ||y||_H^2 \leq a(y, y) = (Ay, y)_H = 0$$

der gewünschte Widerspruch. □

Somit ist A bijektiv, und nach Satz 3.2.1.ii) (Satz von der offenen Abbildung) gilt $A^{-1} \in L(H)$.

Zur Abschätzung der Norm sei $x \in H$. Setze $z = A^{-1}x$. Mit Behauptung 1 erhalten wir

$$||A^{-1}x||_H = ||z||_H \leq \lambda^{-1} ||Az|| = \lambda^{-1} ||x|| \ .$$

Da $x \in H$ beliebig gewählt war, folgt

$$||A^{-1}||_{L(H)} \leq \lambda^{-1},$$

wie gewünscht. □

Korollar 4.3.1. *Sei $a \colon H \times H \to \mathbb{R}$ wie in Satz 4.3.3, und sei $l \in H^*$. Dann gibt es genau ein $x \in H$ mit*

$$\forall y \in H \colon a(x, y) = l(y),$$

und

$$||x||_H \leq \lambda^{-1} ||l||_{H^*}.$$

Beweis. Setze $x = A^{-1}J^{-1}l$, mit A wie in Satz 4.3.3. Es gilt

$$\forall y \in H\colon a(x, y) = (Ax, y)_H = (J^{-1}l, y)_H = l(y),$$

und

$$||x||_H \le ||A^{-1}||_{L(H)}||l||_{H^*} \le \lambda^{-1}||l||_{H^*}$$

nach Satz 4.3.2 und Satz 4.3.3. □

4.4 Der Dualraum von $L^p(\Omega), 1 \le p < \infty$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$ für ein Radonmass μ auf $\mathbb{R}^n$, q der zu p konjugierte Exponent $1 < q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir formulieren den Hauptsatz dieses Abschnittes.

Satz 4.4.1. *$L^p(\Omega)^*$ ist isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$.*

Zum Beweis konstruieren wir eine lineare Isometrie $J\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ und zeigen anschliessend mit Hilfe der gleichmässigen Konvexität der Norm in $L^p(\Omega)$ analog zu unserem Vorgehen im Beweis von Satz 4.3.2 deren Surjektivität.

Für $g \in L^q(\Omega)$ sei $l_g \in L^p(\Omega)^*$ die lineare Abbildung

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega fg\, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Stetigkeit von l_g folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$|l_g(f)| = \left|\int_\Omega fg\, d\mu\right| \le ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}. \tag{4.4.1}$$

Lemma 4.4.1. *$J\colon L^q(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in L^p(\Omega)^*$ ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Offenbar ist J linear. Weiter folgt aus (4.4.1) die Abschätzung

$$||l_g||_{L^p(\Omega)^*} = \sup_{||f||_{L^p} \le 1} \left|\int_\Omega fg\, d\mu\right| \le ||g||_{L^q(\Omega)};$$

das heisst, J ist stetig mit

$$||J||_{L(L^q(\Omega); L^p(\Omega)^*)} \le 1.$$

i) Sei $1 < p < \infty$. In diesem Fall ist $q < \infty$, und es gilt $p = \frac{q}{q-1}$. Zu $g \in L^q(\Omega)$ wähle $f = g\,|g|^{q-2} \in L^p(\Omega)$ als Vergleichsfunktion mit $||f||_{L^p(\Omega)} = ||g||^{q-1}_{L^q(\Omega)}$. Dies ergibt

$$|l_g(f)| = \int_\Omega |g|^q\, d\mu = ||g||^q_{L^q} \le ||l_g||_{L^{p*}}||f||_{L^p} = ||l_g||_{L^{p*}}||g||^{q-1}_{L^q};$$

das heisst

$$||l_g||_{L^{p*}} \ge ||g||_{L^q},$$

also
$$||l_g||_{L^{p*}} = ||g||_{L^q}.$$

ii) Betrachte nun $p = 1$, $q = \infty$. Sei $g \in L^\infty(\Omega)$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $x \in \Omega$ Lebesguepunkt von g mit

$$|g(x)| = \lim_{r\to 0} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g\,d\mu \right| \geq ||g||_{L^\infty} - \varepsilon.$$

Wähle $r > 0$ mit $r < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ und

$$\alpha := \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g\,d\mu \right| \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Setze $f = \frac{1}{\mu(B_r(x))}\chi_{B_r(x)} \in L^1(\Omega)$. Beachte

$$||f||_{L^1} = 1,\ |l_g(f)| = \alpha \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Es folgt
$$||l_g||_{L^{1*}} \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$
Nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$||l_g||_{L^{1*}} \geq ||g||_{L^\infty}$$

und damit
$$||l_g||_{L^{1*}} = ||g||_{L^\infty},$$
wie gewünscht. □

Lemma 4.4.2. *J ist surjektiv.*

Beweis. i) Betrachte zunächst den Fall $1 < p < \infty$. Sei $l \in L^p(\Omega)^*$. Wähle eine "Maximalfolge" $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $||f_k||_{L^p} = 1$ und

$$l(f_k) \to ||l||_{L^{p*}} \quad (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir annehmen $||l||_{L^{p*}} = 1$.

Behauptung 1. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich genau gleich wie Behauptung 1 im Beweis von Satz 4.3.2 aus dem folgenden Satz 4.4.2 über die gleichmässige Konvexität von $L^p(\Omega)$. (Einen Beweis findet man zum Beispiel in Adams: *Sobolev spaces*, 2.29 Corollary.) □

Satz 4.4.2. *Sei $1 < p < \infty$, und seien $u, v \in L^p(\Omega)$, mit $||u||_{L^p} = ||v||_{L^p} = 1$ und $\varepsilon := ||u - v||_{L^p} > 0$.*

i) Falls $2 \leq p < \infty$, so gilt

$$||\frac{u+v}{2}||_{L^p} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p};$$

ii) Falls $1 < p \le 2$, *so gilt mit* $q = \frac{p}{p-1}$

$$||\frac{u+v}{2}||_{L^p} \le \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existiert

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k \in L^p(\Omega),$$

und es gilt

$$||f||_{L^p} = 1,\ l(f) = ||l||_{L^{p*}} = 1.$$

Setze $g = f\,|f|^{p-2} \in L^q(\Omega)$ mit $||g||_{L^q} = 1$.

Behauptung 2. $l = l_g$.

Beweis. Für $\varphi \in L^p(\Omega)$, $|\varepsilon| \ll 1$ sei

$$f_\varepsilon = \frac{f + \varepsilon\varphi}{||f+\varepsilon\varphi||_{L^p}},\ ||f_\varepsilon||_{L^p} = 1.$$

Da $l(f_\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ maximal, folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(f_\varepsilon) = l(\varphi) - l(f)\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f+\varepsilon\varphi||_{L^p},$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f+\varepsilon\varphi||_{L^p} &= \frac{1}{p}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_\Omega |f+\varepsilon\varphi|^p\,d\mu \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}|f+\varepsilon\varphi|^p\,d\mu = \int_\Omega \varphi f\,|f|^{p-2}\,d\mu = \int_\Omega \varphi g\,d\mu;\end{aligned}$$

das heisst,

$$\forall\varphi \in L^p(\Omega)\colon l(\varphi) = l(f)l_g(\varphi) = l_g(\varphi).$$

$\square$

ii) Sei nun $p = 1$. Zur Vereinfachung nehmen wir an $\mu = \mathcal{L}^n$ und $\mu(\Omega) < \infty$. Sei $l \in L^1(\Omega)^*$. Da $\mu(\Omega) < \infty$, liefert die Höldersche Ungleichung für alle $s > 1$ die topologische Einbettung $i_s\colon L^s(\Omega) \to L^1(\Omega)$ mit

$$||i_s||_{L(L^s,L^1)} \le (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{s}} \underset{(s\to1)}{\to} 1,$$

also auch $l = l \circ i_s \in L^s(\Omega)^*$ mit

$$\limsup_{s\to1} ||l||_{L^s(\Omega)^*} \le ||l||_{L^1(\Omega)^*}.$$

Nach i) besitzt l als Element von $L^s(\Omega)^*$ eine Darstellung $l = l_g$ mit $g = g_r \in L^r(\Omega)$, wobei $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$; insbesondere gilt

$$l(\varphi) = l_{g_r}(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_r\,d\mu,\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Es folgt für $1 < s < s'$ und zugehörige $1 < r' < r < \infty$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega \varphi g_r \, d\mu = l(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_{r'} \, d\mu,$$

insbesondere

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega (g_r - g_{r'})\varphi \, d\mu = 0.$$

Mit Satz 3.4.3 erhalten wir $g_r = g_{r'} =: g \in \bigcap_{r<\infty} L^r(\Omega)$ mit

$$||g||_{L^r} = ||g_r||_{L^r} = ||l_{g_r}||_{L^{s*}} = ||l||_{L^{s*}}$$

für alle $s > 1$ und zugehörige r, wobei $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Mit $s \downarrow 1$ folgt $r \uparrow \infty$ und

$$\limsup_{r\to\infty} ||g||_{L^r} = \limsup_{s\to 1} ||l||_{L^{s*}} \le ||l||_{L^{1*}};$$

das heisst, $g \in L^\infty(\Omega)$, und $l = l_g$.

Für eine allgemeine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erhält man die Aussage des Lemmas indem man $\Omega \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ überdeckt mit offenen Mengen $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ von endlichem Mass, $k \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 4.4.1. i) Alternativ kann man Lemma 4.4.2 mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym beweisen.

ii) Analog zu Bemerkung 4.3.1 lässt sich zu $l \in L^p(\Omega)^*$ ein $g \in L^q(\Omega)$ mit $l = l_g$ auch variationell charakterisieren: Sei dazu $E\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$E(f) = \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p - l(f),\ f \in L^p(\Omega).$$

Falls dann $f \in L^p(\Omega)$ mit

$$E(f) = \min_{h\in L^p(\Omega)} E(h),$$

so gilt für $\varphi \in L^p(\Omega)$:

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E(f + \varepsilon\varphi) = \int_\Omega f|f|^{p-2}\varphi \, dx - l(\varphi);$$

also

$$l = l_g \quad \text{mit } g = f|f|^{p-2} \in L^q(\Omega).$$

Bemerkung 4.4.2. Falls $\mu = \mathcal{L}^n$, so gilt $L^1(\Omega) \neq L^\infty(\Omega)^*$, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.4.1. Sei $x_0 \in \Omega$, und sei $\delta_{x_0}\colon C^0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ das Dirac-Funktional

$$\forall f \in C^0(\overline{\Omega})\colon \delta_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Sei l eine Fortsetzung von δ_{x_0} auf $L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.1.3. Dann gilt

$$\forall g \in L^1(\Omega)\colon l \neq l_g.$$

Beweis. Nimm an, $l = l_g$ für ein $g \in L^1(\Omega)$. OBdA sei $x_0 = 0$, $B_1(0) \subset \Omega$. Fixiere $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi \equiv 1 \text{ auf } B_{1/2}(0).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx) \in C_c^\infty(B_1(0)) \subset C^0(\overline{\Omega})$$

mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$ μ-fast überall. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$1 = \delta_{x_0}(\varphi_k) = l(\varphi_k) = l_g(\varphi_k) = \int_\Omega g\varphi_k\,dx \to 0\ (k \to \infty).$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch. □

Bemerkung 4.4.3. Für $\mu = \mathcal{L}^n$ und jedes $g \in L^1(\Omega)$ gilt $l_g \ll \mu \perp \delta$.

4.5 Trennungssätze für konvexe Mengen, Extremalpunkte

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz 4.5.1. *(Trennungssatz) Seien $A, B \subset X$ nicht leer, disjunkt und konvex. Dann gilt:*

i) Falls A offen ist, so gibt es $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall a \in A, b \in B\colon l(a) < \lambda \leq l(b).$$

ii) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{a\in A} l(a) < \lambda < \inf_{b\in B} l(b).$$

Bemerkung 4.5.1. Gemäss Satz 4.5.1 kann man disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene $H = \{x \in X;\ l(x) = \lambda\}$ trennen.

Beweis von Satz 4.5.1. i) Fixiere $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Setze $x_0 = b_0 - a_0$. Dann ist die Menge $C := A - B + x_0$ konvex, offen und nicht leer mit $0 \in C$. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt weiter $x_0 \notin C$.

Wähle $R > 0$ mit $B_R(0) \subset C$. Sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ das **Minkowski-Funktional** mit

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda C\}.$$

Behauptung 1. Die Funktion p ist sublinear.

Beweis. Die positive Homogenität von p ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Seien weiter $x = \lambda u$, $y = \mu v$ mit $u, v \in C$ und $\lambda, \mu > 0$. Da C konvex,

gilt
$$z := \frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu} \in C,$$
und $p(z) \leq 1$. Mit positiver Homogenität von p folgt
$$p(x+y) = p(\lambda u + \mu v) = p(z)(\lambda + \mu) \leq \lambda + \mu.$$
Nach Übergang zum Infimum bezüglich λ und μ erhalten wir schliesslich
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),$$
wie gewünscht. $\square$

Da für jedes $x \in X$ mit $\lambda = 2R^{-1}||x||_X$ trivialerweise gilt
$$x \in B_{\lambda R}(0) \subset \lambda C,$$
folgt mit der Konstanten $M = 2R^{-1}$ die Abschätzung
$$\forall x \in X\colon p(x) \leq M||x||_X.$$
Da C offen, gilt $C = \{x;\ p(x) < 1\}$. Weiter erhalten wir aus $x_0 \notin C$, dass
$$p(x_0) \geq 1.$$
Definiere $f\colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Beachte
$$\forall t \geq 0\colon f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0),$$
$$\forall t < 0\colon f(tx_0) = t < 0 \leq p(tx_0).$$
Sei l die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.1 mit $l(tx_0) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und mit
$$\forall x \in X\colon l(x) \leq p(x).$$
Für alle $x \in X$ gilt dann
$$|l(x)| = \max\{l(x), l(-x)\} \leq \max\{p(x), p(-x)\} \leq M||x||_X;$$
also $l \in X^*$. Weiter gilt für $a \in A$, $b \in B$
$$l(a) - l(b) = l(a - b + x_0) - l(x_0) < 0,$$
da $l(x_0) = 1$ und da $l(x) \leq p(x) < 1$ für $x = a - b + x_0 \in C$. Es folgt
$$\sup\{l(x);\ x \in A\} \leq \inf\{l(b);\ b \in B\} =: \lambda$$
Da A offen, $l \neq 0$, wird $\sup\{l(x);\ x \in A\}$ an keiner Stelle $a_0 \in A$ angenommen. Sonst hätte für beliebiges $x \in X$ die Funktion $t \mapsto f(t) = l(a_0 + tx)$ an der Stelle $t = 0$ ein inneres Maximum, und $f'(0) = l(x) = 0$, $x \in X$. Es folgt
$$l(a) < \sup\{l(x);\ x \in A\} \leq \lambda,\ a \in A.$$

ii) Mit der folgenden Beobachtung lässt sich ii) auf i) zurückführen.

Behauptung 2. Seien A, B wie in ii). Dann gibt es $r > 0$ mit $U_r(A) \cap B = \emptyset$, wobei

$$U_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

offen, konvex und nicht leer.

Beweis. Offenbar ist $U_r(A)$ für jedes $r > 0$ offen, konvex und nicht leer, da $A \neq \emptyset$. Nimm an, für $r_k \downarrow 0$ gibt es $a_k \in A$, $b_k \in B_{r_k}(a_k) \cap B$, $k \in \mathbb{N}$. Da A kompakt, konvergiert eine Teilfolge $a_k \to a$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$, wobei $a \in A$. Da B abgeschlossen, und

$$||b_k - a||_X \leq ||b_k - a_k||_X + ||a_k - a||_X \leq r_k + ||a_k - a||_X \overset{(k\to\infty)}{\to} 0,$$

folgt andererseits $a = \lim_{k\to\infty} b_k \in B$; also $A \cap B \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme. □

Wähle nun $r > 0$ wie in Behauptung 2, $l \in X^*$ gemäss i) zu $A' = U_r(A)$ und B. Da A kompakt, wird $\sup_{a\in A} l(a)$ in einem Punkt $a_0 \in A$ angenommen. Da $l \neq 0$, folgt jedoch $l(a_0) < \sup_{x \in B_r(a_0)} l(x)$ wie in i), und wir erhalten

$$\max_{a\in A} l(a) = l(a_0) < \sup_{x\in B_r(a_0)} l(x) \leq \sup_{x \in U_r(A)} l(x) \leq \inf_{b\in B} l(b),$$

wie gewünscht. □

Beispiel 4.5.1. Für die konvexe Menge $C = B_1(0; X)$ erhält man offenbar das Minkowski-Funktional $p(x) = \|x\|_X$, $x \in X$.

Sei $K \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $M \subset K$.

Definition 4.5.1. *i) M heisst* **extremale Teilmenge von** K*, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in K$ und $0 < \alpha < 1$ gilt*

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M \Rightarrow x_0, x_1 \in M.$$

ii) Falls $M = \{x\}$ extremal, so heisst x ein **extremaler Punkt von** K .

Beispiel 4.5.2. i) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $||\cdot||_X$ die euklidische Norm, K die Vollkugel $K = \overline{B_1(0)} = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist jeder Randpunkt von K extremal.

ii) Sei $X = \mathbb{R}^2$, versehen mit der Norm

$$||(x,y)||_X = \max\{|x|, |y|\},$$

und sei K die Menge

$$K = \overline{B_1(0)} = \{(x,y);\ -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

Dann sind die Seiten von K extremal, zum Beispiel

$$F = \{(x,1);\ -1 \leq x \leq 1\}.$$

Die Extremalpunkte von K sind genau die Punkte $(\pm 1, \pm 1)$.

Lemma 4.5.1. *Sei $M \subset K$ extremale Teilmenge von K, $L \subset M$ extremale Teilmenge von M. Dann ist L extremale Teilmenge von K.*

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$ und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in L.$$

Da $L \subset M$, gehört x_α zu M; da weiter M extremal in K ist, folgt $x_0, x_1 \in M$. Da schliesslich L extremal in M, liegen x_0 und x_1 sogar in L; also ist L extremal in K. □

Lemma 4.5.2. *Sei $K \subset X$ kompakt, $l \in X^*$, $\lambda = \min_{x \in K} l(x)$. Dann ist*

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}$$

extremale Teilmenge von K.

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$, und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in K_\lambda;$$

das heisst,

$$l(x_\alpha) = \alpha l(x_1) + (1-\alpha)l(x_0) = \lambda.$$

Da $l(x_0) \geq \lambda$, $l(x_1) \geq \lambda$, folgt $l(x_0) = \lambda = l(x_1)$; also $x_0, x_1 \in K_\lambda$. □

Satz 4.5.2. *(Krein-Milman) Sei $K \subset X$ kompakt und nicht leer. Dann besitzt K einen extremalen Punkt.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ die Familie

$$\mathcal{M} = \{M \subset K;\ \emptyset \neq M \text{ kompakt und extremal in } K\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$\forall L, M \in \mathcal{M}\colon L \leq M :\Leftrightarrow M \subset L.$$

Wir verifizieren die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas.

Offenbar gilt $K \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sei $(M_\iota)_{\iota \in I}$ linear geordnete Teilmenge in $\mathcal{M}$. Setze $M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$. Dann ist M kompakt und nicht leer.

Behauptung 1. $M \in \mathcal{M}$.

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$, und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota.$$

Dann gilt $x_\alpha \in M_\iota$ für beliebiges $\iota \in I$. Da M_ι extremal in K, folgt $x_0, x_1 \in M_\iota$ für alle ι; das heisst, $x_0, x_1 \in M$, und M ist extremal. □

Da offenbar $M \subset M_\iota$ für alle $\iota \in I$, ist M eine obere Schranke für $(M_\iota)_{\iota \in I}$ bezüglich der oben definierten Ordnung. Gemäss dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $M \in \mathcal{M}$. Insbesondere $M \neq \emptyset$. Sei $x \in M$.

Behauptung 2. $M = \{x\}$.

Beweis. (indirekt) Nimm an, $y \neq x$ sei ein weiteres Element von M. Wähle $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$ gemäss Satz 4.2.3. Setze $\lambda = \min_{m \in M} l(m)$. Gemäss Lemma 4.5.2 ist

$$M_\lambda = \{m \in M;\ l(m) = \lambda\} \subset M$$

extremal in M, nach Lemma 4.5.1 also auch in K. Weiter gilt $M_\lambda \neq \emptyset$, und M_λ ist kompakt, also $M_\lambda \in \mathcal{M}$. Schliesslich gilt $M_\lambda \subset M$; jedoch $M_\lambda \neq M$, da wegen $l(x) \neq l(y)$ entweder $x \notin M_\lambda$ oder $y \notin M_\lambda$, im Widerspruch zur Maximalität von M. □

Offenbar folgt die Aussage des Satzes aus den Behauptungen 1 und 2. □

Definition 4.5.2. *Für $A \subset X$ sei*

$$\overline{\text{conv}}(A) = \bigcap_{A \subset B;\ B \text{ konvex und abgeschlossen}} B$$

die abgeschlossene **konvexe Hülle** *von A.*

Bemerkung 4.5.2. Offenbar ist der Durchschnitt konvexer Mengen konvex.

Satz 4.5.3. *(Krein-Milman) Sei K kompakt und konvex, $E \subset K$ die Menge der Extremalpunkte von K. Dann gilt $K = \overline{\text{conv}}(E)$.*

Beweis. Da K nach Annahme abgeschlossen und konvex, gilt $K \supset \overline{\text{conv}}(E)$. Die noch fehlende Inklusion beweisen wir indirekt. Sei $x_0 \in K \setminus \overline{\text{conv}}(E)$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1.ii) mit $A = \{x_0\}$, $B = \overline{\text{conv}}(E)$ und

$$\inf_{x \in \overline{\text{conv}}(E)} l(x) > l(x_0) \geq \min_{x \in K} l(x) =: \lambda. \tag{4.5.1}$$

Setze

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}.$$

Da $K \neq \emptyset$, folgt $K_\lambda \neq \emptyset$, und K_λ ist kompakt und gemäss Lemma 4.5.2 zudem extremal in K. Nach Satz 4.5.2 besitzt K_λ einen extremalen Punkt y_0. Da K_λ extremal, ist y_0 gemäss Lemma 4.5.1 extremal auch in K; also $y_0 \in E \subset \overline{\text{conv}}(E)$, im Widerspruch zu (4.5.1). □

4.6 Schwache Konvergenz und Konvexität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normiert mit Dualraum X^*, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, und sei $x \in X$.

Definition 4.6.1. *Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$* **konvergiert schwach gegen** *x, oder $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$, falls für alle $l \in X^*$ gilt:*

$$l(x_k) \to l(x) \quad (k \to \infty).$$

Beispiel 4.6.1. $l^2 \ni e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \xrightarrow{w} 0 \quad (i \to \infty)$.

Bemerkung 4.6.1. i) Wegen Satz 4.2.3 ist der schwache Limes x einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt. Wir schreiben daher $x = w - \lim_{k\to\infty} x_k$.

ii) Falls $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, so auch $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$.

Satz 4.6.1. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$. Dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Weiter gilt*

$$||x||_X \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

Das heisst, die Funktion $x \mapsto \|x\|_X$ ist schwach folgen-unterhalb-stetig.

Beweis. Die Abbildungen $A_k \in L(X^*, \mathbb{R})$ mit

$$A_k(l) = l(x_k),\ l \in X^*,\ k \in \mathbb{N},$$

sind punktweise beschränkt. Da X^* vollständig ist, folgt mit Satz 4.2.2 und Satz 3.1.1 die gleichmässige Beschränkheit der Normen

$$||x_k||_X = \sup_{l\in X^*,\ ||l||_{X^*}\leq 1} |l(x_k)| = ||A_k||_{L(X^*,\mathbb{R})} \leq C < \infty.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.2 mit

$$||l||_{X^*} = 1,\ l(x) = ||x||_X.$$

Es folgt

$$||x||_X = l(x) = \liminf_{k\to\infty} l(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

□

Definition 4.6.2. *Die von den Mengen*

$$\Omega_{l,U} = l^{-1}(U),\ l \in X^*,\ U \subset \mathbb{R} \textit{ offen}$$

induzierte Topologie τ_w heisst **schwache Topologie** *auf X.*

Bemerkung 4.6.2. i) τ_w besteht aus beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen $\Omega_{l,U}$ wie in der obigen Definition.

ii) Offenbar ist die schwache Konvergenz die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie.

iii) Falls $\dim(X) = \infty$, so ist die schwache Topologie nicht metrisierbar; das heisst, sie wird von keiner Metrik auf X induziert. Man muss daher zum Beispiel zwischen den Begriffen "schwach abgeschlossenen" und "schwach folgen-abgeschlossen" unterscheiden; vergleiche Lemma 4.6.2. Jedoch ist die schwache Topologie wegen Satz 4.2.3 Hausdorffsch.

iv) Da $l \in X^*$ stetig, ist jedes $\Omega_{l,U}$ auch offen in der Standardtopologie τ; das heisst, $\tau_w \subset \tau$.

Für $\Omega \subset X$ sei

$$\overline{\Omega}_w = w - \mathrm{clos}(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subset A;\ A \text{ schwach abgeschlossen}} A$$

die schwach abgeschlossene Hülle von Ω.

Lemma 4.6.1. *i)* $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_w$.

ii) Falls $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$ *für* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$, *so folgt* $x \in \overline{\Omega}_w$.

Beweis. i) Nach Bemerkung 4.6.2.iii) gilt $\tau_w \subset \tau$; eine schwach abgeschlossene Menge ist somit auch (stark) abgeschlossen. Es folgt

$$\overline{\Omega}_w = \bigcap_{\Omega \subset A;\ A \text{ schwach abgeschlossen}} A \supset \bigcap_{\Omega \subset A;\ A \text{ abgeschlossen}} A = \overline{\Omega}.$$

ii) Falls $x \notin \overline{\Omega}_w$, so gibt es $U = \bigcap_{j=1}^{J} l_j^{-1}(I_j) \in \tau_w$ mit geeigneten $l_j \in X^*$ und offenen Mengen $I_j \subset \mathbb{R}$, $1 \le j \le J$, so dass $\Omega \cap U = \emptyset$ und $x \in U$. Jedoch folgt mit $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$ insbesondere $l_j(x_k) \to l_j(x)$ $(k \to \infty)$ für jedes j, also $x_k \in \Omega \cap U$ für genügend grosses k, im Widerspruch zur Wahl von U. □

Definition 4.6.3. *Eine Menge* $A \subset X$ *heisst* **schwach folgenabgeschlossen** *(w.s.c.: weakly sequentially closed), falls für alle* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ *gilt*

$$x_k \xrightarrow{w} x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Lemma 4.6.2. *Für* $A \subset X$ *gilt:*

i) A *schwach abgeschlossen* $\Rightarrow$ A *schwach folgenabgeschlossen.*

ii) A *schwach folgenabgeschlossen* $\Rightarrow$ A *abgeschlossen.*

Beweis. i) Sei A schwach abgeschlossen, und sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $x_k \xrightarrow{w} x$ für $k \to \infty$. Mit Lemma 4.6.1.ii) folgt $x \in \overline{A}_w = A$.

ii) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, also auch $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$ gemäss Bemerkung 4.6.1.ii). Ist A schwach folgenabgeschlossen, so gilt $x \in A$, und mit Satz 1.2.2 ist A abgeschlossen. □

Beispiel 4.6.2. i) Die 1-Sphäre in l^2 ist abgeschlossen, aber nach Beispiel 4.6.1 ist sie nicht schwach folgenabgeschlossen. Dies zeigt, dass die Umkehrung der Aussage von Lemma 4.6.2.ii) nicht gilt.

ii) Auch die Umkehrung der Aussage i) von Lemma 4.6.2 gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei $e_n \in l^2$, $n \in \mathbb{N}$, wie in Beispiel 4.6.1, und sei

$$S = \{\sqrt{n} e_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subset l^2.$$

Dann ist S w.s.c., da jede schwach konvergente Folge in S nach Satz 4.6.1 beschränkt ist und daher nur endlich viele verschiedene Elemente von S enthalten kann.

Andererseits gilt $0 \in \overline{S}_w$. Sei dazu

$$U(0, a_1, \ldots, a_k, \varepsilon) = \{x \in l^2\,;\, |(x, a_i)_{l^2}| < \varepsilon,\, 1 \le i \le k\}$$

mit $a_1, \ldots, a_k \in l^2$ und $\varepsilon > 0$ ein beliebiges Element der Umgebungsbasis von $0 \in l^2$ in der schwach offenen Topologie.

Da für jedes $1 \le i \le k$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(a_i, e_n)_{l^2}|^2 \le \|a_i\|^2 < \infty,$$

konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} |(a_i, e_n)_{l^2}|^2$. Da die harmonische Reihe hingegen divergiert, existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} |(a_i, e_n)_{l^2}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}.$$

Für dieses $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$|(a_i, e_n)_{l^2}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ 1 \le i \le k;$$

also $\sqrt{n} e_n \in U(0, a_1, \ldots, a_k, \varepsilon)$. Somit hat jedes Element der Basis der schwach offenen Topologie um 0 einen nicht leeren Durchschnitt mit S, und $0 \in \bar{S}_w$. Also ist S nicht schwach abgeschlossen,

(Mit Dank an Lukas Pierce, der eine Version dieses Beispiels mit der Suchanfrage "https://math.stackexchange.com/questions/2862610/does-weakly-sequentially-closed-imply-weakly-closed" unter der Referenz "@mechanodroid" gefunden hat.)

Satz 4.6.2. *Sei $\Omega \subset X$ konvex. Dann gilt $\overline{\Omega}_w = \overline{\Omega}$.*

Beweis. (indirekt). Nimm an $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_w$. Gemäss Lemma 4.6.1.i) gibt es dann $x_0 \in \overline{\Omega}_w \setminus \overline{\Omega}$. Setze $A = \{x_0\}$, $B = \overline{\Omega}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1 mit

$$l(x_0) < \inf_{x \in B} l(x) \le \inf_{x \in \Omega} l(x).$$

Es folgt $x_0 \notin \overline{\Omega}_w$ im Widerspruch zur Wahl von x_0. □

Satz 4.6.3. *(Mazur's lemma) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$. Dann gibt es eine Folge von konvexen Linearkombinationen*

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k,\ 0 \le a_{kl} \le 1,\ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1,\ l \in \mathbb{N},$$

so dass

$$y_l \to x \quad (l \to \infty).$$

Beweis. Setze $K = \overline{\mathrm{conv}}(\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\})$. Nach Satz 4.6.2 gilt $K = \overline{K} = \overline{K}_w$; mit Lemma 4.6.1.ii) folgt $x \in K$. □

Bemerkung 4.6.3. Die schwache Topologie τ_w und τ unterscheiden sich nur, falls $\dim X = \infty$; in diesem Fall enthält mit den Mengen $\Omega_{l,U}$ auch jede schwach offene Menge einen nicht trivialen affinen Unterraum. Eine Konsequenz daraus sieht man im nachstehenden Beispiel.

Beispiel 4.6.3. Sei $\dim X = \infty$. Der schwache Abschluss der Menge

$$A = \{x \in X;\ ||x||_X = 1\}.$$

ist die Vollkugel

$$\overline{A}_w = \overline{B_1(0;X)} = \{x \in X;\ ||x||_X \le 1\}.$$

Beweis. Nach Satz 4.6.2 gilt $\overline{A}_w \subset \overline{\mathrm{conv}(A)} = \overline{B_1(0;X)}$. Zum Beweis der ungekehrten Inklusion sei $x \in X$ mit $||x||_X < 1$, $\Omega \in \tau_w$ eine Umgebung von x. Nach Bemerkung 4.6.3 enthält Ω einen nicht trivialen affinen Unterraum durch x; jeder derartige Raum schneidet jedoch A. Insbesondere folgt $\Omega \cap A \neq \emptyset$, und $x \in \overline{A}_w$; also $B_1(0;X) \subset \overline{A}_w$, und die Behauptung folgt. $\square$

Kapitel 5

Reflexivität, Separabilität und Schwache Kompaktheit

5.1 Reflexivität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*.

Definition 5.1.1. *Der Raum* $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$ *heisst* **Bidualraum von** X.

Wir können X in kanonischer Weise in X^{**} einbetten mittels $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, wobei

$$\forall l \in X^*,\ x \in X\colon (\mathcal{I}x)(l) := l(x). \tag{5.1.1}$$

Satz 5.1.1. $\mathcal{I}$ *ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Offenbar ist $\mathcal{I}$ linear. Wie im Beweis von Satz 4.6.1 folgt zudem mit Satz 4.2.2 für jedes $x \in X$ die Identität

$$||x||_X = \sup_{l \in X^*,\ ||l||_{X^*} \le 1} |l(x)| = ||\mathcal{I}x||_{X^{**}}\ .$$

□

Definition 5.1.2. X *heisst* **reflexiv**, *falls die durch* (5.1.1) *definierte Abbildung* $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$ *surjektiv ist.*

Beispiel 5.1.1. i) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind (wegen der Rangformel) reflexiv (für eine beliebige Norm).

ii) Jeder Hilbert-Raum $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ist reflexiv.

iii) $L^p(\Omega)$ ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$.

iv) $L^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Beweis. ii) Sei $J\colon H \to H^*$ die in Abschnitt 4.3 konstruierte Isometrie mit

$$\forall y \in H\colon J(x)(y) = (x, y)_H. \tag{5.1.2}$$

H^* ist wiederum Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\forall l = J(x),\ k = J(y) \in H^*\colon (l, k)_{H^*} := (J(x), J(y))_{H^*} = (x, y)_H. \tag{5.1.3}$$

Sei $J^*\colon H^* \to H^{**}$ der isometrische Isomorphismus analog zu (5.1.2). Dann gilt $\mathcal{I} = J^* \circ J$, denn für alle $x, y \in H$, $l = J(x) \in H^*$ gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}y)(l) = (\mathcal{I}y)(J(x)) &\overset{(5.1.1)}{=} J(x)(y) \overset{(5.1.2)}{=} (x, y)_H \overset{(5.1.3)}{=} (J(x), J(y))_{H^*} \\ &= (J(y), J(x))_{H^*} \overset{(5.1.2)}{=} J^*(J(y))(J(x)) = J^*(J(y))(l).\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

iii) Sei $1 < p < \infty$, und sei q zu p konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $J = J^p\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ der in Lemma 4.4.1 konstruierte Isomorphismus, und sei $\xi \in L^p(\Omega)^{**}$. Zu $l \in L^p(\Omega)^*$ sei $g \in L^q(\Omega)$ mit $l = J^p g$. Zu $k = \xi \circ J^p \in L^q(\Omega)^*$ finden wir analog $f \in L^p(\Omega)$ mit $k = J^q f$; also $f = (J^q)^{-1}(\xi \circ J^p)$. Es folgt

$$\xi(l) = \xi(J^p g) = k(g) = J^q f(g) = \int_\Omega fg\, d\mu = J^p g(f) = l(f) = (\mathcal{I}f)(l),$$

und $\mathcal{I}$ ist surjektiv.

iv) $\mathcal{I}\colon L^1(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in (L^\infty(\Omega))^*$ ist gemäss Beispiel 4.4.1 nicht surjektiv. □

Bemerkung 5.1.1. i) Falls X reflexiv ist, so ist X auch vollständig.

ii) Für jeden normierten Raum X liefert $\overline{\mathcal{I}(X)} \subset X^{**}$ eine kanonische Vervollständigung; vergleiche Satz 2.1.1.

Beweis. i) X^{**} ist nach Beispiel 2.1.1 vollständig. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Dann ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X^{**}. Sei $z = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}x_k \in X^{**}$. Da X reflexiv, folgt $z = \mathcal{I}x$ für ein $x \in X$, und $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, da $\mathcal{I}$ isometrisch. □

Ist $L^\infty(\Omega)$ reflexiv oder nicht? – Wir beantworten diese Frage in einem allgemeinen Kontext.

Satz 5.1.2. *i) Falls X reflexiv ist, so gilt dies auch für X^*.*

ii) Falls X^* reflexiv ist und X vollständig, so ist auch X reflexiv.

Beweis. i) (Übung)

ii) (indirekt) Seien $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^*\colon X^* \to (X^*)^{**}$ die kanonischen Isometrien gemäss (5.1.1). Widerspruchsweise nehmen wir an $\mathcal{I}(X) \neq X^{**}$. Da X vollständig ist, ist $M := \mathcal{I}(X)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X^{**}. Wähle $x^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{I}(X)$ und dazu $l^{**} \in (X^{**})^* = (X^*)^{**}$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l^{**}(x^{**}) = 1$, $l^{**}_{|_M} = 0$. Da $\mathcal{I}^*$ surjektiv, gilt $l^{**} = \mathcal{I}^*(l)$ für ein $l \in X^*$; also

$$\forall x \in X\colon 0 = l^{**}(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}^*(l)(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}(x)(l) = l(x).$$

Es folgt $l = 0$, $\mathcal{I}(l) = l^{**} = 0$, im Widerspruch zu $l^{**}(x^{**}) = 1$. □

Beispiel 5.1.2. $L^\infty(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Beweis. $L^1(\Omega)$ ist vollständig mit Dualraum $(L^1(\Omega))^*$ isometrisch isomorph zu $L^\infty(\Omega)$; $L^1(\Omega)$ ist jedoch gemäss Beispiel 5.1.1.iv) nicht reflexiv. □

Satz 5.1.3. *Sei X reflexiv, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann ist auch Y reflexiv.*

Beweis. Sei $i_Y\colon Y \to X$ die kanonische Einbettung, $i_Y^*\colon X^* \to Y^*$ die dazu "duale" Abbildung, definiert durch

$$\forall l \in X^*, y \in Y\colon i_Y^*(l)(y) = l(i_Y(y)) = l(y),$$

also $i_Y^*(l) = l_{|Y}$, mit

$$\forall l \in X^*\colon ||i_Y^*(l)||_{Y^*} \le ||l||_{X^*}.$$

Sei analog $i_Y^{**}\colon Y^{**} \to X^{**}$ gegeben durch

$$\forall y^{**} \in Y^{**}, l \in X^*\colon i_Y^{**}(y^{**})(l) = y^{**}(i_Y^*(l)),$$

mit

$$\forall y^{**} \in Y^{**}\colon ||i_Y^{**}(y^{**})||_{X^{**}} \le ||y^{**}||_{Y^{**}}||i_Y^*||_{L(X^*,Y^*)} \le ||y^{**}||_{Y^{**}}.$$

Seien weiter $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^Y\colon Y \to Y^{**}$ die kanonischen Isometrien. Nach Annahme ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

Behauptung 1. $\mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(Y^{**})) \subset Y$.

Beweis. Sei $y^{**} \in Y^{**}$, und nimm an $x = \mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(y^{**})) \notin Y$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l(x) \neq 0$, $l_{|Y} = 0$. Da $l_{|Y} = 0$, folgt $i_Y^*(l) = 0$; also

$$0 = y^{**}(i_Y^*(l)) = i_Y^{**}(y^{**})(l) = \mathcal{I}x(l) = l(x) \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Sei nun $y^{**} \in Y^{**}$. Nach Behauptung 1 gilt $y := \mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(y^{**})) \in Y$. Für $f \in Y^*$ sei $l \in X^*$ eine beliebige Fortsetzung gemäss Satz 4.1.2 mit $l_{|Y} = f$; das heisst, $i_Y^*(l) = f$. Es folgt

$$y^{**}(f) = y^{**}(i_Y^*(l)) = i_Y^{**}(y^{**})(l) = \mathcal{I}y(l) = l(y) \overset{(y\in Y)}{=} f(y) = \mathcal{I}^Y y(f)$$

für alle $f \in Y^*$; das heisst, $y^{**} = \mathcal{I}^Y y$, und $\mathcal{I}^Y$ ist surjektiv. Weiter folgt mit der Identität $\mathcal{I}y = i_Y^{**}(y^{**}) = i_Y^{**}(\mathcal{I}^Y y)$ die Gleichheit

$$i_Y^{**}\mathcal{I}^Y = \mathcal{I}_{|Y}.$$

□

5.2 Separabilität

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 5.2.1. *M heisst* **separabel**, *falls eine abzählbare Teilmenge $D \subset M$ existiert mit $\overline{D} = M$.*

Bemerkung 5.2.1. Eine Folge $(x_k) \subset M$ ist dicht genau dann, wenn

$$M = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(x_k)\ . \tag{5.2.1}$$

Im Falle von (5.2.1) gibt es für jedes $x \in M$ und jedes $l \in \mathbb{N}$ ein $k = k(l) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x) < 1/l$, und $x_{k(l)} \to x$ $(l \to \infty)$. Falls umgekehrt $D = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ dicht, so gilt $M = \overline{D} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(x_k)$ für jedes $l \in \mathbb{N}$, also (5.2.1).

Beispiel 5.2.1. i) $\mathbb{R}^n$ ist separabel, falls d die von einer Norm induzierte Metrik ist.

ii) $C^0([0,1])$ ist nach dem Weierstraßschen Approximationssatz separabel; analog gilt dies auch für $C^0(\overline{\Omega})$ für eine beliebige offene Menge $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

iii) $L^p(\Omega)$ ist für $1 \le p < \infty$ separabel; vergleiche Satz 3.5.2 der Vorlesung "Analysis III" über Masstheorie.

iv) $L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Betrachte dazu die Familie $f_s = \chi_{[0,s]}$, wobei $0 < s \le 1$, mit

$$\forall\, 0 < s < t \le 1 \colon ||f_s - f_t||_{L^\infty} = ||\chi_{]s,t]}||_{L^\infty} = 1. \tag{5.2.2}$$

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht. Für jedes $0 < s \le 1$ gibt es dann wegen (5.2.1) ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$||f_s - g_k||_{L^\infty} < 1/2. \tag{5.2.3}$$

Umgekehrt kann (5.2.3) für festes k wegen (5.2.2) nur für höchstens ein $s = s(k)$ gelten. Dies liefert eine surjektive Abbildung $\Lambda \ni k \mapsto s(k) \in]0,1]$ für ein $\Lambda \subset \mathbb{N}$, was jedoch unmöglich ist. (Vergleiche Beispiel 3.5.2, Analysis III.)

Satz 5.2.1. *Sei M separabel, $A \subset M$. Dann ist A separabel (bezüglich der induzierten Metrik $d_{|A\times A}$).*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in M, $a_0 \in A$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$A \cap B_{1/2l}(x_k) \neq \emptyset$$

wähle $a_{kl} \in A \cap B_{1/2l}(x_k)$, $a_{kl} = a_0$ sonst. Dann gilt $A \cap B_{1/2l}(x_k) \subset B_{1/l}(a_{kl})$, und

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_{1/2l}(x_k)) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(a_{kl});$$

also ist $D := \{a_{kl};\ k, l \in \mathbb{N}\}$ dicht gemäss Bemerkung 5.2.1. □

Wir verknüpfen nun Separabilität und lineare Struktur.

Satz 5.2.2. *Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

i) Ist X^* separabel, so ist X separabel.

ii) Ist X separabel und reflexiv, dann ist X^* separabel.

Beweis. i) Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^*. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit $||x_k||_X = 1$ und

$$l_k(x_k) \geq ||l_k||_{X^*} - 1/k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Setze

$$M = \overline{\operatorname{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

M ist separabel. Die Aussage i) folgt daher aus

Behauptung. $M = X$.

Beweis. (indirekt) Sei $X \neq M$, und seien $x_0 \in X \setminus M$ und dazu $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 gewählt mit

$$l(x_0) = 1,\ l_{|M} = 0.$$

Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $l = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} l_k$. Es folgt

$$0 \neq ||l||_{X^*} = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} ||l_k||_{X^*} \leq \limsup_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} l_k(x_k),$$

jedoch gilt

$$|l_k(x_k)| = |(l_k - l)(x_k)| \leq ||l_k - l||_{X^*}||x_k||_X \to 0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

□

ii) Mit X ist auch $X^{**} = \mathcal{I}(X)$ separabel. Falls nämlich $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in X, so liegt $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^{**}. Mit i) folgt Separabilität von X^*. □

5.3 Schwache Folgenkompaktheit

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*, Bidualraum X^{**} und kanonischer Isometrie $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$. Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^*, $l \in X^*$.

Definition 5.3.1. $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert schwach*** *gegen* l, $l_k \overset{w^*}{\to} l\ (k \to \infty)$, *falls*

$$\forall x \in X : l_k(x) \underset{(k\to\infty)}{\to} l(x). \tag{5.3.1}$$

Somit haben wir auf X^* nun drei Konvergenzbegriffe:

i) Normkonvergenz $l_k \to l\ (k \to \infty)$;

ii) schwache Konvergenz $l_k \overset{w}{\to} l\ (k \to \infty)$ im Sinne

$$\forall z \in X^{**} : z(l_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} z(l); \tag{5.3.2}$$

iii) schwache* Konvergenz $l_k \overset{w^*}{\to} l\ (k \to \infty)$ im Sinne von (5.3.1), das heisst, punktweise Konvergenz.

Bemerkung 5.3.1. i) Bedingung (5.3.1) ist äquivalent dazu, dass wir (5.3.2) fordern für alle $z \in \mathcal{I}(X)$. Falls daher X reflexiv ist, so sind die Bedingungen der schwachen und der schwach*-Konvergenz äquivalent.

ii) Im allgemeinen gilt: $l_k \underset{(k\to\infty)}{\to} l \;\Rightarrow\; l_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{w}{\rightharpoondown}} l \;\Rightarrow\; l_k \underset{k\to\infty}{\overset{w^*}{\rightharpoondown}} l.$

iii) Die schwache* Konvergenz ist Konvergenz bezüglich der von den Mengen

$$\Omega_{x,U} = \{l \in X^*;\, l(x) \in U\} = (\mathcal{I}x)^{-1}(U),\; x \in X,\, U \subset \mathbb{R} \text{ offen},$$

erzeugten schwach*-Topologie τ_{w^*}. Offenbar gilt $\tau_{w^*} \subset \tau_w$, also ist τ_{w^*} gröber als τ_w und daher im allgemeinen nicht metrisierbar. Abgeschlossenheit, beziehungsweise Kompaktheit können daher nicht äquivalent mit dem Folgenkriterium umschrieben werden. Schwach*-abgeschlossene Mengen sind analog zu Abschnitt 4.6 stets auch abgeschlossen bezüglich schwach*-Konvergenz und sind schwach abgeschlossen, sowie stark abgeschlossen. Weiter gilt für $\Omega \subset X^*$ analog zu Lemma 4.6.1 stets $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}_w \subset \bar{\Omega}_{w^*}$.

Nach dem *Satz von Tychonov* der Topologie ist die abgeschlossene 1-Kugel in X^* stets schwach*-kompakt. Für die Anwendungen, die wir unten besprechen, wird jedoch Folgenkompaktheit benötigt.

Satz 5.3.1. *(Banach-Alaoglu) Sei X separabel, $(l_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ beschränkt. Dann gibt es $l \in X^*$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$l_k \overset{w^*}{\rightharpoondown} l \quad (k \to \infty,\; k \in \Lambda).$$

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Wähle Teilfolgen $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \Lambda_j \supset \Lambda_{j+1} \supset \ldots \supset \ldots$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$l_k(x_j) \to a_j =: l(x_j)\; (k \to \infty,\; k \in \Lambda_j).$$

Dies ist möglich, da die Folge $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Annahme beschränkt ist. Sei Λ die zu $(\Lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gehörige Diagonalfolge.

Behauptung. l lässt sich zu $l \in X^*$ erweitern.

Beweis. l ist linear auf $M = \operatorname{span}\{x_j;\; j \in \mathbb{N}\}$, und

$$|l(x)| = \lim_{k\to\infty,\; k\in\Lambda} |l_k(x)| \le \limsup_{k\to\infty} ||l_k||_{X^*}||x||_X,\; \forall x \in M.$$

Also ist l stetig fortsetzbar auf $X = \overline{M}$. □

Wir können nun zeigen, dass $l_k \overset{w^*}{\rightharpoondown} l$ $(k \to \infty,\; k \in \Lambda)$. Sei dazu $x \in X$ beliebig, $x = \lim_{j\to\infty,\; j\in J} x_j$, für eine Folge $J \subset \mathbb{N}$. Für $j \in J$, $k \in \mathbb{N}$ schätze ab

$$\begin{aligned}|l_k(x) - l(x)| &\le |l_k(x - x_j)| + |l(x - x_j)| + |l_k(x_j) - l(x_j)| \\ &\le (\sup_k ||l_k||_{X^*} + ||l||_{X^*})||x - x_j||_X + |l_k(x_j) - l(x_j)|\,.\end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ für festes $j \in J$ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} |l_k(x) - l(x)| \le C||x - x_j||_X.$$

Mit $j \to \infty$, $j \in J$, folgt $l_k(x) \to l(x)$ $(k \to \infty,\; k \in \Lambda)$, wie gewünscht. □

Beispiel 5.3.1. i) $X = L^1(\Omega)$ ist separabel, $X^* \cong L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.4.1. Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so existiert nach Satz 5.3.1 eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f_k g\, d\mu \to \int_\Omega f g\, d\mu \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $g \in L^1(\Omega)$.

ii) $X = L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 5.3.1 in diesem Fall nicht gilt.

Für $0 < \varepsilon \leq 1$ sei $T_\varepsilon \in X^*$ gegeben durch

$$T_\varepsilon f = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f\, dx,\ f \in L^\infty([0,1]).$$

Offenbar gilt

$$||T_\varepsilon||_{X^*} = \sup_{||f||_{L^\infty}\leq 1} |T_\varepsilon f| \leq 1,$$

jedoch ist die Menge $\{T_\varepsilon;\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$ nicht schwach* relativ folgenkompakt.

Beweis. (indirekt). Nimm an, für eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und ein $T \in X^*$ gelte

$$T_{\varepsilon_k} \overset{w^*}{\rightharpoonup} T \quad (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, dass gilt

$$1 > \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Wähle

$$f = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \chi_{[\varepsilon_{k+1},\varepsilon_k[} \in L^\infty([0,1])$$

mit $||f||_{L^\infty} = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_k} f &= \frac{1}{\varepsilon_k}\sum_{l=k}^\infty (-1)^l(\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}) \\ &= (-1)^k\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{\varepsilon_{k+1}} f\, dx; \end{aligned}$$

das heisst,

$$\left|T_{\varepsilon_k} f - (-1)^k\right| \leq \frac{1}{\varepsilon_k}\left(\varepsilon_{k+1} + \int_0^{\varepsilon_{k+1}} |f|\, dx\right) \leq \frac{2\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Die Folge $(T_{\varepsilon_k} f)_{k\in\mathbb{N}}$ häuft sich somit bei 1 und -1, ist daher divergent. □

Betrachten wir jedoch den separablen Teilraum $C^0([0,1])$ von $L^\infty([0,1])$, so ist für die Einschränkung der T_ε auf $C^0([0,1])$ der Satz 5.3.1 anwendbar. In der Tat sehen wir sofort, dass für jedes $f \in C^0([0,1])$ gilt $T_\varepsilon(f) \to f(0)$ $(\varepsilon \to 0)$; das heisst, $T_\varepsilon \overset{w^*}{\rightharpoonup} \delta$ $(\varepsilon \to 0)$, das Dirac-Funktional.

Die Annahme der Separabilität kann in reflexiven Räumen entfallen. Ausserdem können wir mittels $\mathcal{I}$ Konvergenzaussagen in $X^{**} = (X^*)^*$ zurückziehen und erhalten so schwache Folgenkompaktheit im ursprünglichen Raum ("schwaches Bolzano-Weierstrass Theorem").

Satz 5.3.2. *(Eberlein-Šmulyan) Sei X reflexiv, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt. Dann existiert $x \in X$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$x_k \xrightarrow{w} x \quad (k \to \infty,\, k \in \Lambda).$$

Beweis. Betrachte

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Offenbar ist Y separabel und nach Satz 5.1.3 reflexiv. Nach Satz 5.2.2 ist auch Y^* separabel. Sei $\mathcal{I}\colon Y \to Y^{**}$ die kanonische Isometrie.

Nach Satz 5.3.1 ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y^{**} = \mathcal{I}Y$ schwach* folgenkompakt; das heisst, für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x \in Y$ gilt

$$(\mathcal{I}x_k)(l) = l(x_k) \underset{(k\to\infty,\ k\in\Lambda)}{\longrightarrow} (\mathcal{I}x)(l) = l(x),\ \forall l \in Y^*.$$

Für jedes $l \in X^*$ gehört die Einschränkung $l_{|Y}$ zu Y^*. Da weiter $x_k, x \in Y$, folgt

$$l(x_k) \to l(x) \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $l \in X^*$; das heisst, $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. □

Beispiel 5.3.2. i) Satz 5.3.2 ist insbesondere anwendbar, falls X ein Hilbert-Raum ist.

ii) Sei $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Nach Satz 4.4.1 ist $X = L^p(\Omega)$ reflexiv. Daher liefert Satz 5.3.2 eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^p(\Omega)$ mit $f_k \xrightarrow{w} f$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$; das heisst, mit $q = \frac{p}{p-1}$ gilt für $k \to \infty,\ k \in \Lambda$:

$$\forall g \in L^q(\Omega)\colon \int_\Omega f_k g\, d\mu \to \int_\Omega f g\, d\mu.$$

Als weitere Anwendung von Satz 5.3.2 beweisen wir das folgende Approximationstheorem.

Satz 5.3.3. *(Approximationstheorem) Sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen, $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es $m_0 \in M$ mit*

$$||x_0 - m_0||_X = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{m\in M} ||x_0 - m||_X.$$

Bemerkung 5.3.2. Satz 5.3.3 ist insbesondere anwendbar, falls M ein nicht trivialer abgeschlossener linearer Unterraum von X ist, und liefert ein Analogon zu Korollar 2.4.1 in diesem Fall. Analog zur Situation im Hilbertraum können wir m_0 als "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf M auffassen.

Beweis. Sei $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ eine "Minimalfolge" mit

$$||x_0 - m_k||_X \to \operatorname{dist}(x_0, M) \quad (k \to \infty).$$

Die Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach Satz 5.3.2 gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $m_0 \in X$ mit

$$m_k \overset{w}{\rightharpoonup} m_0 \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Da M abgeschlossen und konvex ist, ist M nach Satz 4.6.2 auch schwach abgeschlossen, somit auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz, und $m_0 \in M$. Schliesslich folgt mit Satz 4.6.1

$$||x_0 - m_0||_X \le \liminf_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} ||x_0 - m_k|| = \operatorname{dist}(x_0, M),$$

wie gewünscht. □

5.4 Variationsrechnung

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset X$, $F\colon M \to \mathbb{R}$.

Definition 5.4.1. *Die Funktion F ist* **schwach folgen-unterhalb-stetig** *(kurz: w.s.l.s.c. oder weakly sequentially lower semi-continuous) in $x_0 \in M$, falls für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x_0$ $(k \to \infty)$ gilt*

$$F(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} F(x_k).$$

Kürzer schreiben wir auch

$$F(x_0) \le \liminf_{x \overset{w}{\rightharpoonup} x_0,\ x\in M} F(x).$$

Beispiel 5.4.1. i) Die Norm $x \mapsto ||x||_X$ ist w.s.l.s.c. auf X gemäss Satz 4.6.1, also auch die Funktion $x \mapsto \|x\|_X^p$ für jedes $0 < p < \infty$.

ii) Sei $F\colon M \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, wobei $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist F auf M w.s.l.s.c.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x_0$. Wähle eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$F(x_l) \to \liminf_{k\to\infty} F(x_k) =: \alpha_0 \ge -\infty \quad (l \to \infty,\ l \in \Lambda).$$

OBdA dürfen wir annehmen, dass $\Lambda = \mathbb{N}$.

Nach Satz 4.6.3, angewandt auf die Folge $(x_k)_{k\ge k_0}$, gibt es für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$ Konvexkombinationen

$$y_l = \sum_{k=k_0}^{l} a_{kl} x_k,\ 0 \le a_{kl} \le 1,\ \sum_{k=k_0}^{l} a_{kl} = 1,\ l \ge k_0,$$

mit $y_l \to x_0$ $(l \to \infty)$, und $(y_l)_{l\ge k_0} \subset M$, da M konvex.

Mit der Konvexität von F folgt

$$\forall l \geq k_0 \colon F(y_l) \leq \sum_{k=k_0}^{l} a_{kl} F(x_k) \leq \sup_{k \geq k_0} F(x_k).$$

Nach Grenzübergang $l \to \infty$ erhalten wir

$$F(x_0) = \lim_{l \to \infty} F(y_l) \leq \sup_{k \geq k_0} F(x_k).$$

Mit $k_0 \to \infty$ folgt schliesslich

$$F(x_0) \leq \limsup_{k \to \infty} F(x_k) = \alpha_0.$$

Insbesondere gilt $\alpha_0 > -\infty$. □

Definition 5.4.2. $F \colon M \to \mathbb{R}$ *heisst* **koerziv** *auf* M *bezüglich* $||\cdot||_X$, *falls gilt*

$$F(x) \to \infty \quad (||x||_X \to \infty, \ x \in M).$$

Satz 5.4.1. *(Variationsprinzip) Sei* X *reflexiv,* $M \subset X$ *nicht leer und schwach folgen-abgeschlossen,* $F \colon M \to \mathbb{R}$ *koerziv und w.s.l.s.c. Dann existiert* $x_0 \in M$ *mit*

$$F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x).$$

Beweis. Betrachte eine Minimalfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in M mit

$$F(x_k) \to \inf_{x \in M} F(x) =: \alpha_0 \geq -\infty \quad (k \to \infty).$$

Da F koerziv ist, ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Satz 5.3.2 besitzt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $x_k \overset{w}{\to} x_0$ $(k \to \infty, \ k \in \Lambda)$.

Da M schwach folgen-abgeschlossen, folgt $x_0 \in M$, und

$$F(x_0) \leq \liminf_{k \to \infty, \ k \in \Lambda} F(x_k) = \alpha_0,$$

da F w.s.l.s.c. Insbesondere gilt wieder $\alpha_0 > -\infty$.

□

Bemerkung 5.4.1. Falls M konvex und F strikt konvex, so kann F höchstens eine Minimalstelle in M besitzen.

Beweis. Seien $x_0 \neq x_1 \in M$ mit

$$F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x) = F(x_1).$$

Für $0 < t < 1$ gilt $x_t = tx_1 + (1-t)x_0 \in M$, und mit

$$F(x_t) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x)$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. □

Beispiel 5.4.2. i) Wir können nun auch einen variationellen Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes, Satz 4.3.2, geben.

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum, und sei $l \in H^*$. Die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{2}||x||_H^2 - l(x),\ x \in H,$$

ist koerziv und gemäss Beispiel 5.4.1.i) und der Definition der schwachen Konvergenz auch w.s.l.s.c.; weiter ist $M = H$ schwach folgen-abgeschlossen und nicht leer. Nach Satz 5.4.1 existiert $y \in H$ mit

$$F(y) = \inf_{x \in H} F(x)$$

und $l = j_y$ wie in Bemerkung 4.3.1.ii).

ii) Analog erhalten wir einen variationellen Beweis von Lemma 4.4.2, indem wir für $1 < p < \infty$ und $l \in L^p(\Omega)^*$ die Funktion

$$E(f) = \frac{1}{p}||f||_{L^p}^p - l(f),\ f \in L^p(\Omega),$$

betrachten. Wie in i) ist E koerziv und nach Beispiel 5.4.1.i) auch w.s.l.s.c.; $M = L^p(\Omega)$ ist schwach folgen-abgeschlossen und nicht leer. Schliesslich ist der Raum $L^p(\Omega)$ reflexiv, und Satz 5.4.1 liefert die Existenz einer Minimalstelle f von E mit den gewünschten Eigenschaften wie in Bemerkung 4.4.1.ii).

Beachte, dass diese Beweise die Reflexivität der zugrunde liegenden Räume benutzen. Sie liefern daher keinen unabhängigen Beweis von Satz 4.3.2 oder von Satz 4.4.1.

Kapitel 6

Auflösung linearer Gleichungen, Spektraltheorie

6.1 Duale Operatoren

Seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Dualraum X^*, beziehungsweise Y^*, $A\colon D_A \subset X \to Y$ linear mit $\overline{D_A} = X$.

Definition 6.1.1. *Der zu A* **duale Operator** $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^*} = \{y^* \in Y^*;\ l_{y^*}\colon D_A \ni x \mapsto \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} \text{ ist stetig } \},$$

und für $y^* \in D_{A^*}$ ist $A^*y^* \in X^*$ die eindeutige Fortsetzung von l_{y^*} auf X.

Bemerkung 6.1.1. i) A^* hat die Eigenschaft

$$\forall x \in D_A,\ y^* \in D_{A^*}\colon \langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}. \tag{6.1.1}$$

ii) Auch falls A nicht dicht definiert ist, kann man **formal** zu A **duale Operatoren** durch (6.1.1) charakterisieren, jedoch sind diese dann nicht eindeutig.

Satz 6.1.1. *Für $A \in L(X,Y)$ gilt $A^* \in L(Y^*, X^*)$, und*

$$||A||_{L(X,Y)} = ||A^*||_{L(Y^*,X^*)}.$$

Beweis. Für $y^* \in Y^*$, $x \in X$ gilt

$$|\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| \le ||y^*||_{Y^*}||A||_{L(X,Y)}||x||_X;$$

das heisst, $y^* \in D_{A^*}$, und

$$\begin{aligned}\sup_{||y^*||_{Y^*}\le 1} ||A^*y^*||_{X^*} &= \sup_{||x||_X\le 1,\ ||y^*||_{Y^*}\le 1} |\langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X}| \\ &= \sup_{||x||_X\le 1,\ ||y^*||_{Y^*}\le 1} |\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| = ||A||_{L(X,Y)}\end{aligned}$$

gemäss Satz 4.2.2. □

Beispiel 6.1.1. Seien $1 < p, q < \infty$ konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte $X = Y = L^p(\Omega)$ mit Dualraum $X^* = Y^* \cong L^q(\Omega)$. Sei

$$A = \Delta\colon D_A = C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega).$$

Dann gilt $D_{A^*} \supset C_c^\infty(\Omega)$, da für alle $g \in C_c^\infty(\Omega)$ die Abbildung

$$l_g\colon C_c^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \langle g, \Delta f\rangle_{L^q\times L^p} = \int_\Omega g\Delta f\, d\mu = \int_\Omega \Delta g f\, d\mu = \langle \Delta g, f\rangle_{L^q\times L^p}$$

mit

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega)\colon\ |l_g(f)| \le ||\Delta g||_{L^q}||f||_{L^p},$$

sich stetig auf $L^p(\Omega)$ fortsetzen lässt, und

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega)\colon A^*g = \Delta g.$$

Satz 6.1.2. *Sei $A\colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert. Dann folgt*

i) $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ ist abgeschlossen.

ii) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

Beweis. i) Betrachte $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_{A^*}$ mit

$$y_k^* \to y^* \text{ in } Y^*,\ x_k^* := A^*y_k^* \to x^* \text{ in } X^* \quad (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $x \in D_A$:

$$\begin{aligned}\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} &= \lim_{k\to\infty} \langle y_k^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle A^*y_k^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X}.\end{aligned}$$

Also ist $y^* \in D_{A^*}$ mit $A^*y^* = x^*$; das heisst, A^* ist abgeschlossen.

ii) Sei $A \subset B$; das heisst $D_A \subset D_B$, $B_{|_{D(A)}} = A$. Sei $y^* \in D_{B^*}$. Dann gilt für alle $x \in D_A \subset D_B$

$$\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} = \langle y^*, Bx\rangle_{Y^*\times Y} = \langle B^*y^*, x\rangle_{X^*\times X};$$

das heisst $y^* \in D_{A^*}$, $A^*y^* = B^*y^*$. □

6.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die Auflösbarkeit der Gleichung

$$Ax = y \tag{6.2.1}$$

zu vorgegebenem y aufgrund der Eigenschaften von A^* entscheiden.

Satz 6.2.1. *(Banach's Closed Range Theorem) Seien X, Y Banach-Räume, der lineare Operator $A\colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert und abgeschlossen, mit dualem Operator A^*. Dann sind äquivalent:*

i) $im(A)$ ist abgeschlossen in Y;

ii) $im(A^*)$ ist abgeschlossen in X^*;

iii) $im(A) = {}^\perp\ker(A^*) = \{y \in Y;\ \forall y^* \in \ker(A^*)\colon \langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} = 0\}$;

iv) $im(A^*) = \ker(A)^\perp = \{x^* \in X^*;\ \forall x \in \ker(A)\colon \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = 0\}$.

Wir beweisen nur die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ iii). (Hierfür müssen die Räume X, Y noch nicht einmal vollständig sein.) Der komplette Beweis von Satz 6.2.1 ist recht aufwendig und anspruchsvoll. So beweist Werner den Satz nur für beschränkte Operatoren und überlässt es in Aufgabe VII.5.19 dem Leser, die Details für den allgemeinen Fall zu ergänzen. Auch der Beweis von Yoshida gilt nur im Fall beschränkter Operatoren. (Die von Yoshida durchgeführte Reduktion auf diesen Fall scheint unvollständig.) Einen ausführlichen Beweis für den allgemeinen Fall findet man jedoch bei Kato ("Perturbation theory for linear operators", S.234) oder Brezis, Theorem II.18.

Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 6.2.1. *i) Sei $M \subset X$. Dann ist $M^\perp \subset X^*$ abgeschlossen (sogar schwach* folgenabgeschlossen).*

ii) Sei $L \subset X^*$. Dann ist ${}^\perp L \subset X$ abgeschlossen (sogar schwach folgenabgeschlossen).

Beweis. ii) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset {}^\perp L$ mit $x_k \xrightarrow{w} x \in X$ $(k \to \infty)$. Für beliebiges $x^* \in L$ erhalten wir

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = \lim_{k\to\infty} \langle x^*, x_k\rangle_{X^*\times X} = 0;$$

das heisst, $x \in {}^\perp L$.

i) analog. □

Beweis von Satz 6.2.1, "i) $\Leftrightarrow$ iii)". Die Implikation iii) $\Rightarrow$ i) folgt unmittelbar aus Lemma 6.2.1.ii).

i) $\Rightarrow$ iii) Aus Bemerkung 6.1.1 folgt unmittelbar die Inklusion $im(A) \subset {}^\perp\ker(A^*)$. Die umgekehrte Inklusion beweisen wir indirekt. Sei $y \in {}^\perp\ker(A^*) \setminus im(A)$. Da $im(A)$ nach Annahme abgeschlossen, gibt es $y^* \in Y^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} \neq 0$ und $y^*_{|im(A)} = 0$. Letztere Bedingung besagt, dass

$$\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} = 0,\ \forall x \in D_A.$$

Es folgt $y^* \in D_{A^*}$ und $A^*y^* = 0$; also $y^* \in \ker(A^*)$. Da $y \in {}^\perp\ker(A^*)$, erhalten wir $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} = 0$ und somit den gewünschten Widerspruch. □

Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren $A\colon D_A \subset X \to Y$ mit abgeschlossenem Bild ist die Gleichung (6.2.1) somit zu vorgegebenem $y \in Y$ genau dann durch ein $x \in D_A$ auflösbar, wenn alle linearen Funktionale im Kern von A^* auf y "senkrecht stehen" (verschwinden). Wir sagen dann, die Gleichung (6.2.1) ist **"normal lösbar"**.

Satz 6.2.2. *Für $A\colon D_A \subset X \to Y$ wie in Satz 6.2.1 sind äquivalent:*

i) A ist surjektiv;

ii) A^* ist injektiv, $im(A^*)$ ist abgeschlossen;

iii) $\exists c_0 > 0\, \forall y^* \in D_{A^*}\colon c_0||y^*||_{Y^*} \leq ||A^*y^*||_{X^*}$.

Beweis. i) $\Leftrightarrow$ ii) folgt unmittelbar aus Satz 6.2.1.

ii) $\Rightarrow$ iii) A^* ist abgeschlossener Operator $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to im(A^*)$, wobei $im(A^*)$ als abgeschlossener Unterraum eines Banach-Raums ebenfalls ein Banach-Raum ist. Die Behauptung folgt somit aus Satz 3.3.2.

iii) $\Rightarrow$ ii) Offenbar ist A^* mit iii) injektiv. Sei $x_k^* = A^*y_k^*$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in $im(A^*)$ mit $x_k^* \to x^*$ $(k \to \infty)$. Wegen iii) ist dann auch $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Sei $y^* = \lim_{k\to\infty} y_k^*$. Da A^* abgeschlossen, folgt $y^* \in D_{A^*}$, $x^* = A^*y^*$; das heisst, $im(A^*)$ ist abgeschlossen. □

Wann ist das Bild eines Operators abgeschlossen? Eine wichtige Klasse sind die sogenannten **Fredholm Operatoren** $A = id - T$ auf einem Banach-Raum X, wobei T kompakt.

Definition 6.2.1. *Ein Operator $T \in L(X)$ heisst* **kompakt***, falls $\overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt ist; analog für $T \in L(X,Y)$.*

Lemma 6.2.2. *Sei $T \in L(X)$ kompakt. Falls $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$, so folgt dann $Tx_k \to Tx$ $(k \to \infty)$.*

Beweis. Da T stetig, gilt für jedes $l \in X^*$ auch $l \circ T \in X^*$ und mit $x_k \xrightarrow{w} x$ folgt $l(Tx_k) \to l(Tx)$ $(k \to \infty)$, also $Tx_k \xrightarrow{w} Tx$ $(k \to \infty)$.

Da andererseits T nach Annahme kompakt, und da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Satz 4.6.1 beschränkt, existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit $y_k = Tx_k \to y$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$, und $y = Tx$ wegen Eindeutigkeit des (schwachen) Limes. Aus der Eindeutigkeit des Häufungspunkts $y = Tx$ folgt schliesslich die Konvergenz der ganzen Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Satz 6.2.3. *Sei X ein Banach-Raum, $T \in L(X)$ kompakt. Dann ist das Bild $im(id - T)$ des Operators $id - T$ abgeschlossen.*

Beweis. Setze $M = \ker(id - T)$. Da $\overline{B_1(0;M)} = \overline{T(B_1(0;M))} \subset \overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt, ist M endlich-dimensional nach Satz 2.1.4.

Sei $L = \overline{L}$ ein topologisches Komplement von M. Setze

$$Sx = x - Tx, x \in L.$$

Dann ist S injektiv, $im(S) = im(id - T)$.

Behauptung 1. $\exists r > 0\ \forall x \in L\colon r||x||_X \leq ||Sx||_X$.

Beweis. (indirekt) Andernfalls gibt es $x_k \in L$ mit

$$k||Sx_k||_X \leq ||x_k||_X = 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt für eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$:

$$Sx_k = x_k - Tx_k \to 0,\ Tx_k \to x_0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda);$$

das heisst,

$$x_k \to x_0 \in L\ (k \to \infty;\ k \in \Lambda),$$

und $Sx_0 = 0, ||x_0||_X = 1$. Der Widerspruch ergibt die Behauptung. □

Sei $y_k = Sx_k \to y\ (k \to \infty)$, $x_k \in L$. Mit Behauptung 1 folgt, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in L. Da L abgeschlossen ist, existiert $x = \lim_{k\in\mathbb{N}} x_k \in L$ mit $y = Sx$; das heisst $im(S) = im(id - T)$ ist abgeschlossen. □

Beispiel 6.2.1. Kompakte Operatoren erhält man oft in der Form von Integraloperatoren.

6.3 Kompaktheit

Der folgende Satz gibt ein klassisches Kriterium für Folgenkompaktheit im Raum der stetigen Funktionen auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 6.3.1. *(Arzéla-Ascoli) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \subset C^0(\overline{\Omega})$. Es sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist relativ folgenkompakt;

ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig; das heisst, $\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{C^0} < \infty$, und

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \Omega\ \forall f \in \mathcal{F}\colon\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.3.1}$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Übung; vergleiche auch den Beweis von Satz 6.3.2.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, und sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ dicht in $\overline{\Omega}$. (Beachte, dass $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ separabel ist.) Da $\mathcal{F}$ beschränkt, gibt es Teilfolgen $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots$ mit

$$f_k(x_l) \to a_l =: f(x_l) \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda_l).$$

Nach Auswahl einer Diagonalfolge Λ erhalten wir

$$\forall\, l \in \mathbb{N}\colon f_k(x_l) \to f(x_l) \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda). \tag{6.3.2}$$

Behauptung 1. f ist gleichmässig stetig und lässt sich daher fortsetzen zu einer Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Für $x_l, x_m \in \Omega$ mit $|x_l - x_m| < \delta$ schätze ab

$$\begin{aligned}|f(x_l) - f(x_m)| &\leq |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f_k(x_m)| + |f_k(x_m) - f(x_m)| \\ &\leq \varepsilon + |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f(x_m) - f_k(x_m)|\,,\end{aligned}$$

wobei $k \in \Lambda$ beliebig. Nach Grenzübergang $k \to \infty$, $k \in \Lambda$, folgt mit (6.3.2) die Abschätzung

$$|f(x_l) - f(x_m)| \le \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Behauptung 2. $f_k \to f$ in $C^0(\overline{\Omega})$ für $k \to \infty$, $k \in \Lambda$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Da $\overline{\Omega}$ kompakt, überdecken endlich viele Bälle $B_\delta(x_l), 1 \le l \le L$, die Menge $\overline{\Omega}$. Wähle k_0 gemäss (6.3.2), so dass für $k \ge k_0$ und $1 \le l \le L$ gilt

$$|f_k(x_l) - f(x_l)| < \varepsilon.$$

Sei $x \in \Omega$ beliebig. Wähle $1 \le l \le L$ mit $x \in B_\delta(x_l)$ und schätze ab

$$|f_k(x) - f(x)| \le |f_k(x) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x)| < 3\varepsilon$$

für $k \ge k_0$. □

Somit ist $\mathcal{F}$ relativ folgenkompakt. □

Bemerkung 6.3.1. Satz 6.3.1 (wie auch der folgende Satz 6.3.2) ist im allgemeinen falsch, falls Ω unbeschränkt ist. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ erhalten wir aus einer beliebigen Funktion $0 \ne f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch Translation mit einem beliebigen Vektor $0 \ne e \in \mathbb{R}^n$ eine nicht relativ kompakte Familie gleichmässig beschränkter, gleichgradig stetiger Funktionen $f_k(x) = f_0(x + ke) \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$.

Ein analoges Kriterium gilt auch in den Funktionenräumen $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Satz 6.3.2. *(Fréchet-Kolmogorov) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$. Für eine Familie $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist relativ folgenkompakt;

ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und "gleichgradig stetig in L^p", das heisst,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty, \ \sup_{f \in \mathcal{F}} ||f - \tau_h f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad (h \to 0), \tag{6.3.3}$$

wobei wir $f \in \mathcal{F}$ durch $f = 0$ ausserhalb Ω zu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, und mit der Notation $\tau_h f(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$, für jedes $h \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) $\overline{\mathcal{F}}$ ist kompakt, also auch beschränkt.

Zum Beweis von (6.3.3) sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, überdecken endlich viele Bälle $B_\varepsilon(f_k)$, $1 \le k \le K$, mit $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Familie $\overline{\mathcal{F}}$. Wähle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall k \in \{1, \dots, K\} \colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)|^p < \frac{\varepsilon^p}{\mathcal{L}^n(\mathrm{supp}(f_k))}.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ folgt für $1 \le k \le K$:

$$||f_k - \tau_h f_k||_{L^p}^p \le ||f_k - \tau_h f_k||_{L^\infty}^p \int_{\mathrm{supp}(f_k)} dx < \varepsilon^p.$$

Sei nun $f \in \mathcal{F}$ beliebig, $1 \leq k \leq K$ so gewählt, dass $f \in B_\varepsilon(f_k)$.

Es folgt für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$

$$\begin{aligned}||f - \tau_h f||_{L^p} &\leq ||f - f_k||_{L^p} + ||f_k - \tau_h f_k||_{L^p} + ||\tau_h(f - f_k)||_{L^p} \\ &= 2||f - f_k||_{L^p} + ||f_k - \tau_h f_k||_{L^p} < 3\varepsilon,\end{aligned}$$

wie gewünscht.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ eine "regularisierende Folge" mit $0 \leq \rho_\delta \in C_c^\infty(B_\delta(0))$ und mit $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta dx = 1$ für jedes $\delta > 0$. Für $f \in \mathcal{F}$ setze $f_\delta = \rho_\delta * f$ mit

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) f(x - y)\, dy.$$

Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gemäss (6.3.3) gewählt mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f - \tau_h f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad (|h| \leq \delta). \tag{6.3.4}$$

Behauptung 1. $\forall f \in \mathcal{F}\colon ||f - f_\delta||_{L^p} < \varepsilon$.

Beweis. Schreibe

$$(f_\delta - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)(f(x - y) - f(x))\, dy.$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung und da $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)\, dy = 1$, folgt mit (6.3.4)

$$||f_\delta - f||_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) ||f - \tau_y f||_{L^p}\, dy < \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Behauptung 2. Für festes $\delta > 0$ ist $(f_\delta)_{f \in \mathcal{F}} \subset C^0(\overline{\Omega})$ beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis. Da Ω beschränkt, folgt mit der Hölderschen Ungleichung zunächst

$$|f_\delta(x)| \leq \sup_y \rho_\delta(y) \int_{B_\delta(0)} |f(x - y)|\, dy \leq C_\delta ||f||_{L^p} \leq C$$

mit einer von $x \in \Omega$ und $f \in \mathcal{F}$ unabhängigen Konstanten C. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}|f_\delta(x) - f_\delta(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\delta(x - y) - \rho_\delta(z - y)) f(y)\, dy \right| \\ &\leq \sup_y |\rho_\delta(x - y) - \rho_\delta(z - y)|\, ||f||_{L^p} \leq C_\delta\, |x - z|\, ||f||_{L^p}.\end{aligned}$$

□

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Für $\varepsilon_l = 1/l$ mit zugehörigem $\delta_l > 0$ wähle Teilfolgen $\Lambda_1 \supset \dots \supset \Lambda_l \supset \Lambda_{l+1} \dots$ gemäss Satz 6.3.1 und Behauptung 2 so, dass

$$||f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}||_{L^p} \leq (\mathcal{L}^n(\Omega))^{1/p} ||f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}||_{C^0} < \varepsilon_l$$

für $j, k \in \Lambda_l$, $l \in \mathbb{N}$. Sei Λ eine Diagonalfolge mit der Eigenschaft, dass für jedes $l \in \mathbb{N}$ und für jedes $k \in \Lambda$ gilt $k \in \Lambda_l$, falls $k \geq l$. Mit Behauptung 1 folgt

$$\begin{aligned}||f_j - f_k||_{L^p} &\leq ||f_j - f_{j,\delta_l}||_{L^p} + ||f_{j,\delta_l} - f_{k,\delta_l}||_{L^p} \\ &+ ||f_{k,\delta_l} - f_k||_{L^p} < 3\varepsilon_l\end{aligned}$$

für $j, k \in \Lambda$, $j, k \geq l$; das heisst, $(f_k)_{k\in\Lambda}$ ist Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. ☐

Beispiel 6.3.1. Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 3$, mit Rand von der Klasse C^1, und sei $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$(Tf)(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy,$$

wobei $G\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar mit $G(x,y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und mit

$$\forall x \neq y\colon 0 \leq G(x,y) = G(y,x) \leq C|x-y|^{2-n},\ |\nabla G(x,y)| \leq C|x-y|^{1-n}.$$

Setze G fort durch $G(x,y) = 0$, falls $x \notin \Omega$.

Da für $0 < \alpha < n$ gilt $|x|^{\alpha-n} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p < \frac{n}{n-\alpha}$, erhalten wir $Tf \in L^2$ mit $||Tf||_{L^2} \leq C||f||_{L^2}$. Weiter gilt für $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \leq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}||Tf - \tau_h(Tf)||_{L^2} &\leq \Big\| \int_\Omega |G(x,y) - G(x+h,y)|\, |f(y)|\, dy \Big\|_{L^2} \\ &\leq C|h| \cdot ||\, |x|^{1-n} * |f|\, ||_{L^2} \leq C|h| \cdot ||f||_{L^2};\end{aligned}$$

vergleiche Korollar 4.2.1 der Vorlesung über Masstheorie. Nach Satz 6.3.2 ist der Operator T somit kompakt.

Falls wir T als Operator $T\colon C^0(\Omega) \to C^0(\Omega)$ auffassen, erhalten wir eine analoge Aussage mit Satz 6.3.1.

Bemerkung 6.3.2. Die eindeutig bestimmte Lösung u des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

hat eine Darstellung $u = Tf$ mit einem T wie in Beispiel 6.3.1.

6.4 Adjungierter Operator im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein $\mathbb{R}$-Hilbert-Raum mit kanonischem Isomorphismus $\mathcal{J}\colon H \to H^*$, wobei

$$\forall x \in H, y^* \in H^*\colon \langle y^*, x\rangle_{H^*\times H} = (\mathcal{J}^{-1}y^*, x)_H. \tag{6.4.1}$$

Sei weiter $A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert, $A^*\colon D_{A^*} \subset H^* \to H^*$ der zu A duale Operator.

Definition 6.4.1. *Der zu A* **adjungierte Operator** $A^T\colon D_{A^T} \subset H \to H$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^T} = \{y \in H;\ l_y\colon D_A \ni x \mapsto (y, Ax)_H = \langle \mathcal{J}y, Ax\rangle_{H^*\times H} \text{ ist stetig } \}$$

und $A^T y = \mathcal{J}^{-1} l_y$ *für alle* $y \in D_{A^T}$*; das heisst,*

$$\forall x \in D_A,\ y \in D_{A^T}\colon (A^T y, x)_H = l_y(x) = (y, Ax)_H. \tag{6.4.2}$$

Bemerkung 6.4.1. Offenbar hängen A^T und A^* wie folgt zusammen:

i) $y \in D_{A^T} \Leftrightarrow y^* = \mathcal{J} y \in D_{A^*}$, und weiter

ii) $\forall y \in D_{A^T}\colon \mathcal{J}(A^T y) = A^*(\mathcal{J} y)$; das heisst,

$$A^T = \mathcal{J}^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{J}. \tag{6.4.3}$$

Beispiel 6.4.1. Sei $H = \mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)\colon (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

und sei $A \in L(H)$ gegeben mit

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,\ 1 \le i \le n;$$

das heisst, A hat die Matrixdarstellung

$$a = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n\colon (y, Ax) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i x_j = (A^T y, x),$$

mit

$$(A^T y)_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i,\ 1 \le j \le n,$$

und A^T hat die Matrixdarstellung

$$a^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notation: Im weiteren schreiben wir – im Einklang mit der Lehrbuchliteratur – anstelle von A^T wieder A^*, wobei wir H und H^* implizit mittels $\mathcal{J}$ identifizieren. Die Gleichung, welche A^* auf einem Hilbert-Raum charakterisiert, ist also stets (6.4.2) – mit A^* anstelle von A^T.

Definition 6.4.2. *i) Ein Operator* $A\colon D_A \subset H \to H$ *heisst* **symmetrisch**, *falls* $A \subset A^*$, *das heisst, falls* $D_A \subset D_{A^*}$ *und falls gilt*

$$(Ay, x)_H = (y, Ax)_H, \ \forall x, y \in D_A.$$

ii) Ein Operator $A\colon D_A \subset H \to H$ *heisst* **selbstadjungiert**, *falls* $A = A^*$, *das heisst, falls* A *symmetrisch ist mit* $D_A = D_{A^*}$.

Bemerkung 6.4.2. Ein symmetrischer Operator wird auch als **formal selbstadjungiert** bezeichnet.

Beispiel 6.4.2. i) Sei $A \in L(H)$ symmetrisch. Dann ist A selbstadjungiert, da mit $H = D_A \subset D_{A^*} \subset H$ folgt, dass $D_A = D_{A^*} = H$.

ii) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann ist $id - T \in L(H)$ symmetrisch und nach i) selbstadjungiert,

Beispiel 6.4.3. Wir betrachten die Erweiterungen A_1, A_2, A_3 des Laplace-Operators $A_\infty\colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $A_\infty u = \Delta u$ für $u \in C_c^\infty(\Omega)$, auf einem glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$\begin{aligned} D_{A_1} &= C^2(\overline{\Omega}), \\ D_{A_2} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ D_{A_3} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ auf } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $A_\infty \subsetneqq A_3 \subsetneqq A_2 \subsetneqq A_1$, nach Satz 6.1.2 also

$$A_1^* \subset A_2^* \subset A_3^* \subset A_\infty^*.$$

Weiter gilt nach partieller Integration

$$(v, A_i u)_{L^2} = \int_\Omega v \Delta u \, d\mu = \int_\Omega \Delta v \cdot u \, d\mu = (A_i v, u)_{L^2} \tag{6.4.4}$$

für alle $u, v \in D_{A_i}$, falls $i = 2, 3$ oder $i = \infty$; das heisst, A_2, A_3 und A_∞ sind symmetrisch.

Zudem gilt (6.4.4) auch für $u \in D_{A_3}$, $v \in D_{A_1}$; das heisst,

$$D_{A_1} \subset D_{A_3^*},\ A_1 \subset A_3^*.$$

Somit ist $A_3^* \supset A_1 \supsetneqq A_3$ eine echte Erweiterung von A_3.

Bemerkung 6.4.3. Eine selbstadjungierte Erweiterung des Laplace-Operators erhalten wir im Sobolev-Raum $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$; vgl. Funktionalanalysis II.

6.5 Spektrum und Resolvente

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$, $A\colon D_A \subset X \to X$ linear.

Definition 6.5.1. *Die* **Resolventenmenge** *von A ist*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda \cdot id - A)\colon D_A \to X \text{ ist bijektiv mit } (\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)\}.$$

Die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heisst das **Spektrum** *von A.*

Bemerkung 6.5.1. i) Falls $\rho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen.

ii) Ist A abgeschlossen, $\lambda \cdot id - A$ bijektiv, so folgt $\lambda \in \rho(A)$, da $(\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)$ gemäss Satz 3.3.2.

iii) Statt $\lambda \cdot id - A$ schreiben wir der Einfachheit halber im folgenden auch $\lambda - A$, sowie $1 = id$.

Beweis. i) Sei $\lambda \in \rho(A)$, also $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$. Dann ist $(\lambda - A)^{-1}$ abgeschlossen; das heisst, die Menge

$$M = \{(x, y) \in X \times X;\ x = (\lambda - A)^{-1} y,\ y \in X\}$$

ist abgeschlossen. Jedoch gilt offenbar

$$M = \Gamma_{(\lambda - A)} = \{(x, \lambda x - Ax);\ x \in D_A\},$$

und die Abgeschlossenheit von M impliziert diejenige von A. $\square$

Definition 6.5.2. *Die* **Resolvente** *von A ist die Abbildung $R\colon \rho(A) \to L(X)$ mit*

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R_\lambda = (\lambda - A)^{-1} \in L(X).$$

Satz 6.5.1. *Sei $A\colon D_A \subset X \to X$, $z_0 \in \rho(A)$. Dann enthält $\rho(A)$ die offene Kreisscheibe*

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < 1/||R_{z_0}||_{L(X)}\}.$$

Insbesondere ist $\rho(A)$ offen, $\sigma(A)$ abgeschlossen und

$$\forall z \in \rho(A)\colon ||R_z||_{L(X)} \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}.$$

Weiter ist die Abbildung $z \mapsto R_z \in L(X)$ stetig in $\rho(A)$.

Beweis. Schreibe

$$(z - A) = (z - z_0) + (z_0 - A) = (1 + (z - z_0)R_{z_0})(z_0 - A).$$

Falls $z \in D$, so ist $1 + (z - z_0)R_{z_0}$ gemäss Satz 2.2.7 invertierbar mit

$$(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (z_0 - z)^n R_{z_0}^n,$$

also auch

$$R_z = (z - A)^{-1} = R_{z_0}(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} \in L(X);$$

vergleiche Satz 2.2.8.

Weiter folgt mit $(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} \to 1$ in $L(X)$ $(z \to z_0)$ offenbar auch

$$||R_z - R_{z_0}||_{L(X)} = ||R_{z_0}((1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} - 1)||_{L(X)} \to 0 \quad (z \to z_0).$$

□

Satz 6.5.2. *Falls $\lambda, \mu \in \rho(A)$, so gilt:*

i) $R_\lambda A \subset AR_\lambda = \lambda R_\lambda - id \in L(X)$;

ii) $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$;

iii) $R_\lambda \cdot R_\mu = R_\mu \cdot R_\lambda$.

Beweis. Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$\lambda R_\lambda - R_\lambda A = R_\lambda(\lambda - A) = id_{D_A} \subset id_X = (\lambda - A)R_\lambda = \lambda R_\lambda - AR_\lambda.$$

Insbesondere erhalten wir i) aus der Darstellung

$$R_\lambda A = \lambda R_\lambda - id_{D_A} \subset \lambda R_\lambda - id_X = AR_\lambda.$$

Weiter lesen wir ab

$$A(R_\mu - R_\lambda) = \mu R_\mu - \lambda R_\lambda,$$

also

$$(A - \mu)(R_\mu - R_\lambda) = (\mu - \lambda)R_\lambda,$$

und ii) folgt nach Komposition mit R_μ. Schliesslich erhalten wir iii) aus ii) durch Vertauschen von μ und λ. □

Bemerkung 6.5.2. Mit Satz 6.5.1 und Satz 6.5.2 ii) folgt, dass R auf $\rho(A)$ komplex differenzierbar ist mit $dR_\lambda/d\lambda = -R_\lambda^2$.

Definition 6.5.3. *Sei A abgeschlossen mit Spektrum $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Insbesondere enthält $\sigma(A)$ die Menge*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda - A \textit{ ist nicht injektiv }\}$$

der **Eigenwerte** *von A mit* **Eigenraum**

$$\ker(\lambda - A) = \{x \in D_A;\ Ax = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

$\sigma_p(A)$ heisst das **Punktspektrum** *von A. Die Menge*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A);\ \lambda - A \textit{ ist injektiv, } im(\lambda - A) \textit{ ist dicht }\}$$

heisst **kontinuierliches Spektrum** *von A. Schliesslich bezeichnen wir mit*

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$$

das **Restspektrum** *von A.*

Beispiel 6.5.1. Sei $X = \mathbb{C}^n$, $A \in L(X)$, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen der Rangformel sind äquivalent:

i) $\lambda - A$ ist injektiv,

ii) $\lambda - A$ ist surjektiv;

das heisst, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Nach Darstellung von A durch eine quadratische Matrix gilt überdies die Äquivalenz von i), ii) zu

iii) $p(\lambda) = \det(\lambda - A) \neq 0$.

Da das charakteristische Polynom p mindestens eine und höchstens n verschiedene Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt, folgt $\emptyset \neq \sigma(A) = \sigma_p(A)$, und $\sigma(A)$ enthält höchstens n Punkte. Weiter ist $\rho(A)$ ist nicht leer und liegt sogar dicht in $\mathbb{C}$.

Ein analoges Resultat gilt in einem beliebigen Hilbertraum H für einen kompakten, selbstadjungierten Operator $T \in L(H)$.

Beispiel 6.5.2. Sei H Hilbertraum, und sei $T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

(Vergleiche hierzu auch den Satz von Riesz-Schauder, Satz 6.7.2.)

Beweis. Nach Satz 6.2.3 hat der Operator $id - T$ abgeschlossenes Bild und gemäss Beispiel 6.4.2.ii) ist $id - T$ selbstadjungiert. Mit Satz 6.2.1 folgt

$$im(id - T) = ker(id - T)^{\perp},$$

und $1 \in \sigma(T)$ genau dann, wenn $1 \in \sigma_p(T)$.

In Satz 6.6.2 zeigen wir, dass $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Ersetzen wir T durch $\lambda^{-1}T$, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so folgt nach Multiplikation mit λ die Darstellung

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon im(\lambda - T) = ker(\lambda - T)^{\perp},$$

und die Behauptung folgt. □

Beispiel 6.5.3. Für den Shift-Operator $S \colon l^2 \to l^2$ mit

$$S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

gilt $0 \in \sigma(S)$, $0 \notin \sigma_p(S)$.

Beweis. S ist nicht surjektiv, offenbar aber injektiv. □

Satz 6.5.3. *Sei $A \in L(X)$. Dann ist $\rho(A) \neq \emptyset \neq \sigma(A)$, und es gilt:*

i) $|z| > r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow z \in \rho(A)$;

ii) $r_A = \sup_{z \in \sigma(A)} |z|$.

Beweis. i) Sei $|z| > r_A$. Setze $\tilde{A} = z^{-1}A \in L(X)$ mit $r_{\tilde{A}} < 1$. Aus Satz 2.2.7 folgt Invertierbarkeit von $1 - \tilde{A}$ und

$$\begin{aligned} R_z = (z - A)^{-1} = z^{-1}(1 - \tilde{A})^{-1} = z^{-1} \sum_{n \geq 0} \tilde{A}^n \\ = z^{-1} + z^{-2}A + z^{-3}A^2 + \ldots \in L(X). \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

ii) Mit i) folgt zunächst $r_A \geq \sup_{z\in\sigma(A)\cup\{0\}} |z| =: \sigma_0$. Es genügt daher zu zeigen, dass $r_A \leq \sigma_0$.

Behauptung 1. Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\, r > \sigma_0\colon A^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} z^n R_z\, dz, \tag{6.5.2}$$

wobei das Integral als Grenzwert geeigneter Riemann-Summen im Raum $L(X)$ zu verstehen ist.

Beweis. Offenbar ist (6.5.2) äquivalent zu

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\, x \in X,\, l \in X^*,\, r > \sigma_0\colon l(A^n x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} z^n\, l(R_z x)\, dz. \tag{6.5.3}$$

Für $|z| > r_A$ entwickle R_z gemäss (6.5.1). Auswertung an einem beliebigen Punkt $x \in X$ und Anwendung von $l \in X^*$ ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon z^n l(R_z x) = z^{-1}\sum_{k\geq 0} z^{n-k} l(A^k x).$$

Gliedweise Integration über $\partial B_r(0) \subset \mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes ergibt (6.5.3) für $r > r_A$.

Mit Bemerkung 6.5.2 folgt, dass die Abbildung

$$\rho(A) \ni z \mapsto l(R_z x) \in \mathbb{C} \tag{6.5.4}$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ holomorph ist. Gemäss dem Cauchyschen Integralsatz gilt daher (6.5.3) und damit auch (6.5.2) für jedes $r > \sigma_0$. □

Für $r > \sigma_0$ setze

$$M(r) = \max\{||R_z||_{L(X)};\ |z| = r\}.$$

Aus (6.5.2) folgt mit der Minkowski Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon ||A^n||_{L(X)} \leq r^{n+1} M(r),$$

also

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq r.$$

Da $r > \sigma_0$ beliebig war, folgt $r_A \leq \sigma_0$.

iii) Mit einem ähnlichen Argument folgt nun auch, dass $\sigma(A) \neq \emptyset$. Nehmen wir widerspruchsweise an, $\sigma(A) = \emptyset$, $\rho(A) = \mathbb{C}$, so ist die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion

$$z \mapsto f(z) = l(R_z x)$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ analytisch, und (6.5.1) ergibt

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \leq C \cdot \lim_{|z|\to\infty} |z|^{-1}\, ||(1 - z^{-1}A)^{-1}||_{L(X)} = 0.$$

Mit dem Satz von Liouville folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da l und x beliebig gewählt waren, erhalten wir $R_z = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$; jedoch gilt andererseits

$$\forall z \in \rho(A),\, x \in X\colon (z - A)R_z x = x,$$

und R_z ist für alle $z \in \rho(A)$ injektiv. □

Sei $A \in L(X)$. Weiter sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen mit $\sigma(A) \subset \Omega$.

Definition 6.5.4. *Eine Schar $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_L$ von Kurven $\gamma_l \colon S^1 \to \Omega$ der Klasse C^1, $1 \le l \le L$,* **umrundet** *$\sigma(A)$ in Ω, falls für eine Familie disjunkter offener Mengen $\Omega_l \subset \Omega$, $1 \le l \le L$, mit Rand von der Klasse C^1 gilt*

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{1 \le l \le L} \Omega_l, \quad \gamma_l = \partial\Omega_l,\ 1 \le l \le L.$$

Für eine Schar $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_L$ in Ω wie in Definition 6.5.4 und $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ setze

$$\int_\gamma f\, dz = \sum_{1 \le l \le L} \int_{\gamma_l} f\, dz$$

Lemma 6.5.1. *Falls die Schar γ die Menge $\sigma(A)$ in Ω umrundet, so gilt*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^n R_z\, dz. \tag{6.5.5}$$

Beweis. Gemäss (6.5.2) gilt die Behauptung für die Kurve $\gamma_0 = \partial B_r(0)$ in $\Omega_0 = B_{r_0}(0)$, wobei $r_A < r < r_0$ so gewählt sind, dass $Q := \cup_{1 \le l \le L} \Omega_l \subset B_r(0)$. Da $D := \Omega_0 \setminus Q \subset \rho(A)$ und daher $D \ni z \mapsto z^n R_z$ holomorph, liefert der Cauchysche Integralsatz die Identität

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon 0 = \int_{\partial D} z^n R_z\, dz = \int_{\gamma_0} z^n R_z\, dz - \int_\gamma z^n R_z\, dz,$$

und die Behauptung folgt. □

Lemma 6.5.2. *Falls die Schar γ die Menge $\sigma(A)$ in Ω umrundet, und falls $\alpha \in \rho(A)$, $\alpha \notin \Omega$, so gilt*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \colon (\alpha - A)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\alpha - z)^n R_z\, dz =: y_n. \tag{6.5.6}$$

Für $n \ge 0$ gilt (6.5.6) *für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Gemäss Lemma 6.5.1 gilt die Behauptung für $n = 0$.

Für $z \in \rho(A)$ schreibe

$$(\alpha - A)R_z = \big((z - A) + (\alpha - z)\big)(z - A)^{-1} = 1 + (\alpha - z)R_z.$$

Da wir für $A \in L(X)$ den Operator $\alpha - A$ mit dem Integral vertauschen dürfen, erhalten wir durch Anwenden von $\alpha - A$ auf die rechte Seite y_n von (6.5.6) mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes die Rekursionsformel

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \colon (\alpha - A)y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\alpha - z)^n\, dz + y_{n+1} = y_{n+1},$$

Da $\alpha \in \rho(A)$ erhalten wir nach Anwenden von R_α zudem die Identität

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \colon y_n = R_\alpha y_{n+1},$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion. □

Folgerung 6.5.1. Falls die Schar γ die Menge $\sigma(A)$ in Ω umrundet, und falls $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, $\alpha_m \in \rho(A)$, $\alpha_m \notin \Omega$, $c_m \in \mathbb{C}$, $k_m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le M$, so gilt für die (in Ω holomorphe) rationale Funktion

$$f(z) = p(z) + \sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m - z)^{-k_m}$$

die Identität

$$f(A) := p(A) + \sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m - A)^{-k_m} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)R_z\,dz. \tag{6.5.7}$$

Wie oben bezeichne

$$Gl(X) = \{T \in L(X);\ T \text{ ist bijektiv, } T^{-1} \in L(X)\}.$$

Satz 6.5.4. *(Spektralabbildungssatz) Sei $f(z) = p(z) + \sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m - z)^{-k_m}$ eine rationale Funktion wie in Folgerung 6.5.1. Dann gilt*

i) $f(A) \in Gl(X) \Leftrightarrow \forall z \in \sigma(A)\colon f(z) \neq 0$;

ii) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Beweis. i) "$\Leftarrow$": Sei $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(A)$. Dann gibt es eine offene Menge $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\sigma(A) \subset \Omega_1$, so dass die rationale Funktion $g = 1/f$ holomorph ist in Ω_1. Für eine Kurve γ_1, welche $\sigma(A)$ in Ω_1 umrundet, folgt mit $r(z) = f(z)g(z) = g(z)f(z) \equiv 1$ aus (6.5.7) mit Lemma 6.5.2 die Gleichung

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) = r(A) = 1 \in L(X).$$

Das heisst, $g(A) = f(A)^{-1} \in L(X)$.

"$\Rightarrow$": Falls $f(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \sigma(A)$, so gibt es eine rationale und in Ω holomorphe Funktion g mit $f(z) = g(z)(z - \lambda)$, $z \in \Omega$, und

$$f(A) = g(A)(A - \lambda) = (A - \lambda)g(A)$$

ist entweder nicht injektiv oder nicht surjektiv; also $f(A) \notin Gl(X)$.

ii) Für $\beta \in \mathbb{C}$ gilt wegen i) mit $g(z) := f(z) - \beta$ die Äquivalenz

$$g(A) = f(A) - \beta \notin Gl(X) \Leftrightarrow \exists z \in \sigma(A)\colon g(z) = f(z) - \beta = 0;$$

also

$$\beta \in \sigma(f(A)) \Leftrightarrow \beta \in f(\sigma(A)).$$

□

6.6 Spektraltheorie im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ mit hermiteschem Skalarprodukt

$$\forall x, y \in H\colon (x,y)_H = \overline{(y,x)_H},$$

und sei $A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert mit adjungiertem Operator A^*.

Welche Aussagen über das Spektrum von A kann man machen, falls A symmetrisch ist oder selbstadjungiert?

Satz 6.6.1. *Sei A symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte reell, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_p(A)$ mit zugehörigem Eigenvektor $0 \neq x \in \ker(\lambda - A) \subset D_A$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda \|x\|_H^2 &= (Ax,x)_H = (A^*x,x)_H \\ &= (x,Ax)_H = \overline{(Ax,x)_H} = \overline{\lambda}\|x\|_H^2;\end{aligned}$$

also $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Gilt dieselbe Aussage für das gesamte Spektrum? – Betrachte dazu das folgende Beispiel. Zuvor benötigen wir noch eine Definition.

Definition 6.6.1. *i) Die Funktion $f \in L^2(]0,1[)$ besitzt eine* **schwache Ableitung** *$f' \in L^2(]0,1[)$, falls $v =: f' \in L^2(]0,1[)$ existiert mit*

$$\forall g \in C_c^\infty(]0,1[)\colon \int_0^1 f g'\, dx = -\int_0^1 v g\, dx.$$

ii) Weiter sei

$$H^1(]0,1[) := \{f \in L^2(]0,1[);\ f \text{ besitzt eine schwache Ableitung } f' \in L^2\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2},\ f \in H^1(]0,1[).$$

Bemerkung 6.6.1. Es gilt $H^1(]0,1[) = \|\cdot\|_{H^1}\text{-clos}\big(C^1([0,1])\big)$ mit stetiger Einbettung $H^1(]0,1[) \hookrightarrow C^0([0,1])$. Weiter gilt

$$\forall f,g \in H^1(]0,1[)\colon fg \in H^1(]0,1[),\ (fg)' = f'g + fg',$$

und partielle Integration ist möglich; siehe Funktionalanalysis II.

Beispiel 6.6.1. Sei $H = L^2(]0,1[;\mathbb{C})$ mit Skalarprodukt

$$\forall f,g \in H\colon (f,g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\, dt,$$

und sei $A_\infty = i\frac{d}{dt}\colon C_c^\infty(]0,1[;\mathbb{C}) \subset H \to H$. Betrachte die folgenden Erweiterungen A_k von A_∞, $k = 1, \ldots, 4$, wobei

$$\begin{aligned}
D_{A_1} &= H^1 = H^1(]0,1[;\mathbb{C}),\\
D_{A_2} &= \{f \in H^1;\ f(0) = f(1)\} \quad \text{(periodische Randbedingung)},\\
D_{A_3} &= \{f \in H^1;\ f(0) = 0 = f(1)\} \quad \text{(Dirichlet Randbedingung)},\\
D_{A_4} &= \{f \in H^1;\ f(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

Natürlich setzen wir $A_k f = if'$ für $f \in D_{A_k}$. D_{A_1} ist dann offenbar der maximale Definitionsbereich, und es gilt $A_\infty \underset{\neq}{\subset} A_3 \underset{\neq}{\subset} A_2 \underset{\neq}{\subset} A_1$, $A_\infty \underset{\neq}{\subset} A_4$.

Behauptung 1. $A_3 \subset A_2 = A_2^* \subset A_3^*$; das heisst, A_3 ist symmetrisch, wegen $A_3 \underset{\neq}{\subset} A_2$ aber nicht selbstadjungiert, und A_2 ist selbstadjungiert.

Beweis. Die Aussage $A_2 \subset A_2^*$ folgt analog zu Beispiel 6.4.3. Es genügt daher, $A_2^* \subset A_2$ zu zeigen; alles weitere folgt aus Satz 6.1.2.

Sei $f \in D_{A_2^*}$. Für $g \in C_c^\infty(]0,1[) \subset D_{A_2}$ erhalten wir

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i \int_0^1 f\overline{g}'\, dt.$$

Da $f \in D_{A_2^*}$, können wir abschätzen

$$\sup\{\int_0^1 f\overline{g}'\, dt;\ g \in C_c^\infty,\ ||g||_{L^2} \le 1\} \le \sup_{||g||_{L^2} \le 1} (A_2^* f, g)_{L^2} = ||A_2^* f||_{L^2};$$

das heisst, $f \in H^1$ besitzt eine schwache Ableitung $f' \in L^2$, so dass

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = -i \int_0^1 f\overline{g}'\, dt = i \int_0^1 f'\overline{g}\, dt = (if', g)_{L^2}$$

für alle $g \in C_c^\infty(]0,1[)$, und $A_2^* f = if'$.

Für allgemeine $g \in D_{A_2}$ erhalten wir mit partieller Integration zusätzlich einen Randterm

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i \int_0^1 f\overline{g}'\, dt = i \int_0^1 f'\overline{g}\, dt - i(f\overline{g})|_{t=0}^1. \tag{6.6.1}$$

Da andererseits $A_2^* f = if'$, folgt jedoch auch in diesem Fall

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = i \int_0^1 f'\overline{g}\, dt,$$

mit (6.6.1) also

$$\forall g \in D_{A_2}\colon (f\overline{g})|_0^1 = (f(1) - f(0))\overline{g}(1) = 0.$$

Da $\overline{g}(1)$ beliebig ist, erhalten wir $f(0) = f(1)$, also $f \in D_{A_2}$. $\square$

Behauptung 2. Es gilt

i) $\sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) = \mathbb{C}$, $\rho(A_1) = \emptyset$;

ii) $\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = 2\pi\mathbb{Z}$, $\overline{\rho(A_2)} = \mathbb{C}$;

iii) $\sigma(A_3) = \mathbb{C}$, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$, $\rho(A_3) = \emptyset$;

iv) $\sigma(A_4) = \emptyset$, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$.

Beweis. i) Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f = e^{-i\lambda t} \in \ker(\lambda - A_1) \subset D_{A_1}$.

ii) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt analog, dass $f = e^{-2\pi ikt} \in D_{A_2} \cap \ker(2\pi k - A_2)$; das heisst, $2\pi\mathbb{Z} \subset \sigma_p(A_2) \subset \sigma(A_2)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in L^2$ erhält man alle Lösungen f der Gleichung

$$(\lambda - A_2)f = \Big(\lambda - i\frac{d}{dt}\Big)f = \lambda f - if' = g \tag{6.6.2}$$

mit der Variation-der-Konstanten-Formel

$$f(t) = ae^{-i\lambda t} + i\int_0^t e^{i\lambda(s-t)}g(s)\,ds,\ a \in \mathbb{C}. \tag{6.6.3}$$

Falls $f \in D_{A_2}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, so ist die Konstante $a \in \mathbb{C}$ in (6.6.3) eindeutig durch die Bedingung $f(0) = f(1)$ bestimmt. Aus der Gleichung

$$a = f(0) = f(1) = ae^{-i\lambda} + i\int_0^1 e^{i\lambda(s-1)}g(s)\,ds \tag{6.6.4}$$

folgt nämlich

$$a = (1 - e^{-i\lambda})^{-1} i\int_0^1 e^{i\lambda(s-1)}g(s)\,ds,$$

und mit einer Konstanten $C(\lambda) > 0$ erhalten wir zu $g \in L^2$ eine eindeutige Lösung $f \in D_{A_2}$ von (6.6.2) mit

$$||f||_{L^2} \le |a| + ||g||_{L^2} \le C(\lambda)\|g\|_{L^2}.$$

Somit gilt $\lambda \in \rho(A_2)$.

iii) Falls $A_3 f = if' = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so folgt $f(t) = ae^{-i\lambda t}$ und $a = 0$, falls $f \in D_{A_3}$; das heisst, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$.

Andererseits ist $\lambda - A_3$ für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ surjektiv. Für $g(s) = e^{-i\lambda s}$ folgt nämlich mit (6.6.3) und (6.6.4) für jede Lösung $f \in D_{A_3}$ von (6.6.2) zunächst $a = 0$ und

$$f(t) = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda s}g(s)\,ds = ite^{-i\lambda t},$$

also $f(1) = ie^{-i\lambda} \neq 0$ im Widerspruch zur Annahme $f \in D_{A_3}$.

iv) Wie im Falle von A_3 erhalten wir aus (6.6.3) für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in L^2(]0,1[;\mathbb{C})$ die Darstellung

$$f(t) = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda s}g(s)\,ds \in D_{A_4}$$

einer Lösung von (6.6.2); das heisst, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$. (Da $A_k \notin L(H)$, $1 \le k \le 4$, stehen die Ergebnisse i), iii), iv) nicht im Widerspruch zu Satz 6.5.3.) $\square$

Symmetrische Operatoren können demnach durchaus imaginäre Spektralanteile besitzen, jedoch gilt:

Lemma 6.6.1. *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die Abschätzung*

$$\forall u \in D_A \colon ||(z - A)u||_H \geq |Im(z)| \; ||u||_H ;$$

das heisst, für $z \notin \mathbb{R}$ ist $(z - A)$ stets injektiv. Falls $(z - A)$ zusätzlich surjektiv ist, so folgt $z \in \rho(A)$ und

$$||(z - A)^{-1}||_{L(H)} \leq \frac{1}{|Im(z)|}.$$

Beweis. Für $u \in D_A$ gilt wegen $A \subset A^*$

$$(u, Au)_H = (Au, u)_H = \overline{(u, Au)_H} \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für alle $u \in D_A$ die Abschätzung

$$|Im(z)| \; ||u||_H^2 = |Im(u, (z - A)u)_H| \leq |(u, (z - A)u)_H| \leq ||u||_H ||(z - A)u||_H ,$$

wie gewünscht. □

Beispiel 6.6.1 illustriert sehr schön den folgenden Satz, welcher die selbstadjungierten Operatoren durch ihr Spektrum charakterisiert.

Satz 6.6.2. *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

i) $A = A^*$;

ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;

iii) Es gibt $z_1, z_2 \in \rho(A)$ mit $Im(z_1) < 0 < Im(z_2)$.

Beweis. Wir zeigen iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii).

iii) $\Rightarrow$ ii): Sei $z_0 - A$ surjektiv, $Im(z_0) > 0$. Mit Lemma 6.6.1 folgt $z_0 \in \rho(A)$, und Satz 6.5.1 liefert zusammen mit Lemma 6.6.1

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < Im(z_0)\} \subset \rho(A).$$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \ Im(z) > 0\}$ lässt sich iterativ durch derartige Kreisscheiben überdecken. Analog erhalten wir $\{z \in \mathbb{C};\ Im(z) < 0\} \subset \rho(A)$.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $u \in D_{A^*}$. Da $\pm i \in \rho(A)$ nach Annahme, existiert $v \in D_A$ mit

$$(A^* - i)u = (A - i)v = (A^* - i)v,$$

letzteres wegen $A \subset A^*$. Es folgt $(u - v) \in \ker(A^* - i)$. Wähle nun $w \in D_A$ mit $(A + i)w = u - v$. Es folgt

$$||u - v||_H^2 = (u - v, (A + i)w)_H = ((A^* - i)(u - v), w)_H = 0 ;$$

das heisst, $u = v \in D_A$.

i) $\Rightarrow$ iii): Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Behauptung 1. $im(z-A)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $v_k = (z-A)u_k \to v$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ insbesondere symmetrisch ist, folgt mit Lemma 6.6.1 die Abschätzung

$$||u_k - u_l||_H \leq \frac{1}{|Im(z)|}||v_k - v_l|| \to 0 \quad (k, l \to \infty);$$

das heisst, $u_k \to u$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ abgeschlossen ist, folgt $u \in D_A$, und $v = (z-A)u \in im(z-A)$. Der Raum $im(z-A)$ ist somit abgeschlossen. □

Behauptung 2. $z - A$ ist surjektiv.

Beweis. Da $im(z-A)$ nach Behauptung 1 abgeschlossen, liefert Satz 6.2.1 zusammen mit der Annahme $A = A^*$ die Darstellung

$$im(z-A) = ker(z-A)^{\perp}.$$

Da $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, folgt $ker(z-A) = \{0\}$ mit Lemma 6.6.1, und $im(z-A) = H$. □

Mit den Behauptungen 1 und 2 folgt $z \in \rho(A)$, wie gewünscht. Damit ist der Satz nun vollständig bewiesen. □

6.7 Das Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$, $T \in L(H)$.

Definition 6.7.1. *Der Operator T heisst* **normal**, *falls gilt $TT^* = T^*T$; T heisst* **unitär**, *falls $T \in Gl(H)$ mit $T^* = T^{-1}$.*

Bemerkung 6.7.1. T ist normal $\Leftrightarrow \forall x \in H\colon ||Tx||_H = ||T^*x||_H$.

Beweis. Mit den Identitäten

$$\forall x \in H\colon (Tx, Tx)_H = (T^*Tx, x)_H$$

sowie

$$\forall x \in H\colon (T^*x, T^*x)_H = (x, TT^*x)_H = \overline{(x, TT^*x)_H} = (TT^*x, x)_H$$

folgt "$\Rightarrow$" unmittelbar.

"$\Leftarrow$": Die umgekehrte Richtung erhält man durch "Polarisieren". Aus

$$\begin{aligned}\forall x, y \in H\colon ||T(x+y)||_H^2 - ||T(x-y)||_H^2 &= 4Re(Tx, Ty)_H = 4Re(T^*Tx, y)_H \\ = ||T^*(x+y)||_H^2 - ||T^*(x-y)||_H^2 &= 4Re(T^*x, T^*y)_H = 4Re(TT^*x, y)_H.\end{aligned}$$

ergibt sich zunächst

$$\forall x, y \in H\colon Re((T^*T - TT^*)x, y)_H = 0.$$

Da $x, y \in H$ beliebig, folgt $T^*T = TT^*$. □

Beispiel 6.7.1. i) Falls T selbstadjungiert ist, so ist T normal.

ii) Falls T unitär ist, so ist T normal.

iii) Sei $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $|\lambda_k| \le r < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $l^2 = l^2_{\mathbb{C}}$, und sei $T\colon l^2 \to l^2$ definiert durch

$$T(a_1, a_2, \dots) = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots),\ a = (a_1, a_2, \dots) \in l^2.$$

Dann gilt

$$T^*(a_1, a_2, \dots) = (\overline{\lambda_1} a_1, (\overline{\lambda_2} a_2, \dots),$$

also

$$TT^*(a_1, a_2, \dots) = (|\lambda_1|^2 a_1, (|\lambda_2|^2 a_2, \dots) = T^*T(a_1, a_2, \dots),$$

und T ist normal. Weiter gilt $T \in L(l^2)$ mit $||T||_{L(l^2)} \le r$, und

$$T \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\colon \lambda_k \in \mathbb{R};$$
$$T \text{ unitär} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\colon |\lambda_k| = 1;$$
$$T \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lambda_k \to 0\ (k \to \infty).$$

Beweis. Wir zeigen nur die letzte Aussage. Nimm an, $r_0 = \inf_{k\in\Lambda} |\lambda_k| > 0$ für eine Folge $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar

$$B_{r_0}(0; Y) \subset T(B_1(0; X)),$$

wobei $Y = span\{e_k;\ k \in \Lambda\}$ unendlich-dimensional ist. Also ist T nicht kompakt.

Falls hingegen $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$, so gilt auch $\varepsilon_l := \sup_{k\ge l} |\lambda_k| \to 0$ $(l \to \infty)$. Sei $y^j = (y^j_k)_{k\in\mathbb{N}} = Tx^j$ mit $\|x^j\|_{l^2} \le 1$, also auch $\|y^j\|_{l^2} \le r$, $j \in \mathbb{N}$. OBdA dürfen wir annehmen, dass $x^j = (x^j_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w} x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(j \to \infty)$, also auch $x^j_k \to x_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt aber auch $y^j_k = \lambda_k x^j_k \to \lambda_k x_k = y_k$ $(j \to \infty)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = Tx \in l^2$, und wir erhalten

$$\limsup_{j\to\infty} \|y^j - y\|_{l^2} \le \varepsilon_l \limsup_{j\to\infty} \|x^j - x\|_{l^2},\ l \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $l \to \infty$ liefert $y^j \to y$ $(j \to \infty)$, und T ist kompakt. $\square$

Schliesslich gilt

Behauptung. $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_k;\ k \in \mathbb{N}\}}$.

Beweis. Offenbar gilt $\lambda_k \in \sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, $k \in \mathbb{N}$. Da $\sigma(T) = \overline{\sigma(T)}$, folgt "$\supset$".

"$\subset$": Falls andererseits $\lambda \notin \overline{\{\lambda_k;\ k \in \mathbb{N}\}}$, so existiert $\delta > 0$ mit $|\lambda - \lambda_k| > \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und für $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ mit

$$b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\lambda - T)a = ((\lambda - \lambda_k)a_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

gilt

$$a_k = b_k/(\lambda - \lambda_k),\ k \in \mathbb{N},\ \text{und } \|a\|_{l^2} \le \delta^{-1}\|b\|_{l^2}.$$

Damit folgt $(\lambda - T)^{-1} \in L(H)$, und $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

Satz 6.7.1. *$T \in L(H)$ normal $\Rightarrow ||T||_{L(H)} = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = r_T$.*

Beweis. Wir zeigen induktiv, dass gilt

Behauptung. $\forall n \in \mathbb{N}$: $||T^n||_{L(H)} = ||T||^n_{L(H)}$.

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich.

"$n \to n + 1$": Für $x \in H$ mit $||x||_H = 1$ folgt mit Bemerkung 6.7.1

$$\begin{aligned}||T^n x||^2_H &= (T^n x, T^n x)_H = (T^*T^n x, T^{n-1}x)_H \le ||T^*(T^n x)||_H ||T^{n-1}x||_H \\ &= ||T^{n+1}x||_H ||T^{n-1}x||_H \le ||T^{n+1}||_{L(H)} ||T^{n-1}||_{L(H)}.\end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme erhalten wir

$$\begin{aligned}||T||^{2n}_{L(H)} = ||T^n||^2_{L(H)} &= \sup_{x\in H,\ ||x||_H=1} ||T^n x||^2_H \\ &\le ||T^{n+1}||_{L(H)} ||T^{n-1}||_{L(H)} = ||T^{n+1}||_{L(H)} ||T||^{n-1}_{L(H)}\end{aligned}$$

also mit Satz 2.2.3

$$||T||^{n+1}_{L(H)} \le ||T^{n+1}||_{L(H)} \le ||T||^{n+1}_{L(H)},$$

und die Behauptung folgt. □

Mit Satz 6.5.3 erhalten wir nun

$$||T||_{L(H)} = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}_{L(H)} = r_T = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|,$$

wie gewünscht. □

Satz 6.7.2. *(Riesz-Schauder) Sei $0 \neq T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt*

i) es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, welche sich höchstens bei $\lambda = 0$ häufen, und zugehörige orthonormale Eigenvektoren e_k, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall x \in H : Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k e_k (x, e_k)_H;$$

ii) wir erhalten die orthogonale Zerlegung

$$H = ker(T) \oplus \overline{span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Bemerkung 6.7.2. $ker(T)$ muss nicht separabel sein.

Beweis von Satz 6.7.2. i) Nach Beispiel 6.5.2 und Satz 6.7.1 gilt

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} \subset \overline{B_{r_0}(0)},$$

wobei $r_0 = ||T||_{L(H)} < \infty$. Für $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ setze

$$X_\lambda = ker(\lambda - T).$$

Behauptung 1. $\forall \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\colon dim(X_\lambda) < \infty$.

Beweis. Für jedes $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ ist $\lambda \overline{B_1(0; X_\lambda)} = \overline{T(B_1(0; X_\lambda)}$ kompakt; nach Satz 2.1.4 also $dim(X_\lambda) < \infty$. □

Behauptung 2. $\forall r > 0\colon \sigma_p(T) \setminus B_r(0)$ ist endlich.

Beweis. Andernfalls existiert eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \sigma_p(T)$ mit $\lambda_k \to \lambda \neq 0$ $(k \to \infty)$, wobei $\lambda_k \neq \lambda_l$ $(k \neq l)$. Seien e_k zugehörige normierte Eigenvektoren mit $Te_k = \lambda_k e_k$, $||e_k||_H = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Aus

$$\lambda_k(e_k, e_l)_H = (Te_k, e_l)_H = (T^*e_k, e_l)_H = (e_k, Te_l)_H = \lambda_l(e_k, e_l)_H$$

folgt dann

$$(e_k, e_l)_H = 0 \quad (k \neq l). \tag{6.7.1}$$

Da T kompakt, enthält die Folge $(Te_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. OBdA dürfen wir annehmen, dass

$$y_k := Te_k \to y \quad (k \to \infty).$$

Mit $\lambda_k \to \lambda \neq 0$ $(k \to \infty)$ erhalten wir dann jedoch auch Konvergenz

$$e_k = \lambda_k^{-1} Te_k \to \lambda^{-1} y \quad (k \to \infty)$$

im Widerspruch zu (6.7.1). □

Da $\sigma_p(T) \setminus B_{1/k}(0)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach Behauptung 2 endlich ist, ist $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ abzählbar. Mit (6.7.1) erhalten wir die Beziehung

$$\forall \lambda, \mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\colon \lambda \neq \mu \Rightarrow X_\lambda \perp X_\mu.$$

Durch geeignete Normierung können wir erreichen, dass auch die Eigenvektoren e_k, e_l zu einem mehrfachen Eigenwert $\lambda = \lambda_k = \lambda_l$ orthonormal sind, und wir erhalten eine höchstens abzählbare Schar orthonormaler Eigenvektoren e_k, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$X := \overline{\oplus_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} X_\lambda} = \overline{span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Behauptung 3. Jedes $x \in X$ hat die Darstellung $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x, e_k)_H e_k$.

Beweis. Beachte, dass für die Partialsummen $x_K = \sum_{k\leq K} (x, e_k)_H e_k$ der Reihe wegen Orthonormalität der $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$||x_K||_H^2 = \sum_{k\leq K} |(x, e_k)_H|^2 = (x_K, x)_H \leq ||x_K||_H ||x||_H;$$

also

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |(x, e_k)_H|^2 = \lim_{K\to\infty} ||x_K||_H^2 \leq ||x||_H^2 < \infty,$$

und

$$||x_K - x_L||_H^2 = \sum_{K<k\leq L} |(x, e_k)_H|^2 \to 0 \quad (K \leq L \to \infty).$$

Somit existiert $y := \lim_{K\to\infty} x_K$. Da weiter gilt $(x - y, e_k)_H = 0$ für jedes k, und da $x, y \in X = \overline{span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}}$, folgt $x = y = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x, e_k)_H e_k$. □

Mit Behauptung 3 und Stetigkeit von T erhalten wir nun auch die gewünschte Identität

$$Tx = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x, e_k)_H Te_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k (x, e_k)_H e_k.$$

ii) Sei $Y = X^\perp \subset H$. Nimm an, $Y \neq \{0\}$. Wir zeigen: $Y = ker(T)$.

Behauptung 4. $T(Y) \subset Y$.

Beweis. Für $y \in Y$ gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon (e_k, Ty)_H = (T^* e_k, y)_H = (Te_k, y)_H = \lambda_k (e_k, y)_H = 0;$$

also $Ty \in span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = X^\perp = Y$. □

Setze $T_0 = T_{|_Y} \in L(Y)$. Dann ist T_0 kompakt und selbstadjungiert; also

$$\sigma(T_0) \subset \sigma_p(T_0) \cup \{0\}.$$

Sei $\lambda_0 \in \sigma_p(T_0)$ mit zugehörigem Eigenvektor $0 \neq e_0 \in Y \subset H$ mit

$$T_0 e_0 = Te_0 = \lambda_0 e_0.$$

Dann ist $\lambda_0 = 0$, oder $e_0 \in X_{\lambda_0} \subset X$, und $e_0 \in X \cap Y = \{0\}$. Also $\lambda_0 = 0$, und Satz 6.7.1 ergibt

$$||T_0||_{L(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T_0)} |\lambda| = 0;$$

das heisst, $Y = ker(T)$. □

Bemerkung 6.7.3. Falls T **positiv definit** ist im Sinne, dass gilt

$$\forall x \in H \setminus \{0\}\colon (x, Tx)_H > 0,$$

so ist $ker(T) = \{0\}$, und es gilt $\lambda > 0$ für jedes $\lambda \in \sigma(T)$. Die in absteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \ldots$ erhält man dann mit dem **Courant-Fischerschen Minimax-Prinzip**:

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \lambda_k = \sup_{M \subset H \ linear,\ dim M \geq k} \ \inf_{x \in M,\ ||x||_H = 1} (x, Tx)_H =: \mu_k.$$

Beweis. "$\lambda_k \leq \mu_k$": Wähle $M = M_k := span\{e_j;\ 1 \leq j \leq k\}$ mit

$$\begin{aligned}(x, Tx)_H = (Tx, x)_H = (\sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j (x, e_j)_H e_j, x)_H &= \sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j |(x, e_j)_H|^2 \\ \geq \lambda_k \sum_{1 \leq j \leq k} |(x, e_j)_H|^2 = \lambda_k ||x||_H^2 = \lambda_k.\end{aligned}$$

für alle $x \in M$ mit $||x||_H = 1$.

"$\lambda_k \geq \mu_k$": Sei $M \subset H$ linear mit $dim M \geq k$. Nimm zunächst an, es gibt $x_0 \in M$ mit $||x_0||_H = 1$ und $x_0 \perp M_k$. Dann können wir abschätzen

$$\begin{aligned}\inf_{x \in M,\ ||x||_H = 1} (x, Tx)_H \leq (x_0, Tx_0)_H = (Tx_0, x_0)_H &= (\sum_{l > k} \lambda_l (x_0, e_l)_H e_l, x_0)_H \\ = \sum_{l > k} \lambda_l |(x_0, e_l)_H|^2 \leq \lambda_k \sum_{l > k} |(x_0, e_l)_H|^2 &= \lambda_k ||x_0||_H^2 = \lambda_k,\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt in diesem Fall.

Andernfalls ist $\pi_k \colon M \to M_k$ bijektiv, wobei wir mit π_k die Einschränkung der orthogonalen Projektion $H \to M_k$ auf M bezeichnen. Betrachte den Vektor $x = \pi_k^{-1} e_k = e_k + y_k \in M$, wobei $y_k \perp M_k$. Es gilt

$$\begin{aligned}(x, Tx)_H &= (e_k + y_k, Te_k + Ty_k)_H \\ &= (e_k, Te_k)_H + (y_k, Te_k)_H + (e_k, Ty_k)_H + (y_k, Ty_k)_H,\end{aligned}$$

wobei

$$(y_k, Te_k)_H = \lambda_k (y_k, e_k)_H = 0, \ (e_k, Ty_k)_H = (Te_k, y_k)_H = 0,$$

und – wie eben gezeigt – mit

$$(y_k, Ty_k)_H \leq \lambda_k ||y_k||_H^2;$$

das heisst,

$$(x, Tx)_H = (e_k, Te_k)_H + (y_k, Ty_k)_H \leq \lambda_k (1 + ||y_k||_H^2) = \lambda_k ||x||_H^2.$$

Es folgt

$$\inf_{x \in M, \, ||x||_H = 1} (x, Tx)_H = \inf_{x \in M, \, x \neq 0} \frac{(x, Tx)_H}{||x||_H^2} \leq \lambda_k.$$

□