Funktionalanalysis I und II

Prof. Dr. Michael Struwe

Herbstsemester 2013/Frühlingssemester 2014

ETH Zürich

Worum geht es?

Grob gesagt, geht es in dieser Vorlesung um die Auflösung linearer Gleichungssysteme der Art

$$Ax = y,$$

wobei $A\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung ist zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen X und Y und wo zu gegebenem $y \in Y$ eine Lösung $x \in X$ gesucht wird.

Beispiel Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$. Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

kann man auffassen als Gleichung der Form $Au = f$ mit $X = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $A\colon H^2 \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Zusätzlich zur linearen Struktur des Problems bedarf es im Fall unendlicher Dimension weiterer analytischer und geometrischer Strukturen, insbesondere spielen Vollständigkeit, Kompaktheit, beziehungsweise Konvexität eine Rolle. Je nachdem ist daher der "richtige" Rahmen für die mathematische Behandlung ein normierter Vektorraum (Linearität) oder ein metrischer Raum (Vollständigkeit, Kompaktheit), vielleicht auch ein "lokal konvexer topologischer Vektorraum", in dieser Vorlesung jedoch meist ein Banachraum oder sogar ein Hilbertraum.

Wie das Beispiel zeigt, genügen für die Anwendungen die klassischen Funktionenräume allein nicht. In der Vorlesung "Funktionalanalysis II" werden die für die Behandlung partieller Differentialgleichungen fundamentalen Sobolev-Räume eingeführt und die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen entwickelt

Die Vorlesung stützt sich auf die grosse verfügbare Lehrbuchliteratur, vor allem jedoch auf die nachfolgend aufgeführten Texte. Das hier vorliegende Skript zu meiner Vorlesung im akademischen Jahr 2013/14 ist eine überarbeitete und leicht erweiterte Fassung des Skriptums zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Jahr 2007/08. Auch für die vorliegende neue Fassung erhielt ich wieder zahlreiche hilfreiche Kommentare von Studierenden und Assistierenden, die ich sehr dankbar aufgenommen habe. Insbesondere danke ich den Herren Samuel Stark und Andreas Wieser für ihre detaillierten und sorgfältigen Hinweise.

Michael Struwe — Zürich, September 2014

Literaturverzeichnis

[1] Alt, Hans Wilhelm: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1985.

[2] Bachmann, George; Narici, Lawrence: *Functional analysis*, Academic Press, 1966.

[3] Brezis, Haim: *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[4] Dunford, Nelson; Schwartz, Jacob: *Linear operators*, Wiley, 1988.

[5] Evans, Lawrence Craig: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, 2. Auflage, American Mathematical Society, 2010.

[6] Giaquinta, Mariano: *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.

[7] Rudin, Walter: *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[8] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis*, Springer, 4. Auflage, 2002.

[9] Yosida, Kosaku: *Functional analysis*, Nachdruck der 6. Auflage von 1980, Springer, Classics in Mathematics, 1995.

[10] Zehnder, Eduard: *Skript zur Vorlesung über Funktionalanalysis*, Mitschrift von Christian Frei: http://christianfrei.gmxhome.de/

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Funktionalanalysis I

Kapitel 1

Vollständigkeit, Baire-Kategorie

1.1 Ein "nichtlineares" Problem

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, und für jedes $x \in [0,1]$ existiere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

Ist f dann in mindestens einem Punkt x_0 stetig? – und liegt damit, durch Iteration des Arguments in Teilintervallen der Länge $\frac{1}{n}, n \in N$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f sogar dicht in $[0,1]$?

Baire fand die geniale Lösung dieses Problems auf dem Umweg über das für die Funktionalanalysis äusserst fruchtbare Konzept der Baire Kategorie .

1.2 Metrische Räume

Sei (M,d) ein metrischer Raum; das heisst, $d\colon M\times M \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

i) $d(x,y) \geq 0$, "=" gdw. $x = y$ (Definitheit),

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecks-Ungleichung).

Beispiel 1.2.1. i) Jede Teilmenge eines normierten Raums $(X, ||\cdot||)$ kann in kanonischer Weise als metrischer Raum mit Metrik

$$d(x,y) = ||x - y||$$

aufgefasst werden; zum Beispiel $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

ii) Sei $S = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}; x_k \in \mathbb{R}\}$ der Raum aller Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$. Durch

$$d((x_k),(y_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

wird eine Metrik auf S erklärt.

Wir wiederholen kurz die wichtigsten topologischen Begriffe:

i) $\Omega \subset M$ heisst **offen**, falls gilt

$$\forall x \in \Omega\, \exists r > 0\colon B_r(x) = \{y \in M; d(x,y) < r\} \subset \Omega$$

ii) $A \subset M$ heisst **abgeschlossen**, falls $A^c = M \setminus A$ offen ist.

Für $\Omega \subset M$ sind ferner definiert:

iii) $\overset{\circ}{\Omega} = \bigcup_{G\subset\Omega,\ G \text{ offen}} G$: der **offene Kern** von Ω,

iv) $\overline{\Omega} = \bigcap_{A\supset\Omega,\ A \text{ abgeschlossen}} A$: die **abgeschlossene Hülle** von Ω,

v) $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$: der **Rand** von Ω. Somit wird $\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$ disjunkt zerlegt.

vi) $\Omega \subset M$ heisst **dicht**, falls $\overline{\Omega} = M$, das heisst, falls

$$\forall B = B_r(x) \subset M\colon B \cap \Omega \neq \emptyset. \tag{1.2.1}$$

vii) $\Omega \subset M$ heisst **nirgends dicht**, falls $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \emptyset$, das heisst, falls

$$\forall B = B_r(x) \subset M\colon B \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset. \tag{1.2.2}$$

Für das folgende ist insbesondere von Bedeutung:

Satz 1.2.1. *Sei $U \subset M$, $A = U^c = M \setminus U$. Es sind äquivalent:*

i) U ist offen und dicht;

ii) A ist abgeschlossen und nirgends dicht.

Beweis. *i) $\Rightarrow$ ii):* Sei U offen und dicht. Dann ist $A = U^c$ abgeschlossen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \setminus \overline{A} = B \setminus A = B \cap U \neq \emptyset.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei A abgeschlossen und nirgends dicht. Dann ist $U = A^c$ offen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \cap U = B \setminus A = B \setminus \overline{A} \neq \emptyset.$$

□

Diese Begriffe sind natürlich bereits auf der Stufe eines topologischen Raumes erklärt. Falls (M, d) metrisch ist, so gibt es äquivalente Kriterien mit Folgen in M; zum Beispiel gilt

Satz 1.2.2. *$A \subset M$ ist abgeschlossen, gdw. für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A und $x \in M$ gilt:*

$$x_k \to x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Ein erst auf der Stufe metrischer Räume definierter Begriff ist der Begriff einer Cauchy-Folge und der Begriff der Vollständigkeit.

Definition 1.2.1. *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine* **Cauchy-Folge** *in M, falls*

$$d(x_k, x_l) \to 0 \ (k, l \to \infty).$$

Definition 1.2.2. *(M, d) heisst* **vollständig** *, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M konvergiert.*

Beispiel 1.2.2. i) $C^0([0,1])$ mit der von der Supremumsnorm

$$||f||_{C^0} = \max_{0\le t\le 1} |f(t)|$$

induzierten Metrik ist vollständig.

ii) Die Räume $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, sowie $C^m(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}_0$, sind vollständig.

iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ mit kompakten $K_j \subset K_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^0(\Omega)$ mit der Metrik

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||f-g||_{C^0(K_j)}}{1 + ||f-g||_{C^0(K_j)}}$$

analog zu Beispiel 1.2.1 ii) vollständig. (Die von d induzierte Topologie auf $C^0(\Omega)$ heisst **compact-open topology**.)

1.3 Baire-Kategorie

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $M \neq \emptyset$.

Satz 1.3.1. *Falls (M, d) vollständig ist, so gelten die folgenden (äquivalenten) Aussagen*

i) Sei $U_j \subset M$ offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ dicht in M.

ii) Falls $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^\circ \neq \emptyset$ mit abgeschlossenen $A_j, j \in \mathbb{N}$, so gibt es mindestens ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$. Insbesondere gilt:

iii) Falls $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit abgeschlossenen $A_j, j \in \mathbb{N}$, so gibt es mindestens ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$.

Beispiel 1.3.1. Die Beispiele

i) $M = \mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$

und

ii) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$

mit $A_x = \{x\} = \overline{A}_x$ und $\mathring{A}_x = \emptyset$ zeigen, dass in Teil ii) des Satzes die Annahmen der Abzählbarkeit der Familie (A_j) und die Vollständigkeit von M notwendig sind.

Beweis. i) Aufgrund der Charakterisierung (1.2.1) dichter Mengen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung: Für $x \in M, r > 0$ gilt stets $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$.

Beweis. Seien $x \in M, r > 0, B = B_r(x)$. Konstruiere $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ induktiv, wie folgt.

a) Da U_1 dicht und offen, gilt

$$U_1 \cap B \neq \emptyset, U_1 \cap B \text{ offen.}$$

Wähle $x_1 \in U_1 \cap B, 0 < r_1 < \frac{1}{2}$ mit

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{2r_1}(x_1) \subset U_1 \cap B. \tag{1.3.1}$$

b) Seien $x_1, \ldots, x_{j-1} \in M, r_1, \ldots, r_{j-1}$ bereits bestimmt. Beachte, dass wie oben gilt

$$U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \neq \emptyset, \quad U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \text{ offen.}$$

Wähle $x_j \in U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}), 0 < r_j < 2^{-j}$ mit

$$\overline{B_{r_j}(x_j)} \subset B_{2r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}). \tag{1.3.2}$$

Dann erhalten wir für alle $j > k \in \mathbb{N}$ die Kette von Inklusionen

$$x_j \in B_{r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset \ldots \subset B_{r_k}(x_k), \tag{1.3.3}$$

also insbesondere

$$d(x_j, x_k) \leq r_k < 2^{-k} \to 0 \quad (j \geq k \to \infty);$$

das heisst, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig, existiert

$$x^* = \lim_{j\to\infty} x_j,$$

und nach Grenzübergang $j \to \infty$ in (1.3.3) folgt mit (1.3.2)

$$\forall k\colon x^* \in \overline{B_{r_k}(x_k)} \subset U_k.$$

Insbesondere erhalten wir $x^* \in U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Für $k = 1$ liefert (1.3.1) zudem $x^* \in U_1 \cap B \subset B$, also

$$x^* \in U \cap B \neq \emptyset,$$

wie gewünscht. □

i) ⇒ iii): (indirekt) Widerspruchsweise nehmen wir an

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

mit abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$. Setze

$$U_j = A_j^c = M \setminus A_j, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 1.2.1 ist U_j offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$. Nach Annahme gilt jedoch

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Big)^c = \emptyset$$

im Widerspruch zu i).

iii)⇒ ii): Betrachte den vollständigen metrischen Raum $(L, d) = (\overline{B_r(x)}, d)$, wo $B_{2r}(x) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und benutze iii), angewandt auf die Mengen $L \cap A_j$, $j \in \mathbb{N}$.

(ii) ⇒ i): Übung. □

Definition 1.3.1. *(Baire Kategorie)*

i) $A \subset M$ heisst **mager** *oder von* **1. Baire Kategorie***, falls $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit nirgends dichten Mengen A_j, $j \in \mathbb{N}$; $Kat(A) = 1$.*

ii) $A \subset M$ heisst **fett** *oder von* **2. Baire Kategorie***, falls A nicht von 1. Baire Kategorie ist; $Kat(A) = 2$.*

iii) $\Omega \subset M$ heisst **residuell***, falls $\Omega^c = A$ mager ist.*

Beispiel 1.3.2. i) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \subset \mathbb{R}$ ist mager.

ii) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

iii) Abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind mager.

Frage: Gibt es überhaupt fette Mengen?

Satz 1.3.2. *(Baire) Sei (M, d) vollständig. Dann gilt:*

i) $Kat(M) = 2$

ii) $Kat(A) = 1 \Rightarrow Kat(A^c) = 2$, und A^c ist dicht in M.

iii) $\emptyset \neq U$ offen $\Rightarrow Kat(U) = 2$.

Beweis. i) Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3.1 iii).

ii) Falls $Kat(A) = Kat(A^c) = 1$, so wäre $Kat(M) = 1$ gemäss Beispiel 1.3.1 iii), also $Kat(A^c) = 2$. Sei

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$$

mit nirgends dichten $A_j, j \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_j = (\overline{A_j})^c$ offen und dicht, und nach

Satz 1.3.1 i) ist

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \Big)^c \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Big)^c = A^c$$

dicht.

iii) Wäre $Kat(U) = 1$, so wäre gemäss ii) die Menge $U^c = A = \overline{A}$ dicht, also $A = M$, $U = \emptyset$. □

"Typische" Beispiele magerer, beziehungsweise fetter Mengen sind somit die Teilmengen $\mathbb{Q}$, beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von $M = \mathbb{R}$. Beachte, dass gilt

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset.$$

Jedoch scheint es einen Zusammenhang mit dem Lebesgueschen Mass zu geben. Ist diese intuitive Vorstellung richtig?

Fragen: Sind Lebesgue-Nullmengen $A \subset \mathbb{R}$ (im Baireschen Sinne) "mager"? Haben magere Mengen $A \subset \mathbb{R}$ stets verschwindendes Lebesgue-Mass?

Beide Fragen sind mit "Nein" zu beantworten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3.3. Sei $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, und für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$U_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]q_k - 2^{-(j+k+1)}, q_k + 2^{-(j+k+1)}[$$

mit

$$\mathcal{L}^1(U_j) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-(j+k)} = 2^{-j}.$$

Die Mengen U_j sind offen und wegen

$$\overline{U_j} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

auch dicht. Also ist $A_j = U_j^c$ nirgends dicht, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mager und daher $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = A^c$ fett nach Satz 1.3.2, jedoch gilt $\mathcal{L}^1(U) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^1(U_j) = 0$.

1.4 Erste Anwendung

Der Satz von Baire ist grundlegend für die Theorie linearer Gleichungen in Banach-Räumen. Als erste Anwendung stellen wir hier jedoch die Lösung des nichtlinearen Problems aus Abschnitt 1 vor.

Satz 1.4.1. *(Baire) Sei (M, d) vollständig, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon M \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, und es existiere der punktweise Limes*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R}$$

für jedes $x \in M$. Dann ist

$$R = \{x; f \text{ ist stetig an der Stelle } x\}$$

eine residuelle Menge, insbesondere also dicht in M.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ setze

$$P_{n,\varepsilon} = \{x;\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\}$$

und weiter

$$R_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P_{n,\varepsilon})^\circ.$$

Beachte, dass $R_\delta \subset R_\varepsilon$ für $\delta \le \varepsilon$.

Behauptung. $U := \bigcap_{j=1}^{\infty} R_{1/j} = R$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f.

Beweis. "$R \subset U$". Sei f in x_0 stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $r_0 > 0, n_0 = n_0(\varepsilon), r_n > 0$ $(n \ge n_0)$ mit

$$\sup_{x \in B_{r_0}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$$

und

$$\sup_{n \ge n_0} |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

sowie

$$\sup_{x \in B_{r_n}(x_0)} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$$

Dann folgt für $n \ge n_0, r < \min\{r_0, r_n\}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B_r(x_0);$$

also $B_r(x_0) \subset P_{n,\varepsilon}, x_0 \in \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon} \subset R_\varepsilon$. Also $x_0 \in U$.

"$U \subset R$". Sei f in x_0 unstetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f = \sup_{B_r(x_0)} f - \inf_{B_r(x_0)} f > 3\varepsilon, \forall r > 0.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $r_n > 0$ mit

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n < \varepsilon, \forall r < r_n.$$

Schätze ab für $r < r_n$

$$\begin{aligned} 2 \sup_{B_r(x_0)} |f_n - f| &\ge \sup_{x,y \in B_r(x_0)} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \\ &\ge \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f - \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n > 2\varepsilon; \end{aligned}$$

das heisst

$$x_0 \notin \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit $x_0 \notin R_\varepsilon$ für $\varepsilon < \varepsilon_0(x_0)$, daher auch $x_0 \notin U$. □

Behauptung. R_ε ist offen und dicht für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Offenbar ist R_ε offen, $\varepsilon > 0$. Betrachte für $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$F_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \le \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Beachte, dass mit $f_{n+k}(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$ folgt $F_{n,\varepsilon} \subset P_{n,\varepsilon}$. Wegen $f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$ gilt zudem $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} = M, \forall \varepsilon > 0$. Weiter ist

$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen, also $F_{n,\varepsilon} = \mathring{F}_{n,\varepsilon} \cup \partial F_{n,\varepsilon}$ und daher

$$\left(F_{n,\varepsilon} \setminus \mathring{F}_{n,\varepsilon}\right)^{\circ} = (\partial F_{n,\varepsilon})^{\circ} = \emptyset.$$

Setze $A_{n,\varepsilon} = \partial F_{n,\varepsilon}$. Dann ist $A_{n,\varepsilon}$ abgeschlossen und nirgends dicht und liefert die magere Menge

$$A_{\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{n,\varepsilon} \setminus \mathring{F}_{n,\varepsilon}) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{F}_{n,\varepsilon} \supset M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{P}_{n,\varepsilon} = M \setminus R_{\varepsilon}.$$

Satz 1.3.2 liefert die Behauptung. □

Setze nun

$$U_j = R_{1/j}, A_j = R_{1/j}^c.$$

Dann ist $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mager, also

$$R = U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = A^c$$

residuell, insbesondere dicht nach Satz 1.3.2 ii). □

Umgekehrt kann man fragen, wann sich eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise durch stetige Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ approximieren lässt.

Beispiel 1.4.1. Die Funktion $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ ist nirgends stetig, also nicht punktweise durch stetige f_n approximierbar.

Weiter kann man fragen, ob/unter welchen Bedingungen eine Funktion $f \in L^1([0,1])$ einen Vertreter $\tilde{f}$ mit obiger Eigenschaft besitzt. Kandidaten für (f_n) wären in diesem Falle

a) die Mittel (der durch $f \equiv 0$ ausserhalb forgesetzten Funktion f), mit

$$f_n(x) = n \int_{x-\frac{1}{2n}}^{x+\frac{1}{2n}} f(y)\, dy \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

für fast alle $x \in [0,1]$ und insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt, oder

b) die **Fourier-Reihe** der periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion f. OBdA sei die Periode auf 2π gestreckt. Setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

und definiere

$$f_n(x) = \sum_{|k| \le n} a_k e^{ikx}.$$

Vergleiche dazu das Konvergenzkriterium von Dini:

Satz 1.4.2. *(Dini) Falls für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty,$$

so gilt für die obige Fourier-Reihe

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

Eine weitere Anwendung liefert

Satz 1.4.3. *(Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit) Sei (M, d) vollständig, $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_\lambda \colon M \to \mathbb{R}$, und sei $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$* **punktweise** *beschränkt in dem Sinne, dass*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(x)| < \infty, \forall x \in M.$$

Dann gibt es eine offene Kugel $B \subset M$ mit

$$\sup_{\lambda \in \Lambda,\, x \in B} |f_\lambda(x)| < \infty;$$

das heisst, $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist auf B **gleichmässig** *beschränkt.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere die abgeschlossene Menge

$$A_k = \{x \in M;\ \forall \lambda \in \Lambda \colon\ |f_\lambda(x)| \le k\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{\{x;\ |f_\lambda(x)| \le k\}}_{\text{abgeschlossen, da } f_\lambda \text{ stetig}}$$

mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = M$. Da M vollständig, gibt es gemäss Satz 1.3.1 iii) ein k_0 mit $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$. Wähle $B \subset A_{k_0}$. □

Falls die Funktionen f_λ lineare Abbildungen auf einem Vektorraum sind, erhält man aus Satz 1.4.3 ein Kriterium für die gleichmässige Beschränktheit der f_λ auf einer Kugel um 0, das heisst für die gleichmässige Stetigkeit der f_λ. Es liegt daher nahe, nun auch die lineare Struktur einzubeziehen.

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

2.1 Normierte Räume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $||\cdot||\colon X \to \mathbb{R}$ eine Norm auf X; das heisst,

i) $||x|| \geq 0$, "$=$" gdw. $x = 0$ (Definitheit),

ii) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (positive Homogenität),

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung).

Mit der von $||\cdot||$ induzierten Metrik

$$d(x, y) = ||x - y||$$

ist X dann auch ein metrischer Raum.

Definition 2.1.1. $(X, ||\cdot||)$ *heisst ein* **Banachraum**, *falls X bezüglich d vollständig ist.*

Bemerkung 2.1.1. i) Die Norm ist (Lipschitz-)stetig auf X, da

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||, \forall x, y \in X.$$

ii) Die Vektorraumoperationen sind ebenfalls stetig (Übung).

Beispiel 2.1.1. i) Sei M eine Menge, $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$B(M, X) = \{f\colon M \to X; \sup_{t \in M} ||f(t)||_X < \infty\}$$

ein Vektorraum mit der Norm

$$||f||_{B(M,X)} = \sup_{t \in M} ||f(t)||_X.$$

ii) $B(M, X)$ ist vollständig, wenn X vollständig ist.

Beweis. i) Mit den punktweise definierten Vektorraum-Verknüpfungen

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda f)(t) = \lambda f(t), t \in M$$

wird $B(M, X)$ zu einem Vektorraum. Dabei benutzen wir auch die Dreiecks-Ungleichung und die Homogenität der Norm. Die Eigenschaften i) und ii) einer Norm sind trivialerweise erfüllt; bezüglich iii) beachte

$$\begin{aligned} ||f+g||_{B(M,X)} &= \sup_{t\in M} ||f(t)+g(t)||_X \le \sup_{t\in M}(||f(t)||_X + ||g(t)||_X) \\ &\le ||f||_{B(M,X)} + ||g||_{B(M,X)}. \end{aligned}$$

ii) Falls X vollständig ist, so sind Cauchy-Folgen (f_k) in $B(M, X)$ punktweise konvergent, denn für jedes $t \in M$ ist wegen

$$||f_j(t) - f_k(t)||_X \le ||f_j - f_k||_{B(M,X)} \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

auch die Folge $(f_k(t))$ eine Cauchy-Folge und es existiert $f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)$ mit

$$\begin{aligned} ||f - f_k||_{B(M,X)} &= \sup_{t\in M} \lim_{j\to\infty} ||f_j(t) - f_k(t)||_X \\ &\le \limsup_{j\to\infty} ||f_j - f_k||_{B(M,X)} \to 0 \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $f \in B(M, X)$. □

Als Anwendung von Beispiel 2.1.1 zeigen wir, dass sich jeder metrische Raum (M, d) "isometrisch" in einen vollständigen metrischen Raum (M^*, d^*) einbetten lässt.

Seien $(M, d), (M^*, d^*)$ metrische Räume, $\Phi\colon M \to M^*$.

Definition 2.1.2. Φ *heisst* **Isometrie** *, falls gilt*

$$d^*(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Bemerkung 2.1.2. Eine Isometrie $\Phi\colon M \to M^*$ ist (Lipschitz) stetig und injektiv, und $\Phi^{-1}\colon \Phi(M) \to M$ ist (Lipschitz) stetig.

Satz 2.1.1. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (M^*, d^*) und eine Isometrie $\Phi\colon M \to M^*$.*

Bemerkung 2.1.3. i) Wir bezeichnen in diesem Falle den Raum $\tilde{M} := \overline{\Phi(M)}$ als **Vervollständigung** von M, (versehen mit der Metrik $\tilde{d} = d^*|_{\tilde{M}\times\tilde{M}}$).

ii) Man kann zeigen, dass die Vervollständigung bis auf Isometrien eindeutig ist.

Beweis von Satz 2.1.1. Wähle $M^* = B(M, \mathbb{R})$ mit der von $||\cdot||_{B(M,\mathbb{R})}$ induzierten Metrik d^*. Nach Beispiel 2.1.1 ist (M^*, d^*) vollständig.

Fixiere ein $x^* \in M$. Definiere nun $\Phi\colon M \to B(M, X)$ durch

$$\Phi\colon x \mapsto f_x(z) = d(x, z) - d(x^*, z).$$

Beachte
$$\forall z \in M\colon\ |f_x(z)| = |d(x,z) - d(x^*,z)| \le d(x,x^*);$$
also $f_x \in B(M,X)$. Analog folgt
$$\begin{aligned} ||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} &= \sup_{z\in M} |f_x(z) - f_y(z)| \\ &= \sup_{z\in M} |d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y) \end{aligned}$$
und
$$||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} \ge |f_x(x) - f_y(x)| = d(x,y).$$
Also ist Φ eine Isometrie. □

Seien $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ Normen auf X.

Definition 2.1.3. $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ *heissen* **äquivalent***, falls mit einer Konstanten* $C > 0$ *gilt*
$$\forall x \in X: C^{-1}||x||_1 \le ||x||_2 \le C||x||_1. \tag{2.1.1}$$

Beispiel 2.1.2. i) Auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) ist jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm; also sind je zwei Normen auch zueinander äquivalent.

Beweis. Die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$
$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1}\}$$
ist kompakt, und jede Norm $||\cdot||_1$ ist bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ stetig, da für $x = x_0 + \xi$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit einer Konstanten $C > 0$ gilt
$$\begin{aligned} |||x||_1 - ||x_0||_1| \le ||x_1 - x_0||_1 = ||\sum_{i=1}^n \xi_i e_i||_1 \\ \le \sum_{i=1}^n ||\xi_i e_i||_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|\, ||e_i||_1 \le C \sum_{i=1}^n |\xi_i| \le Cn||\xi|| \,. \end{aligned}$$
Also existieren
$$\max\nolimits_{x\in S^{n-1}} ||x||_1 = C_1,\ \min\nolimits_{x\in S^{n-1}} ||x||_1 = C_2^{-1} > 0\,.$$
Mit $C = \max\{C_1, C_2\}$ folgt (2.1.1). □

ii) Die Normen auf $C^0([0,1])$,
$$||f||_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,,\ ||f||_2 = \int_0^1 |f(t)|\ dt$$
sind nicht äquivalent, da für $(f_n)_{n\in N}$ mit
$$f_n(t) = t^n,\ 0 \le t \le 1,$$

gilt

$$||f_n||_1 = 1,\ ||f_n||_2 = \frac{1}{n+1} \to 0\ (n \to \infty)\ .$$

Hingegen lässt sich das Ergebnis aus Beispiel 2.1.2 i) auf jeden Vektorraum endlicher Dimension übertragen.

Satz 2.1.2. *Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum X sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Wir führen die Aussage auf den Fall $X = \mathbb{R}^n$, beziehungsweise $X = \mathbb{C}^n$ zurück. OBdA sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wähle eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ für X. Dann ist die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \to X, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$$

linear und injektiv, mit der Rangformel also auch surjektiv. Seien $||\cdot||_1^X$, $||\cdot||_2^X$ Normen auf X. Definiere

$$||x||_1 = ||\Phi(x)||_1^X, x \in \mathbb{R}^n,$$

und analog $||x||_2$. Die Eigenschaften i), ii) einer Norm folgen aus der Definitheit und Homogenität von $||\cdot||_1^X$, da Φ linear ist und injektiv. Mit der Linearität von Φ folgt ebenso für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Dreiecksungleichung

$$||x+y||_1 = ||\Phi(x) + \Phi(y)||_1^X \leq ||\Phi(x)||_1^X + ||\Phi(y)||_1^X = ||x||_1 + ||y||_1$$

aus derjenigen für $||\cdot||_1^X$, und ebenso für $||\cdot||_2^X$. Nach Beispiel 2.1.2 i) gibt es $C > 0$ mit

$$C^{-1}||\Phi(x)||_1^X = C^{-1}||x||_1 \leq ||x||_2 = ||\Phi(x)||_2^X \leq C||x||_1 = C||\Phi(x)||_1^X.$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da Φ surjektiv, folgt die Behauptung. □

Satz 2.1.3. *Endlich-dimensionale Teilräume eines normierten Raumes sind vollständig, insbesondere abgeschlossen.*

Beweis. Sei $Y \subset X$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum des normierten Raumes $(X, ||\cdot||_X)$, $\dim_{\mathbb{R}}(Y) = n$. Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to Y$ wie im Beweis von Satz 2.1.2, $||x|| = ||\Phi(x)||_X$ die induzierte Norm in $\mathbb{R}^n$.

Cauchy-Folgen $(y_k) \subset Y$ werden unter Φ^{-1} abgebildet auf Cauchy-Folgen (x_k) im $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$. Wegen Beispiel 2.1.2.i) sind dies auch Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert der Limes $x := \lim_{k\to\infty} x_k$, und $y_k \to y := \Phi(x)$ $(k \to \infty)$. Somit ist Y vollständig.

Abgeschlossenheit erhält man mit dem Folgenkriterium gemäss Satz 1.2.2. □

Für ∞-dimensionale Unterräume ist das Ergebnis der Satz 2.1.3 im allgemeinen nicht richtig.

Beispiel 2.1.3. Betrachte $C^0([0,2])$ als Unterraum von $(L^1([0,2]), ||\cdot||_{L^1})$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,2])$ mit

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in $L^1([0,2])$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1; \end{cases}$$

jedoch gilt $f \notin C^0([0,2])$.

Abstrakt kann man auch wie folgt argumentieren: $C^0([0,2])$ ist ein strikt in $L^1([0,2])$ enthaltener Teilraum, jedoch gilt $L^1([0,2]) = \overline{C^0([0,2])}$.

Wir wiederholen den Begriff der Kompaktheit in metrischen Räumen (M,d).

Definition 2.1.4. *$K \subset M$ heisst (folgen-)* **kompakt***, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ gilt das einfache Kriterium: $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. Vergleichbare Kompaktheitskriterien in $C^0(\overline{\Omega})$ oder $L^p(\Omega)$ werden wir später kennenlernen; siehe Satz 6.3.1, bzw. Satz 6.3.2.

In metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit ferner äquivalent zur "Heine-Borel-Eigenschaft" oder Überdeckungskompaktheit.

Definition 2.1.5. *$K \subset M$ heisst* **überdeckungskompakt***, falls jede offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Die "Heine-Borel-Eigenschaft" benutzt man zur Definition von Kompaktheit in topologischen Räumen.

Schliesslich kann man endlich-dimensionale Vektorräume auch wie folgt charakterisieren.

Satz 2.1.4. *Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\dim(X) < \infty$.

ii) Die Einheitssphäre $S = \{x \in X;\ ||x|| = 1\}$ in X ist kompakt.

Beweis. i) $\Rightarrow$ *ii):* Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n, \Phi\colon \mathbb{R}^n \to X$ der Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 2.1.2, $||\cdot||_1$ die durch Φ induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\Phi^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x||_1 = 1\} =: S_1.$$

Wegen Beispiel 2.1.2.i) ist $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Φ ist stetig. Damit ist auch $\Phi(S_1) = S$ kompakt.

ii) $\Rightarrow$ *i):* (indirekt) Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = \infty$. Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in S, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Falls die Norm auf X von einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ induziert wird, das heisst, falls

$$\forall x \in X\colon ||x|| = \sqrt{(x,x)},$$

so erhält man eine geeignete Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, indem man aus einer Folge linear unabhängiger Vektoren y_k mit dem Gram-Schmidtschen [1] Verfahren eine Folge orthonormaler Vektoren erzeugt mit

$$||x_k|| = 1,\ (x_i, x_k) = 0\ (i \neq k),$$

also auch

$$||x_i - x_k||^2 = ||x_i||^2 + ||x_k||^2 - 2(x_i, x_k) = 2\ (i \neq k).$$

Somit kann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben.

In einem allgemeinen normierten Raum erhält man analog eine geeignete Folge durch Anwendung des folgenden Lemmas. □

Lemma 2.1.1. *(Franz Riesz): Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$.*

Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in]0,1[$ ein $x \in X \setminus Y$ mit

i) $||x|| = 1$,

ii) $d(x, Y) = \inf_{y\in Y} ||x - y|| > 1 - \varepsilon$.

Beweis. Wähle $x^* \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen, gilt

$$d\colon = d(x^*, Y) = \inf_{y\in Y} ||x^* - y|| > 0.$$

Wähle $y^* \in Y$ mit

$$d \leq ||x^* - y^*|| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Setze

$$x = \frac{x^* - y^*}{||x^* - y^*||}$$

mit $||x|| = 1$ und

$$d(x, Y) = \inf_{y\in Y} ||\frac{x^* - y}{||x^* - y^*||}|| = \frac{d}{||x^* - y^*||} > 1 - \varepsilon.$$

□

Beweis von Satz 2.1.4 ii) $\Rightarrow$ i) (vollendet). Seien $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren, $Y_k = \text{span}\{y_l;\ l \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.1.3 ist Y_k für jedes k abgeschlossen. Wähle $x_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$ und für $k \geq 2$ wähle $x_k \in Y_k \setminus Y_{k-1}$ mit

$$||x_k|| = 1, \quad d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}$$

gemäss Lemma 2.1.1. Dann gilt für $k > l$ stets

$$||x_k - x_l|| \geq d(x_k, Y_l) \geq d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}.$$

Also ist S nicht kompakt. □

[1] siehe zum Beispiel Werner, S. 202

2.2 Stetige lineare Abbildungen

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Vektorräume, $A\colon X \to Y$ linear.

Satz 2.2.1. *Es sind äquivalent:*

i) A ist stetig in $0 \in X$*;*

ii) A ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$*;*

iii) A ist gleichmässig stetig auf X*;*

iv) A ist Lipschitz stetig;

v) $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y < \infty$.

Beweis. *v) ⇒ iv):* Mit der Linearität von A folgt für $x_1 \neq x_2 \in X$

$$\begin{aligned}||Ax_1 - Ax_2||_Y = ||A(x_1 - x_2)||_Y &= ||x_1 - x_2||_X \, ||A\frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||_X}||_Y \\ &\le \sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y ||x_1 - x_2||_X.\end{aligned}$$

iv) ⇒ iii) ⇒ ii) ⇒ i) ist klar.

i) ⇒ v): (indirekt) Sei $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y = \infty$. Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$||x_n||_X \le 1, \quad 0 < ||Ax_n||_Y \to \infty \ (n \to \infty).$$

Dann gilt

$$z_n = \frac{x_n}{||Ax_n||_Y} \to 0 \text{ in } X \ (n \to \infty);$$

jedoch folgt mit der Linearität von A

$$||Az_n||_Y = 1, n \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur angenommenen Stetigkeit in $0 \in X$. □

Zusammen mit Satz 2.1.2 folgt:

Satz 2.2.2. *Sei* X *endlich-dimensional,* $A\colon X \to Y$ *eine lineare Abbildung. Dann ist A (Lipschitz) stetig.*

Beweis. $||x||_* := ||x||_X + ||Ax||_Y$ definiert eine Norm, die von A induzierte "Graphennorm" auf X. Nach Satz 2.1.2 gibt es $C > 0$ mit

$$\forall x \in X\colon ||Ax||_Y \le ||x||_* \le C||x||_X.$$

□

Satz 2.2.2 gilt nicht mehr, falls X unendlich-dimensional ist.

Beispiel 2.2.1. Sei $X = Y = C^0([0,1])$, $||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}$, $||\cdot||_Y = ||\cdot||_{C^0}$, $A = id$. Analog zu Beispiel 2.1.2.ii) gilt

$$\sup_{||f||_{L^1} \le 1} ||f||_{C^0} = \infty;$$

also ist A nicht stetig.

Setze
$$L(X,Y) = \{A\colon X \to Y;\ A \text{ ist linear und stetig}\}.$$
$L(X,Y)$ ist ein Vektorraum mit Norm
$$||A||_{L(X,Y)} = \sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X}.$$
Falls $X = Y$ (mit derselben Norm), so setze
$$L(X,X) = L(X).$$

Satz 2.2.3. *i) Seien X, Y, Z normierte Vektorräume, $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$. Dann gilt $BA \in L(X,Z)$, und*
$$||BA||_{L(X,Z)} \le ||A||_{L(X,Y)}||B||_{L(Y,Z)}.$$
ii) Die obige Abbildung $A, B \mapsto BA$ ist stetig.

Beweis. i) Für $x \in X$ schätze ab
$$\begin{aligned}||(BA)x||_Z = ||B(Ax)||_Z &\le ||B||_{L(Y,Z)}||Ax||_Y \\ &\le ||B||_{L(Y,Z)}||A||_{L(X,Y)}||x||_X.\end{aligned}$$
ii) Stetigkeit der Verkettung folgt aus
$$BA - B_0A_0 = (B - B_0)A + B_0(A - A_0)$$
mit i). □

Falls $X = Y$, so können wir $L(X)$ wegen Satz 2.2.3 als Algebra auffassen. Insbesondere sind die Potenzen $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k-\text{mal}}$ eines $A \in L(X)$ definiert.

Für die Existenz von **Potenzreihen** benötigen wir die Vollständigkeit.

Satz 2.2.4. *Ist Y ein Banach-Raum, so ist auch $L(X,Y)$ ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, das heisst,
$$\sup_{||x||_X\le 1} ||A_nx - A_lx||_Y \to 0\ (n, l \to \infty).$$
Dann ist $(A_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge für jedes $x \in X$ mit $||x||_X \le 1$, wegen der Linearität also auch für beliebiges $x \in X$. Falls Y vollständig ist, existiert der punktweise Limes
$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_nx,\ x \in X.$$
A ist linear wegen der Linearität von A_n und Stetigkeit der Vektorraum-Operationen, und aus
$$||Ax||_Y = ||\lim_{n\to\infty}(A_nx)||_Y = \lim_{n\to\infty}||A_nx||_Y \le \limsup_{n\to\infty}||A_n||_{L(X,Y)}||x||_X$$

folgt die Beschränktheit und damit wegen Satz 2.2.1 auch die Stetigkeit von A. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}||Ax - A_n x||_Y &= ||\lim_{l\to\infty}(A_l x - A_n x)||_Y = \lim_{l\to\infty}||(A_l - A_n)(x)||_Y \\ &\leq \limsup_{l\to\infty}||A_l - A_n||_{L(X,Y)}||x||_X \to 0 \ (n\to\infty),\end{aligned}$$

und daher nach Übergang zum Supremum bezüglich $||x||_X \leq 1$

$$||A - A_n||_{L(X,Y)} \leq \limsup_{l\to\infty}||A_l - A_n||_{L(X,Y)} \to 0 \ (n\to\infty).$$

Vergleiche den Beweis von ii) in Beispiel 2.1.1. □

Satz 2.2.5. *Sei Y ein Banach-Raum, $A_j \in L(X,Y)$, $j \in \mathbb{N}$, und es gelte*

$$\sum_{j=1}^{\infty}||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} A_j \in L(X,Y).$$

Beweis. Sei $S_n = \sum_{j=1}^{n} A_j$, $n \in \mathbb{N}$. Da

$$||S_n - S_l||_{L(X,Y)} \leq \sum_{j=l+1}^{n}||A_j||_{L(X,Y)} \to 0 (n \geq l \to \infty),$$

ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, nach Satz 2.2.4 also konvergent. □

Beispiel 2.2.2. i) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert die Reihe $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \in L(X)$.

Beweis. Mit der Abschätzung $||A^k||_{L(X)} \leq ||A||_{L(X)}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}||\frac{A^k}{k!}||_{L(X)} \leq \exp(||A||_{L(X)}) < \infty.$$

□

ii) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$, $||A||_{L(X)} < 1$. Dann existiert die **Neumann-Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \in L(X)$, und es gilt (mit $1 = A^0 = id$)

$$(1 - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k(1 - A) = 1; \tag{2.2.1}$$

das heisst, die Abbildung $1 - A$ ist invertierbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1 - A)^{-1}.$$

Beweis. Konvergenz der Reihe $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}$, folgt analog zu i) mit dem Konvergenzkriterium für die geometrische Reihe. Die Identität (2.2.1) folgt aus

$$(1-A)S_n = S_n(1-A) = S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 + (S_n - S_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

Satz 2.2.6. *Sei X ein normierter Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert*

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le ||A||_{L(X)}.$$

r_A heisst **Spektralradius** *von A.*

Beispiel 2.2.3. Sei $A \in L(X)$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $0 \neq x_\lambda \in X$. Mit

$$A^n x_\lambda = \lambda A^{n-1} x_\lambda = \cdots = \lambda^n x_\lambda$$

folgt dann $||A^n||_{L(X)} \ge |\lambda|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $r_A \ge |\lambda|$.

Beweis von Satz 2.2.6. Beachte, dass Satz 2.2.3 ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon ||A^n||_{L(X)}^{1/n} \le ||A||_{L(X)}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \le \inf_{n>1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ schreibe $n = kl + m$, $m < k$. Mit Satz 2.2.3 folgt

$$\begin{aligned} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} &\le ||A^{kl}||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} ||A^m||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \\ &\le ||A^k||_{L(X)}^{\frac{l}{n}} ||A||_{L(X)}^{\frac{m}{n}} \\ &\to ||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \le \inf_{j\in\mathbb{N}} ||A^j||_{L(X)}^{\frac{1}{j}} + \varepsilon \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le \inf_{n\ge 1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le \liminf_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}},$$

wie gewünscht. □

Als Folgerung notieren wir abschliessend:

Satz 2.2.7. *Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$ mit $r_A < 1$. Dann konvergiert die Neumann-Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} A^j \in L(X)$, und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (1-A)^{-1} \in L(X).$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 2.2.5 mit dem Wurzelkriterium. □

Setze
$$Gl(X) = \{A \in L(X);\ A \text{ invertierbar und } A^{-1} \in L(X)\}.$$

Bemerkung 2.2.1. In Abschnitt 3.2 werden wir sehen, dass für bijektive Abbildungen $A \in L(X)$ eines Banachraums X die Inverse automatisch stetig ist.

Aus Satz 2.2.7 folgt nun

Satz 2.2.8. *Sei X ein Banach-Raum. Dann ist $Gl(X)$ offen in $L(X)$.*

Beweis. Sei $A_0 \in Gl(X)$, $A \in L(X)$ mit
$$||A - A_0||_{L(X)} < ||A_0^{-1}||_{L(X)}^{-1}.$$
Wir zeigen $A \in Gl(X)$. Schreibe dazu
$$A = A_0 + (A - A_0) = A_0(1 + A_0^{-1}(A - A_0)).$$
Satz 2.2.3 liefert die Abschätzung
$$||A_0^{-1}(A - A_0)||_{L(X)} \le ||A_0^{-1}||_{L(X)}||A - A_0||_{L(X)} < 1.$$
Mit Satz 2.2.7 folgt
$$(1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1} \in L(X),$$
und mit Satz 2.2.3 folgt die Behauptung. □

2.3 Quotientenraum

Sei X ein Vektorraum, $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Definiere die Äquivalenzrelation
$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$
mit Äquivalenzklassen
$$[x] = x + Y.$$
Beachte $[\alpha x] = \alpha[x], [x + y] = [x] + [y]$; das heisst
$$X/Y := \{[x]; x \in X\}$$
ist ein Vektorraum. Es sei π die kanonische Quotientenabbildung
$$\pi \colon X \ni x \mapsto [x] \in X/Y.$$

Satz 2.3.1. *Sei $||\cdot||_X$ Norm auf X, $Y \subset X$ abgeschlossen, $Y \neq X$. Dann ist*
$$||[x]||_{X/Y} := \inf_{y \in Y} ||x - y||_X$$
eine Norm auf X/Y, und π ist stetig mit
$$||\pi||_{L(X,X/Y)} = 1.$$
Falls $(X, ||\cdot||_X)$ vollständig ist, so auch $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$.

Bemerkung 2.3.1. Auf die Abgeschlossenheit von Y kann man nicht verzichten. Falls $Y \subset X$ ein dichter Unterraum ist, so gilt stets $\inf_{y \in Y} ||x-y||_X = 0$.

Beweis von Satz 2.3.1. i) Zum Beweis der Definitheit sei $||[x]||_{X/Y} = 0$ für ein $x \in X$. Dann gibt es eine Folge $(y_k) \subset Y$, so dass $||x - y_k||_X \to 0$ für $k \to \infty$. Mit der Abgeschlossenheit von Y folgt $x = \lim_{k\to\infty} y_k \in Y$, also $[x] = 0$.

Die Homogenität der Norm $||\cdot||_{X/Y}$ ist offensichtlich.

Schliesslich zeigen wir die Dreiecks-Ungleichung. Zu $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$ wähle $y_1, y_2 \in Y$ mit

$$||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \le ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} ||[x_1] + [x_2]||_{X/Y} &= ||[x_1 + x_2]||_{X/Y} \le ||(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)||_X \\ &\le ||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \le ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

ii) Mit $||\pi(x)||_{X/Y} = ||[x]||_{X/Y} \le ||x||_X$ folgt sofort $||\pi||_{L(X,X/Y)} \le 1$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $x = x_\varepsilon \in X \setminus Y$ gemäss dem Lemma 2.1.1 von Riesz mit

$$||x||_X = 1, \operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon.$$

Beachte die Beziehung

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||_X = ||[x]||_{X/Y}.$$

Es folgt

$$||\pi||_{L(X,X/Y)} \ge \frac{||[x]||_{X/Y}}{||x||_X} > 1 - \varepsilon.$$

iii) Zum Beweis der Vollständigkeit des Raumes X/Y im Falle eines Banachraums X sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $||[x_k] - [x_l]||_{X/Y} \to 0$ $(k, l \to \infty)$. Es genügt zu zeigen, dass für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ der Limes $[x] = \lim_{k\to\infty,\, k\in\Lambda}[x_k]$ existiert. OBdA dürfen wir daher annehmen, dass

$$||[x_k] - [x_{k-1}]||_{X/Y} < 2^{-k},\ k > 1.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle induktiv $y_k \in Y$, wie folgt. Setze $y_1 = 0$, $z_1 = x_1$, und für $k > 1$ wähle $y_k \in Y$ so, dass für $z_k = x_k - y_k \in X$ mit $[z_k] = [x_k]$ gilt

$$\begin{aligned} ||z_k - z_{k-1}||_X &< ||[z_k] - [z_{k-1}]||_{X/Y} + 2^{-k} \\ &= ||[x_k] - [x_{k-1}]||_{X/Y} + 2^{-k} < 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Dann ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, und es existiert $z = \lim_{k\to\infty} z_k \in X$. Mit

$$||[x_k] - [z]||_{X/Y} = ||[z_k] - [z]||_{X/Y} \le ||z_k - z||_X \to 0 \quad (k \to \infty)$$

folgt die Behauptung. □

2.4 Hilberträume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $(\cdot,\cdot)\colon X \times X \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 2.4.1. $(\cdot,\cdot)$ *heisst* **Skalarprodukt** *auf X, falls gilt*

i) $(x,y) = \overline{(y,x)}$, $\forall x,y \in X$,

ii) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$,

iii) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bemerkung 2.4.1. In diesem Fall definiert

$$||x|| := \sqrt{(x,x)},\ x \in X,$$

die **kanonische Norm** in X.

Beweis. Die Definitheit und die positive Homogenität sind klar. Die Dreiecks-Ungleichung folgt mit der nachstehenden Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 2.4.1, aus der Rechnung

$$||x+y||^2 = (x,x) + 2Re(x,y) + (y,y) \leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

□

Lemma 2.4.1. *(Cauchy-Schwarz) Es gilt*

$$|(x,y)| \leq ||x||\,||y||,\ \forall x,y \in X.$$

Beweis. OBdA gelte $||x|| = ||y|| = 1$. Setze $t = \overline{(x,y)}$ und beachte, dass damit $(x, y - tx) = 0$. Mit

$$1 = ||y||^2 = ||tx + (y - tx)||^2 = |t|^2||x||^2 + ||y - tx||^2 \geq |t|^2 = |(x,y)|^2$$

folgt die Behauptung. □

Definition 2.4.2. *Der Raum* $(X, (\cdot,\cdot))$ *heisst* **Hilbertraum** *falls X bzgl.* $||\cdot||$ *vollständig ist.*

Beispiel 2.4.1. i) $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ sind Hilberträume mit dem üblichen Skalarprodukt.

ii) Der Raum $L^2([0,1];\mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\,dt\ .$$

Zu $Y \subset X$ sei

$$Y^\perp = \{z \in X;\ \forall y \in Y\colon (z,y) = 0\}.$$

Lemma 2.4.2. *$Y^\perp$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum.*

Beweis. Linearität von $Y^\perp$ folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarprodukts. Falls weiter $(z_k) \subset Y^\perp$ mit $z_k \to z$ $(k \to \infty)$, so gilt

$$\forall y \in Y\colon (z, y) = \lim_{k\to\infty} (z_k, y) = 0.$$

Also ist $Y^\perp$ abgeschlossen nach Satz 1.2.2. □

Bemerkung 2.4.2. i) Falls $\overline{Y} = X$, so gilt $Y^\perp = \{0\}$.

ii) Offenbar gilt

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1^\perp \supset Y_2^\perp.$$

Beweis. i) Sei $z \in Y^\perp$. Falls $\overline{Y} = X$, so gibt es $(y_k) \subset Y$ mit $y_k \to z$ $(k \to \infty)$, also

$$||z||^2 = (z, z) = \lim_{k\to\infty} (z, y_k) = 0.$$

□

Lemma 2.4.3. *Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ genau ein $y_0 \in Y$ mit der Eigenschaft*

$$\forall y \in Y\colon (x_0 - y_0, y) = 0,$$

und

$$||x_0 - y_0|| = \mathrm{dist}(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} ||x_0 - y||.$$

(Der Punkt y_0 ist der "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf Y.)

Beweis. Zu vorgegebenem $x_0 \in X$ wähle $y_k \in Y$ mit

$$||x_0 - y_k|| \to \mathrm{dist}(x_0, Y) =: d \ (k \to \infty).$$

Behauptung 1. Es existiert $y_0 = \lim_{k\to\infty} y_k \in Y$, und $||x_0 - y_0|| = d$.

Beweis. Benutze die Parallelogramm-Identität

$$||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

mit $a = x_0 - y_k$, $b = x_0 - y_l$. Es folgt

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2 \lim_{k,l\to\infty} (||x_0 - y_k||^2 + ||x_0 - y_l||^2) \\ &= \lim_{k,l\to\infty} (4||x_0 - \frac{y_k + y_l}{2}||^2 + ||y_k - y_l||^2) \\ &\geq 4d^2 + \limsup_{k,l\to\infty} ||y_k - y_l||^2. \end{aligned}$$

Also ist (y_k) ist Cauchy-Folge, und die Behauptung folgt, da X vollständig. □

Behauptung 2. $\forall y_0 \in Y\colon ||x_0 - y_0|| = d \Leftrightarrow (x_0 - y_0) \perp Y$.

Beweis. Fixiere $y_0 \in Y$.

"⇒": Mit

$$||x_0 - y_0||^2 = d^2 \leq ||x_0 - y_0 + ty||^2, \forall y \in Y,\ t \in \mathbb{R}$$

folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ||x_0 - y_0 + ty||^2 = 2Re(x_0 - y_0, y), \forall y \in Y.$$

"⇐": Da für jedes $0 \neq y \in Y$ die Funktion $t \mapsto f(t) := ||x_0 - y_0 + ty||^2$ ein quadratisches Polynom in t definiert mit $f'' > 0$ gilt auch die Umkehrung. □

Seien $y_0, y_1 \in Y$ mit $(x_0 - y_0) \perp Y$, $(x_0 - y_1) \perp Y$, nach Behauptung 2 also $||x_0 - y_0|| = d = ||x_0 - y_1||$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d^2 &= ||x_0 - y_1||^2 = ||x_0 - y_0 - (y_1 - y_0)||^2 \\ &= ||x_0 - y_0||^2 + ||y_1 - y_0||^2 = d^2 + ||y_1 - y_0||^2, \end{aligned}$$

also $y_1 = y_0$. □

Korollar 2.4.1. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$, und sei $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $x_0 = y_0 + z$ mit $y_0 \in Y$, $z \in Y^\perp$ und*

$$||z|| = \mathrm{dist}(x_0, Y).$$

Mit Lemma 2.4.3 erhalten wir sofort auch den folgenden Satz.

Satz 2.4.1. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gilt*

$$X = Y \oplus Y^\perp$$

und jedes $x \in X$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$x = x^{||} + x^\perp, \text{ wobei } x^{||} \in Y,\ x^\perp \in Y^\perp,$$

mit

$$||x||^2 = ||x^{||}||^2 + ||x^\perp||^2.$$

Insbesondere ist die Orthogonalprojektion $\pi_Y : X \to Y$ mit $\pi_Y(x) = x^{||}$ stetig, und X/Y ist isometrisch zu $Y^\perp$.

Bemerkung 2.4.3. Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. Dann hat gemäss Satz 2.4.1 jeder abgeschlossene lineare Unterraum $Y \subset X$ das topologische Komplement $Y^\perp$.

Zu $Y \subset X$ setze weiter

$$Y^{\perp\perp} = (Y^\perp)^\perp \supset Y. \tag{2.4.1}$$

Lemma 2.4.4. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. Dann gilt $Y^{\perp\perp} = \overline{span\, Y}$. Insbesondere ist $Y^{\perp\perp} = Y$ für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum $Y \subset X$.*

Beweis. Setze $W := \overline{span\ Y}$. Nach Bemerkung 2.4.2 gilt $W^\perp \subset Y^\perp$, mit (2.4.1) und Lemma 2.4.2 also auch

$$W^{\perp\perp} \supset Y^{\perp\perp} \supset \overline{span\ Y} = W.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $W^{\perp\perp} \subset W$. Andernfalls gibt es $y \in W^{\perp\perp} \setminus W$, und nach Lemma 2.4.3) dürfen wir oBdA annehmen, dass $y \perp W$. Das heisst, $y \in W^\perp \cap W^{\perp\perp}$; also $(y, y) = 0$ im Widerspruch zur Wahl von y. □

2.5 Produkte

Analog zu $\mathbb{R}^n$ kann man für Vektorräume $(X_i, ||\cdot||_i), 1 \leq i \leq n$, den Produktraum $X = \prod_{i=1}^n X_i$ definieren mit Elementen

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in X_i\ (1 \leq i \leq n).$$

Wie in $\mathbb{R}^n$ kann man aus den Normen $||\cdot||_i$ der X_i verschiedene Normen für X ableiten, zum Beispiel für $1 \leq p < \infty$ die Norm

$$||x||_{p,X} := \left(\sum_{i=1}^n ||x_i||_i^p\right)^{1/p},$$

oder die Norm

$$||x||_{\infty,X} := \max_i ||x_i||_i.$$

Diese sind wegen Beispiel 2.1.2 alle äquivalent, und die Projektionen

$$\pi_i\colon X \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i \in X_i$$

sind stetig, $1 \leq i \leq n$. X ist vollständig, falls alle X_i dies sind.

Kapitel 3

Prinzipien der Funktionalanalysis

3.1 Gleichmässige Beschränktheit

Wie angekündigt, liefert der Satz 1.4.3 von Baire im Kontext linearer Abbildungen auch Information "im Grossen". Seien X, Y normierte Räume.

Satz 3.1.1. *(Banach-Steinhaus) Sei X vollständig, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $L(X,Y)$ punktweise beschränkt, das heisst*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda x||_Y < \infty, \forall x \in X.$$

Dann folgt

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} < \infty;$$

das heisst $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist gleichmässig beschränkt.

Beweis. Für $\lambda \in \Lambda$ definiere die stetige Abbildung $f_\lambda\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\lambda(x) = ||A_\lambda x||_Y, x \in X.$$

Nach Annahme ist $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt.

Da X vollständig ist, existiert nach Satz 1.4.3 eine Kugel $B = B_r(x_0) \subset X$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B} |f_\lambda(z)| < \infty.$$

Es folgt für $||x||_X < 1$:

$$\begin{aligned} ||A_\lambda x||_Y &= \frac{1}{r}||A_\lambda(x_0 + rx) - A_\lambda(x_0)||_Y \\ &\le \frac{1}{r}||A_\lambda(x_0 + rx)||_Y + \frac{1}{r}||A_\lambda x_0||_Y \\ &\le \frac{1}{r}\sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B_r(x_0)} |f_\lambda(z)| + \frac{1}{r}\sup_{\lambda\in\Lambda}||A_\lambda x_0||_Y =: M, \end{aligned}$$

gleichmässig in $\lambda \in \Lambda$ und $x \in X$ mit $||x||_X < 1$; also

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} \leq M.$$

□

Anwendung 3.1.1. Sei X vollständig, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ punktweise gegen $A\colon X \to Y$ konvergent. Dann ist A linear und stetig mit

$$||A||_{L(X,Y)} \leq \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Beweis. Nach Satz 3.1.1 gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty$. Wähle eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$||A_j||_{L(X,Y)} \underset{(j\to\infty, j\in\Lambda)}{\to} \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} =: M < \infty.$$

Diese Teilfolge konvergiert natürlich ebenfalls punktweise gegen A. Offenbar ist A linear, und es gilt

$$||Ax||_Y = \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j x||_Y \leq \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j||_{L(X,Y)} ||x||_X = M||x||_X$$

für alle $x \in X$. □

Die Vollständigkeit von X ist wichtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.1.1. Sei $X = C^0([0,1]), ||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}$, und definiere $A_j\colon X \to \mathbb{R}$ mit $A_j f := j\int_{1-1/j}^1 f(t)\,dt$, $j \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt

$$|A_j f| \leq j||f||_{L^1}, j \in \mathbb{N};$$

also ist $A_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig mit $||A_j||_{L(X,Y)} \leq j$, $j \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\forall f \in X\colon A_j f \underset{(j\to\infty)}{\to} Af := f(1);$$

jedoch ist $A\colon X \to \mathbb{R}$ unstetig. Wähle dazu $f_n(t) = t^n$ mit $||f_{n-1}||_{L^1} = 1/n$ und $Af_n = f_n(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien X, Y normierte Räume, $A\colon X \to Y$ linear.

Definition 3.2.1. *A heisst* **offen***, falls das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ offen ist in Y.*

Satz 3.2.1. *(Satz von der offenen Abbildung): Seien X, Y Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Dann gilt:*

i) Ist A surjektiv, so ist A offen.

ii) Ist A bijektiv, so gilt $A^{-1} \in L(Y,X)$.

Beweis. i) Wir führen den Beweis in 3 Schritten.

Behauptung 1. $\exists r > 0\colon B_{2r}(0;Y) \subset \overline{A(B_1(0;X))}$.

Beweis. Da A surjektiv, folgt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k(0;X)).$$

Da Y vollständig ist, gibt es nach Satz 1.3.1 iii) ein k_0 mit

$$\overset{\circ}{\overline{A(B_{k_0}(0;X))}} \neq \emptyset,$$

und es gibt $y_0 = A(x_0) \in Y, r_0 > 0$ mit

$$B_{r_0}(y_0;Y) \subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))}.$$

Sei $l_0 \geq ||x_0||_X, l_0 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus

$$B_{r_0}(y_0;Y) = Ax_0 + B_{r_0}(0;Y)$$

mit der Linearität von A

$$\begin{aligned} B_{r_0}(0;Y) &\subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))} - Ax_0 = \overline{A(B_{k_0}(0;X) - x_0)} \\ &\subset \overline{A(B_{k_0+l_0}(0;X))} = (k_0 + l_0)\overline{A(B_1(0;X))}. \end{aligned}$$

Wähle $r = \frac{r_0}{2(k_0+l_0)}$. □

Behauptung 2. $B_r(0;Y) \subset A(B_1(0;X))$.

Beweis. Fixiere $y \in B_r(0;Y)$. Wir konstruieren iterativ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$\sum_{k=1}^{n} Ax_k \to y \ (n \to \infty).$$

Da X vollständig ist, existiert $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in B_1(0;X)$, und mit der Stetigkeit von A folgt

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = y.$$

Beachte, dass nach Behauptung 1 gilt

$$\forall s > 0\colon B_{sr}(0;Y) \subset \overline{A(B_{s/2}(0;X))}.$$

Wähle $x_1 \in B_{1/2}(0;X)$ mit

$$||Ax_1 - y||_Y < \frac{r}{2}.$$

Setze $y_1 = y - Ax_1 \in B_{r/2}(0;Y)$.

Seien für $k \geq 1$ Punkte $x_1, \ldots, x_k$ sowie $y_1, \ldots, y_k$ bereits bestimmt mit

$$||x_l||_X < 2^{-l},\ y_l = y_{l-1} - Ax_l \in B_{2^{-l}r}(0;Y),\ 1 \leq l \leq k.$$

Wähle $x_{k+1} \in B_{2^{-k-1}}(0; X)$, so dass

$$y_{k+1} := y_k - Ax_{k+1} \in B_{2^{-k-1}r}(0; Y).$$

Dann folgt $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k = y_1 - \sum_{k=2}^{n} Ax_k = \ldots = y_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

wie gewünscht. □

Behauptung 3. A ist offen.

Beweis. Sei $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$, $y_0 = Ax_0$. Wähle $s > 0$ mit $B_s(x_0; X) \subset U$. Dann folgt mit Behauptung 2 sofort

$$\begin{aligned} B_{rs}(y_0; Y) &= y_0 + B_{rs}(0; Y) \subset Ax_0 + A(B_s(0; X)) \\ &= A(B_s(x_0; X)) \subset A(U). \end{aligned}$$

□

i) $\Rightarrow$ ii) Falls A bijektiv und offen, so ist für jede offene Menge $U \subset X$ das Urbild $(A^{-1})^{-1}(U) = A(U)$ von U unter A^{-1} offen, A^{-1} also stetig. □

Beispiel 3.2.1. i) Sei $X = Y$ mit Normen $|| \cdot ||_1, || \cdot ||_2$, und es gelte mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$

$$||x||_2 \leq C||x||_1, \forall x \in X. \tag{3.2.1}$$

Ist X vollständig sowohl bezüglich $|| \cdot ||_1$ als auch bezüglich $|| \cdot ||_2$, so ist die Abbildung $A = id$: $(X, || \cdot ||_1) \to (X, || \cdot ||_2)$ offen, und die Normen $|| \cdot ||_1$ und $|| \cdot ||_2$ sind äquivalent.

Beweis. Wegen (3.2.1) ist A stetig. Falls X vollständig ist bezüglich $|| \cdot ||_1$ und $|| \cdot ||_2$, so folgt mit Satz 3.2.1 auch die Stetigkeit von A^{-1}; das heisst, es gilt $||x||_1 \leq C'||x||_2, \forall x \in X$. □

ii) Betrachte insbesondere $X = C^0([0, 1])$ mit den Normen $|| \cdot ||_1 = || \cdot ||_{C^0}$, $|| \cdot ||_2 = || \cdot ||_{L^1}$. Die Abbildung $A = id$ ist stetig aber nicht offen; sonst wären die Normen $|| \cdot ||_{C^0}$ und $|| \cdot ||_{L^1}$ auf $C^0([0, 1])$ äquivalent.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Vollständigkeit von Y in Satz 3.2.1 nötig ist. Analog sieht man ein, dass auch die Vollständigkeit von X im allgemeinen notwendig ist. Betrachte dazu das Beispiel

iii) Sei $X = Y = l^2, || \cdot ||_2 = || \cdot ||_{l^2}$, und definiere eine Norm $|| \cdot ||_1$ auf X, wie folgt: Erweitere das System linear unabhängiger Vektoren $e_i = (\delta_{ik})_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, 2, 3, \ldots$ zu einer Hamel-Basis $(b_\iota)_{\iota \in I}$ mit $||b_\iota||_{l^2} = 1, \forall \iota \in I$. Jedes $x \in X$ hat genau eine Darstellung

$$x = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota b_\iota,$$

wobei nur **endlich** viele $\alpha_\iota \neq 0$. Setze

$$||x||_1 = \sum_{\iota \in I} |\alpha_\iota| \, , \forall x = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota b_\iota \in X.$$

Beachte, dass für $x = \sum_\iota \alpha_\iota b_\iota$ stets gilt

$$||x||_{l^2} \leq \sum_\iota |\alpha_\iota| \, ||b_\iota||_{l^2} = ||x||_1;$$

das heisst $A = id\colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ ist stetig. Jedoch gilt für $x_k = (\underbrace{1/\sqrt{k}, \ldots, 1/\sqrt{k}}_{k\text{-mal}}, 0, \ldots) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k e_i$

$$||x_k||_{l^2} = 1, \ ||x_k||_1 = \sqrt{k}, \ k \in \mathbb{N};$$

also sind die Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_{l^2}$ nicht äquivalent, A^{-1} also nicht stetig und damit A nicht offen, und der Raum $(l^2, ||\cdot||_1)$ ist nicht vollständig.

Beispiel 3.2.2. Sei $(X, ||\cdot||_X)$ Banach-Raum, $Y \subset X$ abgeschlossen, $Y \neq X$, $\pi\colon X \to X/Y$ die kanonische Projektion. π ist stetig und surjektiv, der Raum $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$ vollständig nach Satz 2.3.1. Nach Satz 3.2.1 ist π daher offen, und die offenen Mengen in X/Y sind **genau** die Mengen $\{\pi(U);\ U \subset X \text{ offen}\}$.

3.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X, Y normierte Vektorräume, $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, wobei $D(A) \subset X$ ein linearer Unterraum ist.

Betrachte den **Graph von** A, also den linearen Raum

$$\Gamma_A = \{(x, Ax);\ x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Definition 3.3.1. *A heisst* **abgeschlossen***, falls Γ_A abgeschlossen ist in $X \times Y$.*

Dabei versehen wir $X \times Y$ in üblicher Weise mit einer Norm, zum Beispiel mit der Norm

$$||(x, y)||_{X\times Y} = ||x||_X + ||y||_Y, \ \forall x \in X, y \in Y.$$

Beispiel 3.3.1. Falls $A \in L(X, Y)$ mit $D(A) = X$, so ist A abgeschlossen.

Beweis. Betrachte eine Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in Γ_A mit

$$x_k \to x, \ y_k = Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Da A stetig ist, folgt $y = \lim_{k\to\infty} Ax_k = Ax$; das heisst, $(x, y) \in \Gamma_A$. Also ist Γ_A abgeschlossen, und damit A. □

Falls X und Y vollständig sind, so ist für lineare Abbildungen $A\colon X \to Y$ die Stetigkeit sogar äquivalent zur Abgeschlossenheit.

Satz 3.3.1. *(Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien X, Y Banach-Räume, $A\colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

i) $A \in L(X, Y)$;

ii) A ist abgeschlossen.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) siehe Beispiel 3.3.1.

ii) $\Rightarrow$ i) Betrachte Γ_A, versehen mit der von der Norm $||\cdot||_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ induzierten Norm. Falls X, Y vollständig sind, so gilt dies auch für $X \times Y$. Ist daher Γ_A abgeschlossen in $X \times Y$, so ist $(\Gamma_A, ||\cdot||_{X\times Y})$ ein Banach-Raum.

Die Projektionen

$$\pi_X : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto x \in X,\ \ \pi_Y : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto Ax \in Y$$

sind stetig, $\pi_X : \Gamma_A \to X$ zudem surjektiv und injektiv. Nach dem Satz 3.2.1 von der offenen Abbildung folgt $\pi_X^{-1} \in L(X, \Gamma_A)$, und wir erhalten

$$A = \pi_Y \circ \pi_X^{-1} \in L(X, Y)$$

mit Satz 2.2.3. □

Bemerkung 3.3.1. Satz 3.3.1 vereinfacht den Nachweis der Stetigkeit einer linearen Abbildung $A\colon X \to Y$ erheblich. Statt der **zwei** Bedingungen

$$x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} x \Rightarrow \begin{cases} Ax_k \to y\ (k \to \infty) \\ y = Ax \end{cases}$$

genügt es für Banach-Räume X und Y, die **eine** Bedingung zu prüfen

$$x_k \to x,\ Ax_k \to y\ (k \to \infty) \Rightarrow Ax = y.$$

Beispiel 3.3.2. (Hellinger-Töplitz) Sei $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum, und sei $A\colon H \to H$ linear und symmetrisch; das heisst,

$$\forall x, y \in H\colon (Ax, y)_H = (x, Ay)_H.$$

Dann ist A stetig.

Beweis. Wir zeigen, Γ_A ist abgeschlossen. Betrachte $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $H \times H$ mit

$$x_k \to x,\ y_k = Ax_k \to y\ (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $z \in H$

$$(y, z)_H \underset{(k\to\infty)}{\leftarrow} (y_k, z)_H = (Ax_k, z)_H = (x_k, Az)_H \underset{(k\to\infty)}{\to} (x, Az)_H = (Ax, z)_H;$$

das heisst,

$$\forall z \in H\colon (Ax - y, z)_H = 0.$$

Bei Wahl von $z = Ax - y$ folgt $Ax = y$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Der Graph Γ_A kann auch abgeschlossen sein, wenn $D(A)$ ein echter Teilraum von X und der Operator A unbeschränkt ist.

Beispiel 3.3.3. Sei $X = C^0([0, 1])$, versehen mit der Supremumsnorm, $A = \frac{d}{dt}$ mit $D(A) = C^1([0, 1]) \subset X$.

Behauptung 1. $A\colon D(A) \subset X \to X$ ist nicht stetig.

Beweis. Betrachte $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0,1])$ mit $f_n(t) = t^n$, $Af_n = nf_{n-1}$, und

$$||f_n||_{C^0} = 1,\ ||Af_n||_{C^0} = n||f_{n-1}||_{C^0} = n,\ n \in \mathbb{N};$$

also

$$\sup_{f\in D(A),||f||_{C^0}\leq 1} ||Af||_{C^0} = \infty.$$

□

Behauptung 2. A ist abgeschlossen.

Beweis. Falls für Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0([0,1])$ gilt

$$f_n \stackrel{C^0}{\to} f, g_n = \frac{df_n}{dt} \stackrel{C^0}{\to} g\ (n \to \infty),$$

so folgt mit einem elementaren Satz der Analysis $f \in C^1([0,1])$, $g = \frac{df}{dt} = Af$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Im Satz 3.2.1 ii) von der offenen Abbildung können wir nun die Annahme der Stetigkeit von A durch die Annahme der Abgeschlossenheit ersetzen und diesen Satz auf unbeschränkte Operatoren erweitern.

Satz 3.3.2. *(Satz von der stetigen Inversen) Seien X, Y Banach-Räume, und sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, abgeschlossen, injektiv und surjektiv. Dann gibt es ein $B = A^{-1} \in L(Y,X)$ mit $AB = id_{|_Y}$, $BA = id_{|_{D(A)}}$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 ist jetzt die stetige Projektion $\pi_Y : \Gamma_A \to Y$ bijektiv, und $\pi_Y^{-1} \in L(Y, \Gamma_A)$; also $B := \pi_X \circ \pi_Y^{-1} \in L(Y,X)$, und $B = A^{-1}\colon Y \to D(A)$. □

Beispiel 3.3.4. Für den Operator A aus Beispiel 3.3.3 wähle als neuen Definitionsbereich

$$D(A) = C^1_0([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]);\ f(0) = 0\}.$$

Dann ist $A = \frac{d}{dt}\colon D(A) \subset C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ surjektiv und injektiv mit der stetigen Inversen

$$B\colon f \mapsto F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

3.4 Abschliessbare Operatoren

Seien X, Y normierte Vektorräume, $\Gamma \subset X \times Y$ ein linearer Unterraum.

Definition 3.4.1. Γ *heisst ein* **linearer Graph** *, falls gilt*

$$(x, y_1) \in \Gamma, (x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2,$$

oder, dazu äquivalent, falls gilt

$$(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0.$$

Bemerkung 3.4.1. Falls $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, so ist Γ_A offenbar ein linearer Graph.

Umgekehrt induziert ein linearer Graph $\Gamma \subset X \times Y$ genau eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \subset X \to Y$ mit $\Gamma = \Gamma_A$, gegeben durch

$$D(A) = \pi_X(\Gamma),\ Ax = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap \Gamma),\ x \in D(A).$$

Seien $A\colon D(A) \subset X \to Y$, $B\colon D(B) \subset X \to Y$ linear mit Graphen $\Gamma_A, \Gamma_B \subset X \times Y$.

Definition 3.4.2. *B heisst* **Erweiterung** *von A, $B \supset A$, falls $\Gamma_A \subset \Gamma_B$, oder – dazu äquivalent – falls*

$$D(A) \subset D(B) \text{ und } B_{|_{D(A)}} = A.$$

Definition 3.4.3. *A heisst* **abschliessbar**, *falls $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist. Der zugehörige Operator $\overline{A} \supset A$ mit $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A} \supset \Gamma_A$ heisst* **Abschluss** *von A.*

Bemerkung 3.4.2. i) Falls A abschliessbar ist, so ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung (im Sinne der Inklusion der Graphen) von A.

ii) Es gilt $D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}$, genauer

$$D(\overline{A}) = \{x \in X;\ \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A),\ y \in Y\colon (x_k, Ax_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} (x,y)\}.$$

Im Allgemeinen gilt $D(\overline{A}) \neq \overline{D(A)}$. So sind die Operatoren in Beispiel 3.3.3 oder in Beispiel 3.4.3 später in diesem Abschnitt abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich, dieser ist jedoch jeweils ein strikter Unterraum des Grundraumes.

Satz 3.4.1. *A ist abschliessbar genau dann, wenn für $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_A$ gilt:*

$$\big(x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} 0 \ \wedge\ y_k = Ax_k \underset{(k\to\infty)}{\to} y\big) \Rightarrow y = 0.$$

Beweis. A ist abschliessbar genau dann, wenn $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist und dies ist genau dann der Fall, wenn gilt: $(0,y) \in \overline{\Gamma_A} \Rightarrow y = 0$. □

Beispiel 3.4.1. Sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear und stetig. Dann ist A abschliessbar.

Beweis. Sei $(x_k, Ax_k = y_k) \in \Gamma_A$ mit $x_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$. Da A stetig, folgt

$$||Ax_k||_Y \le \sup_{\substack{0\neq x\in D(A)\\ ||x||_X\le 1}} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X} ||x_k||_X \to 0 \quad (k\to\infty),$$

also $Ax_k \to 0$ $(k \to \infty)$. □

Nicht jeder Operator ist abschliessbar.

Beispiel 3.4.2. Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, A die Abbildung

$$A\colon D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R});\ \mathrm{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\} \ni f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt.$$

(Dabei bezeichnet $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}}$ den "Träger" von f. Weiter schreiben wir $A \subset\subset \mathbb{R}$, falls $A \subset \mathbb{R}$ und A beschränkt.)

Für die Folge $f_k = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]} \in D(A)$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$||f_k||_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

andererseits gilt jedoch

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon Af_k = 1.$$

Also ist A nicht abschliessbar nach Satz 3.4.1.

Die wichtigste Klasse abschliessbarer Operatoren sind lineare Differentialoperatoren. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, wobei $\mu = \mathcal{L}^n$ das Lebesguesche Mass bezeichnet.

Beispiel 3.4.3. $\Delta\colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist abschliessbar.

Beweis. Sei $((u_k, f_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Gamma_\Delta \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mit

$$u_k \overset{L^2}{\to} 0,\ f_k = \Delta u_k \overset{L^2}{\to} f\ (k \to \infty).$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, alle $k \in \mathbb{N}$ nach partieller Integration die Gleichung

$$\int_\Omega f_k\varphi\,dx = \int_\Omega \Delta u_k\varphi\,dx = \int_\Omega u_k\Delta\varphi\,dx.$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega f\varphi\,dx = 0.$$

Da der Raum $C_c^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $L^2(\Omega)$, folgt $f = 0$; also ist Δ abschliessbar nach Satz 3.4.1. ☐

Allgemein betrachten wir für $1 \leq p \leq \infty$ Operatoren

$$A\colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$Au = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha(x)D^\alpha u,\ u \in C_c^\infty(\Omega),$$

mit Multi-Indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ vom Gewicht $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, und mit

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, 1 \leq j \leq n.$$

Die Koeffizientenfunktionen a_α seien der Einfachheit halber von der Klasse $C^N(\overline{\Omega})$ vorausgesetzt.

Satz 3.4.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann ist der oben definierte Operator*

$$A\colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

abschliessbar.

Beweis. Wir argumentieren wie in Beispiel 3.4.3. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to 0$ in $L^p(\Omega)$, $f_k := Au_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$, und sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Nach partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_k\varphi\,dx = \int_\Omega Au_k\varphi\,dx &= \sum_{|\alpha|\le N}\int_\Omega a_\alpha(x)D^\alpha u_k\varphi\,dx \\ &= \sum_{|\alpha|\le N}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_k D^\alpha(a_\alpha(x)\varphi)\,dx.\end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega f\varphi\,dx = 0.$$

Der folgende Satz 3.4.3 ergibt $f = 0$; das heisst, A ist abschliessbar. □

Satz 3.4.3. *("Fundamentallemma der Variationsrechnung") Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Falls gilt*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega f\varphi\,dx = 0,$$

so ist $f = 0$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.4.3. Die Annahme $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist zum Beispiel erfüllt, falls $f \in L^p(\Omega)$ für ein $p \in [1, \infty]$.

Beweis von Satz 3.4.3. Sei $x_0 \in \Omega$ Lebesgue-Punkt von f mit

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{\mu(B_r(x_0))}\int_{B_r(x_0)}|f(x) - f(x_0)|dx = 0,$$

und sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$. Wähle $\varphi \in C_c^\infty(B_r(0))$ mit $\int_{B_r(0)}\varphi\,dx = 1$, und setze

$$\varphi_k(x) = k^n\varphi(k(x - x_0)) \in C_c^\infty(B_{r/k}(x_0)) \subset C_c^\infty(\Omega),\ k \in \mathbb{N},$$

mit $\int_\Omega \varphi_k\,dx = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\Big|\int_\Omega (f(x) - f(x_0))\varphi_k(x)\,dx\Big| \le Ck^n\int_{B_{r/k}(x_0)}|f(x) - f(x_0)|\,dx \underset{(k\to\infty)}{\to} 0,$$

und

$$0 = \int_\Omega f\varphi_k\,dx = \int_\Omega (f(x) - f(x_0))\varphi_k(x)\,dx + f(x_0) \underset{(k\to\infty)}{\to} f(x_0).$$

Da x_0 beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Im Falle der oben genannten Differentialoperatoren möchte man $\overline{A}$ und $D(\overline{A})$ gerne explizit bestimmen. Diese Frage führt auf die sogenannten **Sobolev-Räume**. Im Falle des Beispiels 3.4.3 etwa ist $D(\overline{\Delta}) \subset L^2(\Omega)$ der Raum

$$H^2 \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \forall\, |\alpha| \leq 2\colon D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\};$$

vergleiche Funktionalanalysis II.

Kapitel 4

Der Satz von Hahn-Banach, Konvexität

4.1 Der Satz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Siehe Satz 4.1.2 für den komplexen Fall.)

Definition 4.1.1. *Ein $p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst* **sublinear***, falls gilt*

i) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \ \forall x \in X, \alpha \geq 0.$

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X.$

Beispiel 4.1.1. Jede Norm auf X ist sublinear.

Satz 4.1.1. *(Hahn-Banach): Sei M ein linearer Teilraum von X, $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in M. \tag{4.1.1}$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F_{|_M} = f$ und

$$F(x) \leq p(x), \ \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

Beweis. i) OBdA sei $M \neq X$; sonst wähle $F = f$. Wähle $x_1 \notin M$ und setze

$$M_1 = \{x + tx_1;\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Beachte, dass für $x, y \in M$ wegen Linearität von f und Sublinearität von p stets gilt

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

also auch

$$\forall x, y \in M\colon f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y). \tag{4.1.3}$$

Es folgt

$$\alpha := \sup_{x \in M} (f(x) - p(x - x_1)) < \infty,$$

und

$$\forall x \in M\colon f(x) - \alpha \le p(x - x_1).$$

Nach Übergang zum Supremum bezüglich $x \in M$ liefert (4.1.3) zudem

$$\forall y \in M\colon f(y) + \alpha \le p(y + x_1).$$

Definiere $f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha,\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$ linear, $f_{1|M} = f$, und es gilt

$$\forall x \in M\colon f_1(x \pm x_1) = f(x) \pm \alpha \le p(x \pm x_1). \tag{4.1.4}$$

Nach Multiplikation von (4.1.4) mit $t > 0$ und mit $t^{-1}x$ anstelle von x erhalten wir

$$\forall x \in M,\ t > 0\colon f_1(x \pm tx_1) = f(x) \pm t\alpha \le p(x \pm tx_1),$$

also die Bedingung (4.1.1) auf dem Raum M_1.

ii) Mit transfiniter Induktion können wir uns nun eine lineare Fortsetzung g von f auf einem maximalen linearen Unterraum N von X verschaffen. Wir benutzen dazu das Zornsche Lemma. (Dies ist ein zum Auswahlaxiom oder zum Wohlordnungssatz äquivalentes Axiom; vergleiche Analysis I.)

Zornsches Lemma: *Sei $(\mathcal{P}, \le)$ nicht leer, partiell geordnet, und jede linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$ besitze eine obere Schranke. Dann besitzt $\mathcal{P}$ ein maximales Element.*

Setze

$$\mathcal{P} = \{(N, g);\ N \subset X \text{ linear},\ M \subset N,\ g\colon N \to \mathbb{R} \text{ linear},\ g_{|M} = f,\ g \le p \text{ auf } N\}$$

und für $(N, g), (L, h) \in \mathcal{P}$ setze

$$(N, g) \le (L, h) :\Leftrightarrow N \subset L, h_{|N} = g.$$

Offenbar ist $(\mathcal{P}, \le)$ partiell geordnet, $(M, f) \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} \ne \emptyset$. Sei $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$ linear geordnet. Setze

$$N = \bigcup_{\iota \in I} N_\iota$$

und für $x \in N$ setze

$$g(x) = g_\iota(x),\ \text{falls } x \in N_\iota.$$

Dann ist N ein linearer Unterraum von X, und g ist wohldefiniert und linear mit $g(x) \le p(x)$ für alle $x \in N$. Sei nämlich $x \in N_\iota \cap N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ für $\iota, \kappa \in I$; dann gilt $g_{\kappa|N_\iota} = g_\iota$, also $g_\iota(x) = g_\kappa(x)$. Weiter gilt für $x \in N_\iota$, $y \in N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ auch $x, y \in N_\kappa$ und daher

$$g(x + y) = g_\kappa(x + y) = g_\kappa(x) + g_\kappa(y) = g(x) + g(y).$$

Schliesslich ist (N, g) obere Schranke für $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$, da für jedes $\iota \in I$ gilt

$$N_\iota \subset N \text{ und } g_{|N_\iota} = g_\iota.$$

Das Zornsche Lemma liefert nun ein (bezüglich $\leq$) maximales $(N, g) \in \mathcal{P}$, wie gewünscht.

Es gilt $N = X$, sonst liefert i) ein $(N_1, g_1) \in \mathcal{P}$ mit $(N, g) < (N_1, g_1)$ im Widerspruch zur Maximalität von (N, g). Setze $F = g$. □

Sei nun X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 4.1.2. *$p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst* $\mathbb{C}$-**sublinear**, *falls gilt*

i) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x),\ \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$,

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y),\ \forall x, y \in X$.

Bemerkung 4.1.1. Jedes $\mathbb{C}$-sublineare p ist auch $\mathbb{R}$-sublinear. Aus i), ii) folgt im komplexen Fall zusätzlich die Bedingung

iii) $p(x) \geq 0,\ \forall x \in X$.

Beweis. Für $x \in X$ schätze ab

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

□

Satz 4.1.2. *Sei X ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum, $M \subset X$ ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit*

$$\forall x \in M\colon\ |f(x)| \leq p(x), \tag{4.1.5}$$

für ein $\mathbb{C}$-sublineares p. Dann gibt es eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{C}$ mit $F_{|M} = f$ und

$$|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X.$$

Beweis. Betrachte $f_1 = Re\ f\colon M \to \mathbb{R}$. Beachte, f_1 ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt (4.1.5). Weiter gilt für $x \in M$ mit $f = f_1 + if_2$:

$$f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) = if(x) = -f_2(x) + if_1(x);$$

also

$$\forall x \in M\colon f_2(x) = -f_1(ix).$$

Sei $F_1\colon X \to \mathbb{R}$ die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von f_1 gemäss Satz 4.1.1 mit $F_{1|M} = f_1$ und

$$\forall x \in X\colon F_1(x) \leq p(x). \tag{4.1.6}$$

Setze

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix),\ x \in X.$$

F ist $\mathbb{R}$-linear und wegen $F(ix) = iF(x)$ auch $\mathbb{C}$-linear mit $F_{|M} = f$.

Schliesslich zeigen wir, dass F auch (4.1.5) erfüllt. Sei $x \in X$. Wähle $\alpha = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = F_1(\alpha x).$$

Dann folgt aus (4.1.6) und Definition 4.1.2

$$|F(x)| = F_1(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x),$$

wie gewünscht. □

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber, falls nicht anders vermerkt, stets den reellen Fall.

Satz 4.1.1 gestattet es insbesondere, stetige lineare Abbildungen auf einem Unterraum M eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||_X)$ auf ganz X zu erweitern, mit derselben Abbildungsnorm.

Satz 4.1.3. *(Dominierte Fortsetzung) Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear und stetig.*

Dann gibt es $F \in L(X;\mathbb{R})$ mit $F_{|M} = f$ und

$$||F||_{L(X;\mathbb{R})} = ||f||_{L(M;\mathbb{R})} = \sup_{x \in M;\ ||x||_X \leq 1} |f(x)|\,.$$

Beweis. Definiere $p\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = ||x||_X \cdot ||f||_{L(M;\mathbb{R})}.$$

p ist sublinear, $f \leq p$ auf M. Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.1. □

4.2 Dualraum

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 4.2.1. $X^* := L(X;\mathbb{R})$ *heisst* **Dualraum** *von X.*

Notation: Für $x^* \in X^*$, $x \in X$ schreiben wir

$$x^*(x) = \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, x\rangle_{X^* \times X}.$$

Beachte, dass gemäss Beispiel 2.1.1 der Raum X^* stets ein Banachraum ist, unabhängig davon, ob dies für X gilt.

Wie "reichhaltig" ist X^*?

Satz 4.2.1. *Zu jedem $x \in X$ gibt es $x^* \in X^*$ mit*

$$\langle x^*, x\rangle_{X^* \times X} = ||x||_X^2 = ||x^*||_{X^*}^2.$$

Beweis. Betrachte $M = \operatorname{span}\{x\}$. Setze $f(tx) = t||x||_X^2$ mit $f \in L(M;\mathbb{R})$,

$$||f||_{L(M;\mathbb{R})} = \sup_{||tx||_X \leq 1} |f(tx)| = ||x||_X.$$

Setze f gemäss Satz 4.1.3 fort zu $x^* \in L(X;\mathbb{R})$. Offenbar gilt

$$||x^*||_{X^*} = ||f||_{L(M;\mathbb{R})} = ||x||_X, \ \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = f(x) = ||x||_X^2.$$

□

Insbesondere erhalten wir die duale Charakterisierung der Norm.

Satz 4.2.2. *Es gilt*

i) $\forall x \in X\colon ||x||_X = \sup_{x^*\in X^*,\ ||x^*||_{X^*}\le 1} |\langle x^*, x\rangle|$;

ii) $\forall x^* \in X^*\colon ||x^*||_{X^*} = \sup_{x\in X,\ ||x||_X\le 1} |\langle x^*, x\rangle|$.

Das Supremum in i) wird stets sogar angenommen.

Beweis. i) OBdA sei $x \neq 0$; weiter dürfen wir wegen Homogenität annehmen, dass $||x||_X = 1$. Die Ungleichung $|\langle x^*, x\rangle| \le ||x||_X = 1$ für alle $x^* \in X^*$ mit $||x^*||_{X^*} \le 1$ folgt unmittelbar aus der Definition der Norm in X^*. Wählen wir weiter $x^* \in X^*$ gemäss Satz 4.2.1, erhalten wir $|\langle x^*, x\rangle| = 1$ und damit die Behauptung.

ii) Dies ist die Definition der Norm in X^*. □

Weiter kann man verschiedene Punkte $x \neq y$ in X durch ein $l \in X^*$ "trennen".

Satz 4.2.3. *Seien $x; y \in X$, $x \neq y$. Dann gibt es $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$.*

Beweis. Wähle l gemäss Satz 4.2.1 zum Vektor $y - x \in X$ mit

$$l(x-y) = l(x) - l(y) = ||x-y||_X^2 > 0.$$

□

Man kann sogar Punkte von (abgeschlossenen) Unterräumen trennen.

Satz 4.2.4. *Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $M \neq X$, und sei $x_0 \notin M$ mit*

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{x\in M} ||x_0 - x||_X > 0.$$

Dann gibt es $l \in X^*$ mit $l_{|M} = 0$ und

$$||l||_{X^*} = 1, \ l(x_0) = d.$$

Beweis. Setze

$$M_0 = \{x + tx_0;\ x \in M,\ t \in \mathbb{R}\},$$

und definiere die lineare Abbildung $f\colon M_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x + tx_0) = td.$$

Dann gilt: $f_{|M} = 0$, $f(x_0) = d$.

Behauptung. $||f||_{L(M_0,\mathbb{R})} = 1$.

Beweis. Für $y = x + tx_0 \in M_0$ mit $t \neq 0$ gilt

$$|f(y)| = |t|\, d \le |t| \ ||x_0 - (\frac{-x}{t})||_X = ||tx_0 + x||_X = ||y||_X;$$

also $||f||_{L(M_0;\mathbb{R})} \leq 1$.

Umgekehrt wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $x = x_\varepsilon \in M$ mit

$$d \leq ||x_0 - x||_X < d + \varepsilon.$$

Es folgt für $y = x_0 - x \in M_0$

$$f(y) = d \geq \frac{d}{d+\varepsilon}||y||_X; \tag{4.2.1}$$

das heisst

$$||f||_{L(M_0;\mathbb{R})} = \sup_{0 \neq y \in M_0} \frac{|f(y)|}{||y||_X} \geq \frac{d}{d+\varepsilon}.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Wähle $l = F$, die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.2. □

Bemerkung 4.2.1. Aus (4.2.1) folgt sogar für jedes $f \in X^*$ mit $f_{|M} = 0$ und $|f(x_0)| > d$ die Abschätzung $||f||_{X^*} > 1$. Somit erfüllt das in Satz 4.2.4 konstruierte l die Bedingung

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = l(x_0) = \sup_{\substack{f_{|M}=0 \\ ||f||_{X^*} \leq 1}} |f(x_0)|;$$

das heisst, das Supremum wird für $f = l$ angenommen.

Sei $A \subset X$.

Definition 4.2.2. *Der* **Annihilator** *von A ist die Menge*

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f_{|A} = 0\}.$$

Bemerkung 4.2.2. Offenbar gilt $A^\perp = \operatorname{span}(A)^\perp$, wobei $\operatorname{span}(A)$ die lineare Hülle von A ist.

Satz 4.2.5. *Sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent*

i) $x_0 \in \overline{M}$;

ii) $\forall f \in M^\perp$: $f(x_0) = 0$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Sei $f \in M^\perp$, $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ mit $x_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $x_0 \notin \overline{M}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$ und $l_{|\overline{M}} = 0$, also $f \in M^\perp$. □

Beispiel 4.2.1. Insbesondere gilt für jeden linearen Unterraum $M \subset X$:

$$\overline{M} = X \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}.$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Falls $\overline{M} = X$, so verschwindet gemäss Satz 4.2.5 jedes $f \in M^\perp$ an jeder Stelle $x_0 \in X$; also $M^\perp = \{0\}$.

"$\Leftarrow$": Falls $M^\perp = \{0\}$, so gilt gemäss Satz 4.2.5 die Aussage $x_0 \in \overline{M}$ für jedes $x_0 \in X$; also $\overline{M} = X$. □

Bemerkung 4.2.3. Zu $L \subset X^*$ sei

$$^\perp L = \{x \in X;\ \forall l \in L\colon l(x) = 0\}.$$

Dann gilt gemäss Satz 4.2.5 für jeden linearen Unterraum $M \subset X$ die Beziehung

$$^\perp(M^\perp) = \overline{M};$$

vergleiche Lemma 2.4.4.

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir den Dualraum eines normierten Raumes und dessen Trennungseigenschaften genauer.

4.3 Dualität im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum (über $\mathbb{R}$). Für $y \in H$ sei $j_y \in H^*$ die Abbildung

$$j_y(x) = (y, x)_H,\ x \in H.$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung

$$J\colon H \ni y \mapsto j_y \in H^*$$

erklärt.

Satz 4.3.1. *J ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Offenbar ist J linear. Weiter gilt für $y \in H$ mit Cauchy-Schwarz

$$||j_y||_{H^*} = \sup_{x \in H,\ ||x||_H \le 1} |j_y(x)| = \sup_{x \in H,\ ||x||_H \le 1} |(y, x)_H| \le ||y||_H.$$

Durch Einsetzen von $x = \frac{y}{||y||_H}$ erhält man sogar die Gleichheit der Norm. □

Tatsächlich ist J sogar ein Isomorphismus, insbesondere surjektiv.

Satz 4.3.2. *(Rieszscher Darstellungssatz) Zu jedem $l \in H^*$ gibt es genau ein $y \in H$ mit*

$$\forall x \in H\colon l(x) = (y, x)_H = j_y(x).$$

Beweis. OBdA sei $l \neq 0$; wegen Homogenität dürfen wir weiter annehmen, dass $||l||_{H^*} = 1$. Nach Satz 4.2.2.ii) gibt es $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H mit

$$||y_k||_H = 1,\ l(y_k) \to ||l||_{H^*} = 1\ (k \to \infty).$$

Behauptung 1. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis. Benutze die Parallelogramm-Identität

$$\forall x, y \in H\colon ||x+y||_H^2 + ||x-y||_H^2 = 2(||x||_H^2 + ||y||_H^2).$$

Mit $x = y_k/2$, $y = y_l/2$ folgt

$$\forall k, l \in \mathbb{N}\colon ||\frac{y_k + y_l}{2}||_H^2 = 1 - ||\frac{y_k - y_l}{2}||_H^2. \tag{4.3.1}$$

Mit Fehler $o(1) \to 0$ $(k, l \to \infty)$ gilt somit

$$\begin{aligned} 1 + o(1) = \frac{1}{2}\big(l(y_k) + l(y_l)\big) = l\big(\frac{y_k + y_l}{2}\big) &\le ||l||_{H^*} ||\frac{y_k + y_l}{2}||_H \\ &= \sqrt{1 - ||\frac{y_k - y_l}{2}||_H^2}; \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{k,l\to\infty} ||y_k - y_l||_H = 0,$$

wie gewünscht. □

Da H vollständig, existiert $y = \lim_{k\to\infty} y_k \in H$, und $||y||_H = 1$.

Behauptung 2. $l = j_y$.

Beweis. Wegen Stetigkeit von l gilt

$$l(y) = \lim_{k\to\infty} l(y_k) = ||l||_{H^*} = 1 = ||y||_H^2 = j_y(y). \tag{4.3.2}$$

Sei

$$X = y^\perp = \{x \in H;\ (y, x)_H = 0\},$$

und sei $x \in X$ mit $||x||_H = 1$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$||y + \varepsilon x||_H^2 = ||y||_H^2 + 2\varepsilon (y, x)_H + \varepsilon^2 ||x||_H^2 = 1 + \varepsilon^2,$$

und die Vektoren

$$y_\varepsilon = \frac{y + \varepsilon x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

haben die Norm $||y_\varepsilon||_H = 1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Da für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$l(y_\varepsilon) \le 1 = l(y) = l(y_0),$$

folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(y_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} (l(y) + \varepsilon l(x)) = l(x);$$

das heisst,

$$l_{|X} = 0 = j_{y|X}.$$

Da $H = span\{y\} + X$ nach Satz 2.4.1 folgt mit (4.3.2) die Behauptung. □

Offenbar ist y eindeutig bestimmt. Falls nämlich $l = j_y = j_z$, so folgt aus der Gleichheit $(y, x)_H = (z, x)_H$ für alle $x \in H$ bei Wahl von $x = y - z$, dass $y = z$. □

Mittels J können wir daher den Dualraum H^* von H mit H "identifizieren".

Bemerkung 4.3.1. Bedingung (4.3.1) besagt, dass die 1-Kugel in H **gleichmässig** strikt konvex ist.

Eine wichtige Anwendung von Satz 4.3.2 liefert der folgende Satz.

Satz 4.3.3. *(Lax-Milgram) Sei $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear und stetig mit*

$$\forall x, y \in H\colon\ |a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H ||y||_H.$$

Mit einer Konstanten $\lambda > 0$ gelte weiter

$$\forall x \in H\colon a(x,x) \ge \lambda ||x||_H^2.$$

Dann gibt es eine stetige Bijektion $A \in L(H)$ mit

$$\forall x, y \in H\colon a(x,y) = (Ax, y)_H,$$

und es gilt

$$||A||_{L(H)} \le \Lambda,\ \ ||A^{-1}||_{L(H)} \le \lambda^{-1}.$$

Bemerkung 4.3.2. Die Bilinearform a muss nicht symmetrisch sein.

Beweis. Für alle $x \in H$ ist

$$l_x\colon y \mapsto a(x,y)$$

linear und

$$||l_x||_{H^*} = \sup_{y \in H,\ ||y||_H \le 1} |a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H < \infty.$$

Nach Satz 4.3.2 existiert $Ax := J^{-1} l_x \in H$ mit

$$\forall y \in H\colon a(x,y) = l_x(y) = (Ax, y)_H.$$

Offenbar ist A linear und wegen

$$||Ax||_H = ||l_x||_{H^*} \le \Lambda ||x||_H$$

gilt $A \in L(H)$, $||A||_{L(H)} \le \Lambda$.

Behauptung 1. A ist injektiv mit $||Ax||_H \ge \lambda ||x||_H$, $x \in H$.

Beweis. Für $x \in H$ gilt

$$(Ax, x)_H = a(x,x) \ge \lambda ||x||_H^2.$$

Mit

$$(Ax, x)_H \le ||Ax||_H ||x||_H$$

folgt

$$||Ax||_H \ge \lambda ||x||_H;$$

insbesondere erhalten wir $Ax \ne 0$, falls $x \ne 0$. □

Behauptung 2. $im(A) = A(H)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H mit

$$Ax_k \to y \quad (k \to \infty).$$

Mit Behauptung 1 folgt

$$||x_k - x_l||_H \leq \lambda^{-1}||A(x_k - x_l)||_H = \lambda^{-1}||Ax_k - Ax_l||_H \to 0 \quad (k, l \to \infty).$$

Sei $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Da $A \in L(H)$, erhalten wir

$$Ax = \lim_{k\to\infty} Ax_k = y;$$

das heisst, $im(A)$ ist abgeschlossen. □

Behauptung 3. A ist surjektiv.

Beweis. Sei widerspruchsweise $M := im(A) \neq H$. Wähle $x_0 \in H \setminus M$, $l \in H^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit

$$l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0, \ l_{|M} = 0.$$

Sei $y = J^{-1}l \neq 0$. Da $Ay \in M$, folgt mit

$$0 < \lambda||y||_H^2 \leq a(y, y) = (Ay, y)_H = l(Ay) = 0$$

der gewünschte Widerspruch. □

Somit ist A bijektiv, und nach Satz 3.2.1.ii) (Satz von der offenen Abbildung) gilt $A^{-1} \in L(H)$.

Zur Abschätzung der Norm sei $x \in H$. Setze $z = A^{-1}x$. Mit Behauptung 1 erhalten wir

$$||A^{-1}x||_H = ||z||_H \leq \lambda^{-1}||Az|| = \lambda^{-1}||x|| \, .$$

Da $x \in H$ beliebig gewählt war, folgt

$$||A^{-1}||_{L(H)} \leq \lambda^{-1},$$

wie gewünscht. □

Korollar 4.3.1. *Sei $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ wie in Satz 4.3.3, und sei $l \in H^*$. Dann gibt es genau ein $x \in H$ mit*

$$\forall y \in H\colon a(x, y) = l(y),$$

und

$$||x||_H \leq \lambda^{-1}||l||_{H^*}.$$

Beweis. Setze $x = A^{-1}J^{-1}l$, mit A wie in Satz 4.3.3. Es gilt

$$\forall y \in H\colon a(x, y) = (Ax, y)_H = (J^{-1}l, y)_H = l(y),$$

und

$$||x||_H \leq ||A^{-1}||_{L(H)}||l||_{H^*} \leq \lambda^{-1}||l||_{H^*}$$

nach Satz 4.3.2 und Satz 4.3.3. □

4.4 Der Dualraum von $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$ für ein Radonmass μ auf $\mathbb{R}^n$, q der zu p konjugierte Exponent $1 < q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir formulieren den Hauptsatz dieses Abschnittes.

Satz 4.4.1. *$L^p(\Omega)^*$ ist isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$.*

Zum Beweis konstruieren wir eine lineare Isometrie $J \colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ und zeigen anschliessend mit Hilfe der gleichmässigen Konvexität der Norm in $L^p(\Omega)$ analog zu unserem Vorgehen im Beweis von Satz 4.3.2 deren Surjektivität.

Für $g \in L^q(\Omega)$ sei $l_g \in L^p(\Omega)^*$ die lineare Abbildung

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega fg\, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Stetigkeit von l_g folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\left| \int_\Omega fg\, d\mu \right| \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}. \tag{4.4.1}$$

Lemma 4.4.1. *$J \colon L^q(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in L^p(\Omega)^*$ ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Offenbar ist J linear. Weiter folgt aus (4.4.1) die Abschätzung

$$||l_g||_{L^p(\Omega)^*} = \sup_{||f||_{L^p} \leq 1} \left| \int_\Omega fg\, d\mu \right| \leq ||g||_{L^q(\Omega)};$$

das heisst, J ist stetig mit

$$||J||_{L(L^q(\Omega); L^p(\Omega)^*)} \leq 1.$$

i) Sei $1 < p < \infty$. In diesem Fall ist $q < \infty$, und es gilt $p = \frac{q}{q-1}$. Zu $g \in L^q(\Omega)$ wähle $f = g\,|g|^{q-2} \in L^p(\Omega)$ als Vergleichsfunktion mit $||f||_{L^p(\Omega)} = ||g||^{q-1}_{L^q(\Omega)}$. Dies ergibt

$$|l_g(f)| = \int_\Omega |g|^q\, d\mu = ||g||^q_{L^q} \leq ||l_g||_{L^{p*}} ||f||_{L^p} = ||l_g||_{L^{p*}} ||g||^{q-1}_{L^q};$$

das heisst

$$||l_g||_{L^{p*}} \geq ||g||_{L^q},$$

also

$$||l_g||_{L^{p*}} = ||g||_{L^q}.$$

ii) Betrachte nun $p = 1$, $q = \infty$. Sei $g \in L^\infty(\Omega)$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $x \in \Omega$ Lebesguepunkt von g mit

$$|g(x)| = \lim_{r \to 0} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g\, d\mu \right| \geq ||g||_{L^\infty} - \varepsilon.$$

Wähle $r > 0$ mit $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ und

$$\alpha := \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Setze $f = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \chi_{B_r(x)} \in L^1(\Omega)$. Beachte

$$||f||_{L^1} = 1, \ |l_g(f)| = \alpha \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$||l_g||_{L^{1*}} \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$||l_g||_{L^{1*}} \geq ||g||_{L^\infty}$$

und damit

$$||l_g||_{L^{1*}} = ||g||_{L^\infty},$$

wie gewünscht. □

Lemma 4.4.2. *J ist surjektiv.*

Beweis. i) Betrachte zunächst den Fall $1 < p < \infty$. Sei $l \in L^p(\Omega)^*$. Wähle eine "Maximalfolge" $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $||f_k||_{L^p} = 1$ und

$$l(f_k) \to ||l||_{L^{p*}} \quad (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir annehmen $||l||_{L^{p*}} = 1$.

Behauptung 1. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich genau gleich wie Behauptung 1 im Beweis von Satz 4.3.2 aus dem folgenden Satz 4.4.2 über die gleichmässige Konvexität von $L^p(\Omega)$. (Einen Beweis findet man zum Beispiel in Adams: *Sobolev spaces*, 2.29 Corollary.) □

Satz 4.4.2. *Sei $1 < p < \infty$, und seien $u, \nu \in L^p(\Omega)$, mit $||u||_{L^p} = ||\nu||_{L^p} = 1$ und $\varepsilon{:}\ = ||u - \nu||_{L^p} > 0$.*

i) Falls $2 \leq p < \infty$, so gilt

$$||\frac{u+\nu}{2}||_{L^p} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p};$$

ii) Falls $1 < p \leq 2$, so gilt mit $q = \frac{p}{p-1}$

$$||\frac{u+\nu}{2}||_{L^p} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existiert

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k \in L^p(\Omega),$$

und es gilt

$$||f||_{L^p} = 1,\ l(f) = ||l||_{L^{p*}} = 1.$$

Setze $g = f\,|f|^{p-2} \in L^q(\Omega)$ mit $||g||_{L^q} = 1$.

Behauptung 2. $l = l_g$.

Beweis. Für $\varphi \in L^p(\Omega)$, $|\varepsilon| \ll 1$ sei

$$f_\varepsilon = \frac{f + \varepsilon\varphi}{||f + \varepsilon\varphi||_{L^p}},\ ||f_\varepsilon||_{L^p} = 1.$$

Da $l(f_\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ maximal, folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(f_\varepsilon) = l(\varphi) - l(f)\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f + \varepsilon\varphi||_{L^p},$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f + \varepsilon\varphi||_{L^p} &= \frac{1}{p}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_\Omega |f + \varepsilon\varphi|^p\ d\mu \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}|f + \varepsilon\varphi|^p\ d\mu = \int_\Omega \varphi f\,|f|^{p-2}\ d\mu = \int_\Omega \varphi g\, d\mu;\end{aligned}$$

das heisst,

$$\forall \varphi \in L^p(\Omega)\colon l(\varphi) = l(f) l_g(\varphi) = l_g(\varphi).$$

$\square$

ii) Sei nun $p = 1$. Zur Vereinfachung nehmen wir an $\mu = \mathcal{L}^n$ und $\mu(\Omega) < \infty$. Sei $l \in L^1(\Omega)^*$. Da $\mu(\Omega) < \infty$, liefert die Höldersche Ungleichung für alle $s > 1$ die topologische Einbettung $i_s\colon L^s(\Omega) \to L^1(\Omega)$ mit

$$||i_s||_{L(L^s, L^1)} \leq (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{s}} \underset{(s\to 1)}{\to} 1,$$

also auch $l = l \circ i_s \in L^s(\Omega)^*$ mit

$$\limsup_{s\to 1} ||l||_{L^s(\Omega)^*} \leq ||l||_{L^1(\Omega)^*}.$$

Nach i) besitzt l als Element von $L^s(\Omega)^*$ eine Darstellung $l = l_g$ mit $g = g_r \in L^r(\Omega)$, wobei $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$; insbesondere gilt

$$l(\varphi) = l_{g_r}(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_r\, d\mu,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Es folgt für $1 < s < s'$ und zugehörige $1 < r' < r < \infty$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega \varphi g_r\, d\mu = l(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_{r'}\, d\mu,$$

insbesondere

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega (g_r - g_{r'})\varphi\, d\mu = 0.$$

Mit Satz 3.4.3 erhalten wir $g_r = g_{r'} =: g \in \bigcap_{r<\infty} L^r(\Omega)$ mit

$$||g||_{L^r} = ||g_r||_{L^r} = ||l_{g_r}||_{L^{s*}} = ||l||_{L^{s*}}$$

für alle $s > 1$ und zugehörige r, wobei $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Mit $s \downarrow 1$ folgt $r \uparrow \infty$ und

$$\limsup_{r\to\infty} ||g||_{L^r} = \limsup_{s\to 1} ||l||_{L^{s*}} \leq ||l||_{L^{1*}};$$

das heisst, $g \in L^\infty(\Omega)$, und $l = l_g$. □

Bemerkung 4.4.1. Alternativ kann man Lemma 4.4.2 mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym beweisen.

Bemerkung 4.4.2. Falls $\mu = \mathcal{L}^n$, so gilt $L^1(\Omega) \neq L^\infty(\Omega)^*$, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.4.1. Sei $x_0 \in \Omega$, und sei $\delta_{x_0} : C^0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ das Dirac-Funktional

$$\forall f \in C^0(\overline{\Omega})\colon \delta_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Sei l eine Fortsetzung von δ_{x_0} auf $L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.1.3. Dann gilt

$$\forall g \in L^1(\Omega)\colon l \neq l_g.$$

Beweis. Nimm an, $l = l_g$ für ein $g \in L^1(\Omega)$. OBdA sei $x_0 = 0$, $B_1(0) \subset \Omega$. Fixiere $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi \equiv 1 \text{ auf } B_{1/2}(0).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx) \in C_c^\infty(B_1(0)) \subset C^0(\overline{\Omega})$$

mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$ μ-fast überall. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$1 = \delta_{x_0}(\varphi_k) = l(\varphi_k) = l_g(\varphi_k) = \int_\Omega g\varphi_k\, dx \to 0\ (k \to \infty).$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch. □

Bemerkung 4.4.3. Für $\mu = \mathcal{L}^n$ und jedes $g \in L^1(\Omega)$ gilt $l_g \ll \mu \perp \delta$.

4.5 Trennungssätze für konvexe Mengen, Extremalpunkte

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz 4.5.1. *(Trennungssatz) Seien $A, B \subset X$ nicht leer, disjunkt und konvex. Dann gilt:*

i) Falls A offen ist, so gibt es $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall a \in A, b \in B\colon l(a) < \lambda \leq l(b).$$

ii) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{a\in A} l(a) < \lambda < \inf_{b\in B} l(b).$$

Bemerkung 4.5.1. Gemäss Satz 4.5.1 kann man disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene $H = \{x \in X;\ l(x) = \lambda\}$ trennen.

Beweis von Satz 4.5.1. i) Fixiere $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Setze $x_0 = b_0 - a_0$. Dann ist die Menge $C := A - B + x_0$ konvex, offen und nicht leer mit $0 \in C$. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt weiter $x_0 \notin C$.

Wähle $R > 0$ mit $B_R(0) \subset C$. Sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ das **Minkowski-Funktional** mit

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda C\}.$$

Behauptung 1. Die Funktion p ist sublinear.

Beweis. Die positive Homogenität von p ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Seien weiter $x = \lambda u$, $y = \mu v$ mit $u, v \in C$ und $\lambda, \mu > 0$. Da C konvex, gilt

$$z := \frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu} \in C,$$

und $p(z) \le 1$. Mit positiver Homogenität von p folgt

$$p(x + y) = p(\lambda u + \mu v) = p(z)(\lambda + \mu) \le \lambda + \mu.$$

Nach Übergang zum Infimum bezüglich λ und μ erhalten wir schliesslich

$$p(x + y) \le p(x) + p(y),$$

wie gewünscht. □

Da für jedes $x \in X$ mit $\lambda = 2R^{-1}||x||_X$ trivialerweise gilt

$$x \in B_{\lambda R}(0) \subset \lambda C,$$

folgt mit der Konstanten $M = 2R^{-1}$

$$\forall x \in X\colon p(x) \le M||x||_X.$$

Da C offen, gilt $C = \{x;\ p(x) < 1\}$. Weiter erhalten wir aus $x_0 \notin C$, dass

$$p(x_0) \ge 1.$$

Definiere $f\colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Beachte

$$\begin{aligned} \forall t \ge 0\colon f(tx_0) &= t \le tp(x_0) = p(tx_0), \\ \forall t < 0\colon f(tx_0) &= t < 0 \le p(tx_0). \end{aligned}$$

Sei l die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.1 mit $l(tx_0) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und mit

$$\forall x \in X\colon l(x) \le p(x).$$

Für alle $x \in X$ gilt dann

$$|l(x)| = \max\{l(x), l(-x)\} \le \max\{p(x), p(-x)\} \le M||x||_X;$$

also $l \in X^*$. Weiter gilt für $a \in A$, $b \in B$

$$l(a) - l(b) = l(a - b + x_0) - l(x_0) < 0,$$

da $l(x_0) = 1$ und da $l(x) \le p(x) < 1$ für $x = a - b + x_0 \in C$. Setze

$$\lambda := \inf\{l(b);\ b \in B\}.$$

Da A offen, gilt dann für jedes $a \in A$, $b \in B$

$$l(a) < \sup\{l(x);\ x \in A\} \le \lambda \le l(b).$$

ii) Mit der folgenden Beobachtung lässt sich ii) auf i) zurückführen.

Behauptung 2. Seien A, B wie in ii). Dann gibt es $r > 0$ mit $U_r(A) \cap B = \emptyset$, wobei

$$U_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

offen, konvex und nicht leer.

Beweis. Offenbar ist $U_r(A)$ für jedes $r > 0$ offen, konvex und nicht leer, da $A \neq \emptyset$. Nimm an, für $r_k \downarrow 0$ gibt es $a_k \in A$, $b_k \in B_{r_k}(a_k) \cap B$, $k \in \mathbb{N}$. Da A kompakt, konvergiert eine Teilfolge $a_k \to a$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$, wobei $a \in A$. Da B abgeschlossen, und

$$||b_k - a||_X \le ||b_k - a_k||_X + ||a_k - a||_X \le r_k + ||a_k - a||_X \stackrel{(k\to\infty)}{\to} 0,$$

folgt andererseits $a = \lim_{k\to\infty} b_k \in B$; also $A \cap B \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme. □

Wähle nun $r > 0$ wie in Behauptung 2, $l \in X^*$ gemäss i) zu $A' = U_r(A)$ und B. Da A kompakt, wird $\sup_{a\in A} l(a)$ in A angenommen. Es folgt

$$\max_{a\in A} l(a) < \sup_{x \in U_r(A)} l(x) \le \inf_{b\in B} l(b),$$

wie gewünscht. □

Sei $K \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $M \subset K$.

Definition 4.5.1. *i) M heisst* **extremale Teilmenge von** K*, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in K$ und $0 < \alpha < 1$ gilt*

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M \Rightarrow x_0, x_1 \in M.$$

ii) Falls $M = \{x\}$ extremal, so heisst x ein **extremaler Punkt von** K *.*

Beispiel 4.5.1. i) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $||\cdot||_X$ die euklidische Norm, K die Vollkugel $K = \overline{B_1(0)} = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Dann ist jeder Randpunkt von K extremal.

ii) Sei $X = \mathbb{R}^2$, versehen mit der Norm

$$||(x, y)||_X = \max\{|x|, |y|\},$$

und sei K die Menge

$$K = \overline{B_1(0)} = \{(x, y);\ -1 \le x, y \le 1\}.$$

Dann sind die Seiten von K extremal, zum Beispiel

$$F = \{(x,1);\ -1 \le x \le 1\}.$$

Die Extremalpunkte von K sind genau die Punkte $(\pm 1, \pm 1)$.

Lemma 4.5.1. *Sei $M \subset K$ extremale Teilmenge von K, $L \subset M$ extremale Teilmenge von M. Dann ist L extremale Teilmenge von K.*

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$ und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in L.$$

Da $L \subset M$, gehört x_α zu M; da weiter M extremal in K ist, folgt $x_0, x_1 \in M$. Da schliesslich L extremal in M, liegen x_0 und x_1 sogar in L; also ist L extremal in K. □

Lemma 4.5.2. *Sei $K \subset X$ kompakt, $l \in X^*$, $\lambda = \min_{x \in K} l(x)$. Dann ist*

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}$$

extremale Teilmenge von K.

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$, und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in K_\lambda;$$

das heisst,

$$l(x_\alpha) = \alpha l(x_1) + (1-\alpha) l(x_0) = \lambda.$$

Da $l(x_0) \ge \lambda$, $l(x_1) \ge \lambda$, folgt $l(x_0) = \lambda = l(x_1)$; also $x_0, x_1 \in K_\lambda$. □

Satz 4.5.2. *(Krein-Milman) Sei $K \subset X$ kompakt und nicht leer. Dann besitzt K einen extremalen Punkt.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ die Familie

$$\mathcal{M} = \{M \subset K;\ \emptyset \ne M \text{ kompakt und extremal in } K\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$\forall L, M \in \mathcal{M}\colon L \le M :\Leftrightarrow M \subset L.$$

Wir verifizieren die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas.

Offenbar gilt $K \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \ne \emptyset$. Sei $(M_\iota)_{\iota \in I}$ linear geordnete Teilmenge in $\mathcal{M}$. Setze $M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$. Dann ist M kompakt und nicht leer.

Behauptung 1. $M \in \mathcal{M}$.

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$, und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota.$$

Dann gilt $x_\alpha \in M_\iota$ für beliebiges $\iota \in I$. Da M_ι extremal in K, folgt $x_0, x_1 \in M_\iota$ für alle ι; das heisst, $x_0, x_1 \in M$, und M ist extremal. □

Da offenbar $M \subset M_\iota$ für alle $\iota \in I$, ist M eine obere Schranke für $(M_\iota)_{\iota \in I}$ bezüglich der oben definierten Ordnung. Gemäss dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $M \in \mathcal{M}$. Insbesondere $M \neq \emptyset$. Sei $x \in M$.

Behauptung 2. $M = \{x\}$.

Beweis. (indirekt) Nimm an, $y \neq x$ sei ein weiteres Element von M. Wähle $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$ gemäss Satz 4.2.3. Setze $\lambda = \min_{m \in M} l(m)$. Gemäss Lemma 4.5.2 ist

$$M_\lambda = \{m \in M;\ l(m) = \lambda\} \subset M$$

extremal in M, nach Lemma 4.5.1 also auch in K. Weiter gilt $M_\lambda \neq \emptyset$, und M_λ ist kompakt, also $M_\lambda \in \mathcal{M}$. Schliesslich gilt $M_\lambda \subset M$; jedoch $M_\lambda \neq M$, da wegen $l(x) \neq l(y)$ entweder $x \notin M_\lambda$ oder $y \notin M_\lambda$, im Widerspruch zur Maximalität von M. □

Offenbar folgt die Aussage des Satzes aus den Behauptungen 1 und 2. □

Definition 4.5.2. *Für $A \subset X$ sei*

$$\overline{\mathrm{conv}}(A) = \bigcap_{A \subset B;\ B \text{ konvex und abgeschlossen}} B$$

die abgeschlossene **konvexe Hülle** *von A.*

Bemerkung 4.5.2. Offenbar ist der Durchschnitt konvexer Mengen konvex.

Satz 4.5.3. *(Krein-Milman) Sei K kompakt und konvex, $E \subset K$ die Menge der Extremalpunkte von K. Dann gilt $K = \overline{\mathrm{conv}}(E)$.*

Beweis. (indirekt). Sei $x_0 \in K \setminus \overline{\mathrm{conv}}(E)$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1.ii) mit $A = \{x_0\}$, $B = \overline{\mathrm{conv}}(E)$ und

$$\inf_{x \in \overline{\mathrm{conv}}(E)} l(x) > l(x_0) \geq \min_{x \in K} l(x) =: \lambda. \tag{4.5.1}$$

Setze

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}.$$

Da $K \neq \emptyset$, folgt $K_\lambda \neq \emptyset$, und K_λ ist kompakt und gemäss Lemma 4.5.2 zudem extremal in K. Nach Satz 4.5.2 besitzt K_λ einen extremalen Punkt y_0. Da K_λ extremal, ist y_0 gemäss Lemma 4.5.1 extremal auch in K; also $y_0 \in E \subset \overline{\mathrm{conv}}(E)$, im Widerspruch zu (4.5.1). □

4.6 Schwache Konvergenz und Konvexität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normiert mit Dualraum X^*, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, und sei $x \in X$.

Definition 4.6.1. *Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$* **konvergiert schwach gegen** *x, oder $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$, falls für alle $l \in X^*$ gilt:*

$$l(x_k) \to l(x) \quad (k \to \infty).$$

Beispiel 4.6.1. $l^2 \ni e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \overset{w}{\rightharpoonup} 0 \quad (i \to \infty)$.

Bemerkung 4.6.1. i) Wegen Satz 4.2.3 ist der schwache Limes x einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt. Wir schreiben daher $x = w - \lim_{k\to\infty} x_k$.

ii) Falls $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, so auch $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$.

Satz 4.6.1. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$. Dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Weiter gilt*

$$||x||_X \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

Beweis. Die Abbildungen $A_k \in L(X^*, \mathbb{R})$ mit

$$A_k(l) = l(x_k),\ l \in X^*,\ k \in \mathbb{N},$$

sind punktweise beschränkt. Da X^* vollständig ist, folgt mit Satz 4.2.2 und Satz 3.1.1 die gleichmässige Beschränkheit der Normen

$$||x_k||_X = \sup_{l\in X^*,\ ||l||_{X^*}\leq 1} |l(x_k)| = ||A_k||_{L(X^*,\mathbb{R})} \leq C < \infty.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.2 mit

$$||l||_{X^*} = 1,\ l(x) = ||x||_X.$$

Es folgt

$$||x||_X = l(x) = \liminf_{k\to\infty} l(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

□

Definition 4.6.2. *Die von den Mengen*

$$\Omega_{l,U} = l^{-1}(U),\ l \in X^*,\ U \subset \mathbb{R} \textit{ offen}$$

induzierte Topologie τ_w heisst **schwache Topologie** *auf X.*

Bemerkung 4.6.2. i) τ_w besteht aus beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen $\Omega_{l,U}$ wie in der obigen Definition.

ii) Offenbar ist die schwache Konvergenz die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie.

iii) Falls $\dim(X) = \infty$, so ist die schwache Topologie nicht metrisierbar; das heisst, sie wird von keiner Metrik auf X induziert. Man muss daher zum Beispiel zwischen den Begriffen "schwach abgeschlossenen" und "schwach folgenabgeschlossen" unterscheiden; vergleiche Lemma 4.6.2. Jedoch ist die schwache Topologie wegen Satz 4.2.3 Hausdorffsch.

iv) Da $l \in X^*$ stetig, ist jedes $\Omega_{l,U}$ auch offen in der Standardtopologie τ; das heisst, $\tau_w \subset \tau$.

Für $\Omega \subset X$ sei

$$\overline{\Omega}_w = w - \operatorname{clos}(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subset A;\ A \text{ schwach abgeschlossen}} A$$

die schwach abgeschlossene Hülle von Ω.

Lemma 4.6.1. *i)* $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_w$.

ii) Falls $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$ *für* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, *so folgt* $x \in \overline{\Omega}_w$.

Beweis. i) Nach Bemerkung 4.6.2.iii) gilt $\tau_w \subset \tau$; eine schwach abgeschlossene Menge ist somit auch (stark) abgeschlossen. Es folgt

$$\overline{\Omega}_w = \bigcap_{\Omega \subset A;\ A \text{ schwach abgeschlossen}} A \supset \bigcap_{\Omega \subset A;\ A \text{ abgeschlossen}} A = \overline{\Omega}.$$

ii) Falls $x \notin \overline{\Omega}_w$, so gibt es $U = \bigcap_{j=1}^{J} l_j^{-1}(I_j) \in \tau_w$ mit geeigneten $l_j \in X^*$ und offenen Mengen $I_j \subset \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq J$, so dass $\Omega \cap U = \emptyset$ und $x \in U$. Jedoch folgt mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$ insbesondere $l_j(x_k) \to l_j(x)$ $(k \to \infty)$ für jedes j, also $x_k \in \Omega \cap U$ für genügend grosses k, im Widerspruch zur Wahl von U. □

Definition 4.6.3. *Eine Menge* $A \subset X$ *heisst* **schwach folgenabgeschlossen** *(w.s.c.: weakly sequentially closed), falls für alle* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ *gilt*

$$x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Lemma 4.6.2. *Für* $A \subset X$ *gilt:*

i) A *schwach abgeschlossen* $\Rightarrow$ A *schwach folgenabgeschlossen.*

ii) A *schwach folgenabgeschlossen* $\Rightarrow$ A *abgeschlossen.*

Beweis. i) Sei A schwach abgeschlossen, und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ für $k \to \infty$. Mit Lemma 4.6.1.ii) folgt $x \in \overline{A}_w = A$.

ii) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, also auch $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$ gemäss Bemerkung 4.6.1.ii). Ist A schwach folgenabgeschlossen, so gilt $x \in A$, und mit Satz 1.2.2 ist A abgeschlossen. □

Beispiel 4.6.2. Die 1-Sphäre in l^2 ist abgeschlossen, aber nach Beispiel 4.6.1 ist sie nicht schwach folgenabgeschlossen. Dies zeigt, dass die Umkehrung der Aussage von Lemma 4.6.2.ii) nicht gilt.

Satz 4.6.2. *Sei* $\Omega \subset X$ *konvex. Dann gilt* $\overline{\Omega}_w = \overline{\Omega}$.

Beweis. (indirekt). Nimm an $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_w$. Gemäss Lemma 4.6.1.i) gibt es dann $x_0 \in \overline{\Omega}_w \setminus \overline{\Omega}$. Setze $A = \{x_0\}$, $B = \overline{\Omega}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1 mit

$$l(x_0) < \inf_{x\in B} l(x) \leq \inf_{x\in\Omega} l(x).$$

Es folgt $x_0 \notin \overline{\Omega}_w$ im Widerspruch zur Wahl von x_0. □

Satz 4.6.3. *(Mazur's lemma) Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ *mit* $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$. *Dann gibt es eine Folge von konvexen Linearkombinationen*

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k,\ 0 \le a_{kl} \le 1,\ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1,\ l \in \mathbb{N},$$

so dass

$$y_l \to x \quad (l \to \infty).$$

Beweis. Setze $K = \overline{\mathrm{conv}}(\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\})$. Nach Satz 4.6.2 gilt $K = \overline{K} = \overline{K}_w$; mit Lemma 4.6.1.ii) folgt $x \in K$. □

Bemerkung 4.6.3. Die schwache Topologie τ_w und τ unterscheiden sich nur, falls $\dim X = \infty$; in diesem Fall enthält mit den Mengen $\Omega_{l,U}$ auch jede schwach offene Menge einen nicht trivialen affinen Unterraum. Eine Konsequenz daraus sieht man im nachstehenden Beispiel.

Beispiel 4.6.3. Sei $\dim X = \infty$. Der schwache Abschluss der Menge

$$A = \{x \in X;\ ||x||_X = 1\}.$$

ist die Vollkugel

$$\overline{A}_w = \overline{B_1(0; X)} = \{x \in X;\ ||x||_X \le 1\}.$$

Beweis. Nach Satz 4.6.2 gilt $\overline{A}_w \subset \overline{\mathrm{conv}(A)} = \overline{B_1(0; X)}$. Zum Beweis der ungekehrten Inklusion sei $x \in X$ mit $||x||_X < 1$, $\Omega \in \tau_w$ eine Umgebung von x. Nach Bemerkung 4.6.3 enthält Ω einen nicht trivialen affinen Unterraum durch x; jeder derartige Raum schneidet jedoch A. Insbesondere folgt $\Omega \cap A \neq \emptyset$, und $x \in \overline{A}_w$; also $B_1(0; X) \subset \overline{A}_w$, und mit Lemma 4.6.1.i) folgt die Behauptung. □

Kapitel 5

Reflexivität, Separabilität und Schwache Kompaktheit

5.1 Reflexivität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*.

Definition 5.1.1. *Der Raum* $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$ *heisst* **Bidualraum von** X.

Wir können X in kanonischer Weise in X^{**} einbetten mittels $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, wobei

$$\forall l \in X^*,\ x \in X\colon (\mathcal{I}x)(l) := l(x). \tag{5.1.1}$$

Satz 5.1.1. $\mathcal{I}$ *ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Offenbar ist $\mathcal{I}$ linear. Wie im Beweis von Satz 4.6.1 folgt zudem mit Satz 4.2.2 für jedes $x \in X$ die Identität

$$||x||_X = \sup_{l \in X^*,\ ||l||_{X^*} \leq 1} |l(x)| = ||\mathcal{I}x||_{X^{**}}\ .$$

$\square$

Definition 5.1.2. X *heisst* **reflexiv**, *falls die durch* (5.1.1) *definierte Abbildung* $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$ *surjektiv ist.*

Beispiel 5.1.1. i) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind (wegen der Rangformel) reflexiv (für eine beliebige Norm).

ii) Jeder Hilbert-Raum $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ist reflexiv.

iii) $L^p(\Omega)$ ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$.

iv) $L^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Beweis. ii) Sei $J\colon H \to H^*$ die in Abschnitt 4.3 konstruierte Isometrie mit

$$\forall y \in H\colon J(x)(y) = (x,y)_H. \tag{5.1.2}$$

H^* ist wiederum Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\forall l = J(x),\ k = J(y) \in H^*\colon (l,k)_{H^*} := (J(x), J(y))_{H^*} = (x,y)_H. \tag{5.1.3}$$

Sei $J^*\colon H^* \to H^{**}$ der isometrische Isomorphismus analog zu (5.1.2). Dann gilt $\mathcal{I} = J^* \circ J$, denn für alle $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}y)(J(x)) &\overset{(5.1.1)}{=} J(x)(y) \overset{(5.1.2)}{=} (x,y)_H \overset{(5.1.3)}{=} (J(x), J(y))_{H^*} = (J(y), J(x))_{H^*} \\ &\overset{(5.1.2)}{=} J^*(J(y))(J(x)).\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

iii) Sei $1 < p < \infty$, und sei q zu p konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $J = J^p\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ der in Lemma 4.4.1 konstruierte Isomorphismus, und sei $\xi \in L^p(\Omega)^{**}$. Zu $l \in L^p(\Omega)^*$ sei $g \in L^q(\Omega)$ mit $l = J^p g$. Zu $k = \xi \circ J^p \in L^q(\Omega)^*$ finden wir analog $f \in L^p(\Omega)$ mit $k = J^q f$; also $f = (J^q)^{-1}(\xi \circ J^p)$. Es folgt

$$\xi(l) = \xi(J^p g) = J^q f(g) = \int_\Omega fg\, d\mu = J^p g(f) = l(f) = (\mathcal{I}f)(l),$$

und $\mathcal{I}$ ist surjektiv.

iv) $\mathcal{I}\colon L^1(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in (L^\infty(\Omega))^*$ ist gemäss Beispiel 4.4.1 nicht surjektiv. □

Bemerkung 5.1.1. i) Falls X reflexiv ist, so ist X auch vollständig.

ii) Für jeden normierten Raum X liefert $\overline{\mathcal{I}(X)} \subset X^{**}$ eine kanonische Vervollständigung; vergleiche Satz 2.1.1.

Beweis. i) X^{**} ist nach Beispiel 2.1.1 vollständig. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Dann ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X^{**}. Sei $z = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}x_k \in X^{**}$. Da X reflexiv, folgt $z = \mathcal{I}x$ für ein $x \in X$, und $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, da $\mathcal{I}$ isometrisch. □

Ist $L^\infty(\Omega)$ reflexiv oder nicht? – Wir beantworten diese Frage in einem allgemeinen Kontext.

Satz 5.1.2. *i) Falls X reflexiv ist, so gilt dies auch für X^*.*

ii) Falls X^* reflexiv ist und X vollständig, so ist auch X reflexiv.

Beweis. i) (Übung)

ii) (indirekt) Seien $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^*\colon X^* \to (X^*)^{**}$ die kanonischen Isometrien gemäss (5.1.1). Widerspruchsweise nehmen wir an $\mathcal{I}(X) \neq X^{**}$. Da X vollständig ist, ist $M := \mathcal{I}(X)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X^{**}. Wähle $x^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{I}(X)$ und dazu $l^{**} \in (X^{**})^* = (X^*)^{**}$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l^{**}(x^{**}) = 1$, $l^{**}_{|M} = 0$. Da $\mathcal{I}^*$ surjektiv, gilt $l^{**} = \mathcal{I}^*(l)$ für ein $l \in X^*$; also

$$\forall x \in X\colon 0 = l^{**}(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}^*(l)(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}(x)(l) = l(x).$$

Es folgt $l = 0$, $\mathcal{I}(l) = l^{**} = 0$, im Widerspruch zu $l^{**}(x^{**}) = 1$. □

Beispiel 5.1.2. $L^\infty(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Beweis. $L^1(\Omega)$ ist vollständig mit Dualraum $(L^1(\Omega))^*$ isometrisch isomorph zu $L^\infty(\Omega)$; $L^1(\Omega)$ ist jedoch gemäss Beispiel 5.1.1.iv) nicht reflexiv. □

Satz 5.1.3. *Sei X reflexiv, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann ist auch Y reflexiv.*

Beweis. Sei $i_Y \colon Y \to X$ die kanonische Einbettung, $i_Y^* \colon X^* \to Y^*$ die dazu "duale" Abbildung, definiert durch

$$\forall l \in X^*, y \in Y \colon i_Y^*(l)(y) = l(y),$$

mit

$$\forall l \in X^* \colon ||i_Y^*(l)||_{Y^*} \leq ||l||_{X^*}.$$

Sei analog $i_Y^{**} \colon Y^{**} \to X^{**}$ gegeben durch

$$\forall y^{**} \in Y^{**}, l \in X^* \colon i_Y^{**}(y^{**})(l) = y^{**}(i_Y^*(l)),$$

mit

$$\forall y^{**} \in Y^{**} \colon ||i_Y^{**}(y^{**})||_{X^{**}} \leq ||y^{**}||_{Y^{**}} ||i_Y^*||_{L(X^*,Y^*)} \leq ||y^{**}||_{Y^{**}}.$$

Seien weiter $\mathcal{I} \colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^Y \colon Y \to Y^{**}$ die kanonischen Isometrien. Nach Annahme ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

Behauptung 1. $\mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(Y^{**})) \subset Y$.

Beweis. Sei $y^{**} \in Y^{**}$, und nimm an $x = \mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(y^{**})) \notin Y$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l(x) \neq 0$, $l_{|Y} = 0$. Da $l_{|Y} = 0$, folgt $i_Y^*(l) = 0$; also

$$0 = y^{**}(i_Y^*(l)) = i_Y^{**}(y^{**})(l) = \mathcal{I}x(l) = l(x) \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Sei nun $y^{**} \in Y^{**}$. Nach Behauptung 1 gilt $y := \mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(y^{**})) \in Y$. Für $f \in Y^*$ sei $l \in X^*$ eine beliebige Fortsetzung gemäss Satz 4.1.2 mit $l_{|Y} = f$; das heisst, $i_Y^*(l) = f$. Es folgt

$$y^{**}(f) = y^{**}(i_Y^*(l)) = i_Y^{**}(y^{**})(l) = \mathcal{I}y(l) = l(y) \overset{(y \in Y)}{=} f(y) = \mathcal{I}^Y y(f)$$

für alle $f \in Y^*$; das heisst, $y^{**} = \mathcal{I}^Y y$, und $\mathcal{I}^Y$ ist surjektiv. Weiter folgt mit der Identität $\mathcal{I}y = i_Y^{**}(y^{**}) = i_Y^{**}(\mathcal{I}^Y y)$ die Gleichheit

$$i_Y^{**}\mathcal{I}^Y = \mathcal{I}_{|Y}.$$

□

5.2 Separabilität

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 5.2.1. *M heisst* **separabel**, *falls eine abzählbare Teilmenge $D \subset M$ existiert mit $\overline{D} = M$.*

Bemerkung 5.2.1. Eine Folge $(x_k) \subset M$ ist dicht genau dann, wenn

$$M = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(x_k) \ .$$

Beispiel 5.2.1. i) $\mathbb{R}^n$ ist separabel, falls d die von einer Norm induzierte Metrik ist.

ii) $C^0([0,1])$ ist nach dem Weierstraßschen Approximationssatz separabel; analog gilt dies auch für $C^0(\overline{\Omega})$ für eine beliebige offene Menge $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

iii) $L^p(\Omega)$ ist für $1 \leq p < \infty$ separabel; vergleiche Satz 3.5.2 der Vorlesung "Analysis III" über Masstheorie.

iv) $L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Betrachte dazu die Familie $f_s = \chi_{[0,s]}$, wobei $0 < s \leq 1$, mit

$$\forall 0 < s < t \leq 1 \colon ||f_s - f_t||_{L^\infty} = ||\chi_{]s,t]}||_{L^\infty} = 1. \tag{5.2.1}$$

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht. Für $0 < s \leq 1$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$||f_s - g_k||_{L^\infty} < 1/2. \tag{5.2.2}$$

Wegen (5.2.1) kann (5.2.2) für festes k nur für höchstens ein $s = s(k)$ gelten. Dies liefert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \ni k \mapsto s(k) \in]0,1]$, was jedoch unmöglich ist. (Vergleiche Beispiel 3.5.2, Analysis III.)

Satz 5.2.1. *Sei M separabel, $A \subset M$. Dann ist A separabel (bezüglich der induzierten Metrik $d_{|A\times A}$).*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in M, $a_0 \in A$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$A \cap B_{1/2l}(x_k) \neq \emptyset$$

wähle $a_{kl} \in A \cap B_{1/2l}(x_k)$, $a_{kl} = a_0$ sonst. Dann gilt $A \cap B_{1/2l}(x_k) \subset B_{1/l}(a_{kl})$, und

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_{1/2l}(x_k)) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(a_{kl});$$

also ist $D := \{a_{kl};\, k, l \in \mathbb{N}\}$ dicht gemäss Bemerkung 5.2.1. □

Wir verknüpfen nun Separabilität und lineare Struktur.

Satz 5.2.2. *Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

i) Ist X^* separabel, so ist X separabel.

ii) Ist X separabel und reflexiv, dann ist X^* separabel.

Beweis. i) Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^*. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit $||x_k||_X = 1$ und

$$l_k(x_k) \geq ||l_k||_{X^*} - 1/k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Setze

$$M = \overline{\text{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

M ist separabel. Die Aussage i) folgt daher aus

Behauptung. $M = X$.

Beweis. (indirekt) Sei $X \neq M$, und seien $x_0 \in X \setminus M$ und dazu $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 gewählt mit

$$l(x_0) = 1,\ l_{|M} = 0.$$

Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $l = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} l_k$. Es folgt

$$0 \neq ||l||_{X^*} = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} ||l_k||_{X^*} \leq \limsup_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} l_k(x_k),$$

jedoch gilt

$$|l_k(x_k)| = |(l_k - l)(x_k)| \leq ||l_k - l||_{X^*} ||x_k||_X \to 0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

□

ii) Mit X ist auch $X^{**} = \mathcal{I}(X)$ separabel. Falls nämlich $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in X, so liegt $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^{**}. Mit i) folgt Separabilität von X^*. □

5.3 Schwache Folgenkompaktheit

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*, Bidualraum X^{**} und kanonischer Isometrie $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$. Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^*, $l \in X^*$.

Definition 5.3.1. $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert schwach*** *gegen* l, $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l\ (k \to \infty)$, *falls*

$$\forall x \in X\colon l_k(x) \underset{(k\to\infty)}{\to} l(x). \tag{5.3.1}$$

Somit haben wir auf X^* nun drei Konvergenzbegriffe:

i) Normkonvergenz $l_k \to l\ (k \to \infty)$;

ii) schwache Konvergenz $l_k \overset{w}{\rightharpoonup} l\ (k \to \infty)$ im Sinne

$$\forall z \in X^{**}\colon z(l_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} z(l); \tag{5.3.2}$$

iii) schwache* Konvergenz $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l\ (k \to \infty)$ im Sinne von (5.3.1), das heisst, punktweise Konvergenz.

Bemerkung 5.3.1. i) Bedingung (5.3.1) ist äquivalent dazu, dass wir (5.3.2) fordern für alle $z \in \mathcal{I}(X)$. Falls daher X reflexiv ist, so sind die Bedingungen der schwachen und der schwach*-Konvergenz äquivalent.

ii) Im allgemeinen gilt: $l_k \underset{(k\to\infty)}{\to} l \ \Rightarrow\ l_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{w}{\rightharpoonup}} l \ \Rightarrow\ l_k \underset{k\to\infty}{\overset{w^*}{\rightharpoonup}} l$.

iii) Die schwache* Konvergenz ist Konvergenz bezüglich der von den Mengen

$$\Omega_{x,U} = \{l \in X^*;\ l(x) \subset U\} = (\mathcal{I}x)^{-1}(U),\ x \in X,\ U \subset \mathbb{R} \text{ offen},$$

erzeugten schwach*-Topologie τ_{w^*}. Offenbar gilt $\tau_{w^*} \subset \tau_w$, also ist τ_{w^*} gröber als τ_w und daher im allgemeinen nicht metrisierbar. Abgeschlossenheit, beziehungsweise Kompaktheit können daher nicht äquivalent mit dem Folgenkriterium umschrieben werden. Schwach*-abgeschlossene Mengen sind analog zu Abschnitt 4.6 stets auch abgeschlossen bezüglich schwach*-Konvergenz und sind schwach abgeschlossen, sowie stark abgeschlossen. Weiter gilt für $\Omega \subset X^*$ analog zu Lemma 4.6.1 stets $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}_w \subset \bar{\Omega}_{w^*}$.

Nach dem *Satz von Tychonov* der Topologie ist die abgeschlossene 1-Kugel in X^* stets schwach*-kompakt. Für die Anwendungen, die wir unten besprechen, wird jedoch Folgenkompaktheit benötigt.

Satz 5.3.1. *(Banach-Alaoglu) Sei X separabel, $(l_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ beschränkt. Dann gibt es $l \in X^*$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Wähle Teilfolgen $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \Lambda_j \supset \Lambda_{j+1} \supset \ldots \supset \ldots$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$l_k(x_j) \to a_j =: l(x_j)\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda_j),$$

und definiere Λ als die zugehörige Diagonalfolge.

Behauptung. l lässt sich zu $l \in X^*$ erweitern.

Beweis. l ist linear auf $M = \operatorname{span}\{x_j;\ j \in \mathbb{N}\}$, und

$$|l(x)| = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} |l_k(x)| \le \limsup_{k\to\infty} ||l_k||_{X^*}||x||_X,\ \forall x \in M.$$

Also ist l stetig fortsetzbar auf $X = \overline{M}$. □

Wir können nun zeigen, dass $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Sei dazu $x \in X$ beliebig, $x = \lim_{j\to\infty,\ j\in J} x_j$, für eine Folge $J \subset \mathbb{N}$. Für $j \in J$, $k \in \mathbb{N}$ schätze ab

$$\begin{aligned} |l_k(x) - l(x)| &\le |l_k(x - x_j)| + |l(x - x_j)| + |l_k(x_j) - l(x_j)| \\ &\le (\sup_k ||l_k||_{X^*} + ||l||_{X^*})||x - x_j||_X + |l_k(x_j) - l(x_j)|\,. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ für festes $j \in J$ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty,k\in\Lambda} |l_k(x) - l(x)| \le C||x - x_j||_X.$$

Mit $j \to \infty$, $j \in J$, folgt $l_k(x) \to l(x)$ $(k \to \infty)$, wie gewünscht. □

Beispiel 5.3.1. i) $X = L^1(\Omega)$ ist separabel, $X^* \cong L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.4.1. Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so existiert nach Satz 5.3.1 eine Teilfolge

$\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f_k g\, d\mu \to \int_\Omega fg\, d\mu \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $g \in L^1(\Omega)$.

ii) $X = L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 5.3.1 in diesem Fall nicht gilt.

Für $0 < \varepsilon \leq 1$ sei $T_\varepsilon \in X^*$ gegeben durch

$$T_\varepsilon f = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f\, dx,\ f \in L^\infty([0,1]).$$

Offenbar gilt

$$||T_\varepsilon||_{X^*} = \sup_{||f||_{L^\infty} \leq 1} |T_\varepsilon f| \leq 1,$$

jedoch ist die Menge $\{T_\varepsilon;\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$ nicht schwach* relativ folgenkompakt.

Beweis. (indirekt). Nimm an, für eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und ein $T \in X^*$ gelte

$$T_{\varepsilon_k} \overset{w^*}{\rightharpoonup} T \quad (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, dass gilt

$$1 > \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Wähle

$$f = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \chi_{[\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k[} \in L^\infty([0,1])$$

mit $||f||_{L^\infty} = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_k} f &= \frac{1}{\varepsilon_k}\sum_{l=k}^\infty (-1)^l(\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}) \\ &= (-1)^k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{\varepsilon_{k+1}} f\, dx; \end{aligned}$$

das heisst,

$$\left|T_{\varepsilon_k} f - (-1)^k\right| \leq \frac{1}{\varepsilon_k}\left(\varepsilon_{k+1} + \int_0^{\varepsilon_{k+1}} |f|\, dx\right) \leq \frac{2\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Die Folge $(T_{\varepsilon_k} f)_{k \in \mathbb{N}}$ häuft sich somit bei 1 und -1, ist daher divergent. □

Betrachten wir jedoch den separablen Teilraum $C^0([0,1])$ von $L^\infty([0,1])$, so ist für die Einschränkung der T_ε auf $C^0([0,1])$ der Satz 5.3.1 anwendbar. In der Tat sehen wir sofort, dass für jedes $f \in C^0([0,1])$ gilt $T_\varepsilon(f) \to f(0)$ $(\varepsilon \to 0)$; das heisst, $T_\varepsilon \overset{w^*}{\rightharpoonup} \delta$ $(\varepsilon \to 0)$, das Dirac-Funktional.

Die Annahme der Separabilität kann in reflexiven Räumen entfallen. Ausserdem können wir mittels $\mathcal{I}$ Konvergenzaussagen in $X^{**} = (X^*)^*$ zurückziehen und erhalten so schwache Folgenkompaktheit im ursprünglichen Raum ("schwaches Bolzano-Weierstrass Theorem").

Satz 5.3.2. *(Eberlein-Šmulyan) Sei X reflexiv, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt. Dann existiert $x \in X$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis. Betrachte

$$Y = \overline{\mathrm{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Offenbar ist Y separabel und nach Satz 5.1.3 reflexiv. Nach Satz 5.2.2 ist auch Y^* separabel. Sei $\mathcal{I}\colon Y \to Y^{**}$ die kanonische Isometrie.

Nach Satz 5.3.1 ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y^{**} = \mathcal{I}Y$ schwach* folgenkompakt; das heisst, für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x \in Y$ gilt

$$(\mathcal{I}x_k)(l) = l(x_k) \underset{(k\to\infty,\ k\in\Lambda)}{\longrightarrow} (\mathcal{I}x)(l) = l(x),\ \forall l \in Y^*.$$

Für jedes $l \in X^*$ gehört die Einschränkung $l_{|_Y}$ zu Y^*. Da weiter $x_k, x \in Y$, folgt

$$l(x_k) \to l(x) \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $l \in X^*$; das heisst, $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. □

Beispiel 5.3.2. i) Satz 5.3.2 ist insbesondere anwendbar, falls X ein Hilbert-Raum ist.

ii) Sei $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Nach Satz 4.4.1 ist $X = L^p(\Omega)$ reflexiv. Daher liefert Satz 5.3.2 eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^p(\Omega)$ mit $f_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} f$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$; das heisst, mit $q = \frac{p}{p-1}$ gilt für $k \to \infty,\ k \in \Lambda$:

$$\forall g \in L^q(\Omega)\colon \int_\Omega f_k g\, d\mu \to \int_\Omega f g\, d\mu.$$

Als weitere Anwendung von Satz 5.3.2 beweisen wir das folgende Approximationstheorem.

Satz 5.3.3. *(Approximationstheorem) Sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen, $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es $m_0 \in M$ mit*

$$||x_0 - m_0||_X = \mathrm{dist}(x_0, M) = \inf_{m\in M} ||x_0 - m||_X.$$

Bemerkung 5.3.2. Satz 5.3.3 ist insbesondere anwendbar, falls M ein nicht trivialer abgeschlossener linearer Unterraum von X ist, und liefert ein Analogon zu Korollar 2.4.1 in diesem Fall. Analog zur Situation im Hilbertraum können wir m_0 als "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf M auffassen.

Beweis. Sei $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ eine "Minimalfolge" mit

$$||x_0 - m_k||_X \to \mathrm{dist}(x_0, M) \quad (k \to \infty).$$

Die Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach Satz 5.3.2 gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $m_0 \in X$ mit

$$m_k \overset{w}{\rightharpoonup} m_0 \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Da M abgeschlossen und konvex ist, ist M nach Satz 4.6.2 auch schwach abgeschlossen, somit auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz, und $m_0 \in M$. Schliesslich folgt mit Satz 4.6.1

$$||x_0 - m_0||_X \leq \liminf_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} ||x_0 - m_k|| = \mathrm{dist}(x_0, M),$$

wie gewünscht. □

5.4 Variationsrechnung

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset X$, $F\colon M \to \mathbb{R}$.

Definition 5.4.1. *Die Funktion F ist* **schwach folgen-unterhalb-stetig** *(kurz: w.s.l.s.c. oder weakly sequentially lower semi-continuous) in $x_0 \in M$, falls für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \overset{w}{\to} x_0$ $(k \to \infty)$ gilt*

$$F(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} F(x_k).$$

Kürzer schreiben wir auch

$$F(x_0) \leq \liminf_{x\overset{w}{\to}x_0,\ x\in M} F(x).$$

Beispiel 5.4.1. i) Die Norm $F(x) = ||x||_X$ ist w.s.l.s.c. auf X gemäss Satz 4.6.1.

ii) Sei $F\colon M \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, wobei $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist F auf M w.s.l.s.c.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \overset{w}{\to} x_0$. Wähle eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$F(x_l) \to \liminf_{k\to\infty} F(x_k) =: \alpha_0 \geq -\infty \quad (l \to \infty,\ l \in \Lambda).$$

OBdA dürfen wir annehmen, dass $\Lambda = \mathbb{N}$.

Nach Satz 4.6.3 gibt es Konvexkombinationen

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k,\ 0 \leq a_{kl} \leq 1,\ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1$$

mit $y_l \to x_0$ $(l \to \infty)$, und $(y_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset M$, da M konvex. Für jedes feste $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 4.6.2 und Lemma 4.6.1 die Beziehung $x_0 \in \overline{\mathrm{conv}}(\{x_k;\ k \geq k_0\})$, und wir dürfen annehmen, dass für genügend grosses $l_0 = l_0(k_0)$ gilt

$$\forall l \geq l_0\ \forall k \leq k_0\colon a_{kl} = 0.$$

Mit der Konvexität von F folgt

$$\forall l \geq l_0\colon F(y_l) \leq \sum_{k=k_0}^{l} a_{kl} F(x_k) \leq \sup_{k\geq k_0} F(x_k).$$

Nach Grenzübergang $l \to \infty$ erhalten wir

$$F(x_0) = \lim_{l\to\infty} F(y_l) \le \sup_{k\ge k_0} F(x_k).$$

Mit $k_0 \to \infty$ folgt schliesslich

$$F(x_0) \le \limsup_{k\to\infty} F(x_k) = \alpha_0.$$

Insbesondere gilt $\alpha_0 > -\infty$. □

Definition 5.4.2. $F\colon M \to \mathbb{R}$ *heisst* **koerziv** *auf* M *bezüglich* $||\cdot||_X$*, falls gilt*

$$F(x) \to \infty \quad (||x||_X \to \infty,\ x \in M).$$

Satz 5.4.1. *(Variationsprinzip) Sei* X *reflexiv,* $M \subset X$ *nicht leer und schwach folgen-abgeschlossen,* $F\colon M \to \mathbb{R}$ *koerziv und w.s.l.s.c. Dann existiert* $x_0 \in M$ *mit*

$$F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x).$$

Beweis. Betrachte eine Minimalfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$F(x_k) \to \inf_{x\in M} F(x) =: \alpha_0 \ge -\infty \quad (k \to \infty).$$

Da F koerziv ist, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Satz 5.3.2 besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x_0$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$.

Da M schwach folgen-abgeschlossen, folgt $x_0 \in M$, und

$$F(x_0) \le \liminf_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} F(x_k) = \alpha_0,$$

da F w.s.l.s.c. Insbesondere gilt wieder $\alpha_0 > -\infty$.

□

Bemerkung 5.4.1. Falls M konvex und F strikt konvex, so kann F höchstens eine Minimalstelle in M besitzen.

Beweis. Seien $x_0 \ne x_1 \in M$ mit

$$F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x) = F(x_1).$$

Für $0 < t < 1$ gilt $x_t = tx_1 + (1-t)x_0 \in M$, und mit

$$F(x_t) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x)$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. □

Beispiel 5.4.2. Wir können nun auch einen variationellen Beweis des Riesz-schen Darstellungssatzes, Satz 4.3.2, geben.

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum, und sei $l \in H^*$. Die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{2}||x||_H^2 - l(x),\ x \in H,$$

ist koerziv, stetig und konvex (Übung), nach Beispiel 5.4.1.ii) also auch w.s.l.s.c., und $M = H$ ist schwach folgen-abgeschlossen und nicht leer. Gemäss Satz 5.4.1 existiert $y \in H$ mit

$$F(y) = \inf_{x \in H} F(x) \leq F(y + \varepsilon z) \ \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R},\ z \in H.$$

Entwickeln wir für festes $z \in H$

$$F(y + \varepsilon z) = F(y) + \varepsilon\big((y, z)_H - l(z)\big) + \frac{\varepsilon^2}{2}||z||_H^2,$$

so ist die Funktion $\varepsilon \mapsto F(y + \varepsilon z)$ differenzierbar bei $\varepsilon = 0$, und es folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(y + \varepsilon z) = (y, z)_H - l(z).$$

Da $z \in H$ beliebig gewählt war, folgt $l = j_y$, wie behauptet.

Kapitel 6

Auflösung linearer Gleichungen, Spektraltheorie

6.1 Duale Operatoren

Seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Dualraum X^*, beziehungsweise Y^*, $A\colon D_A \subset X \to Y$ linear mit $\overline{D_A} = X$.

Definition 6.1.1. *Der zu A* **duale Operator** *$A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^*} = \{y^* \in Y^*;\ l_{y^*}\colon D_A \ni x \mapsto \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} \text{ ist stetig } \},$$

und für $y^* \in D_{A^*}$ ist $A^*y^* \in X^*$ die eindeutige Fortsetzung von l_{y^*} auf X.

Bemerkung 6.1.1. i) A^* hat die Eigenschaft

$$\forall x \in D_A,\ y^* \in D_{A^*}\colon \langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}. \tag{6.1.1}$$

ii) Auch falls A nicht dicht definiert ist, kann man **formal** zu A **duale Operatoren** durch (6.1.1) charakterisieren, jedoch sind diese dann nicht eindeutig.

Satz 6.1.1. *Für $A \in L(X,Y)$ gilt $A^* \in L(Y^*, X^*)$, und*

$$||A||_{L(X,Y)} = ||A^*||_{L(Y^*,X^*)}.$$

Beweis. Für $y^* \in Y^*$, $x \in X$ gilt

$$|\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| \le ||y^*||_{Y^*}||A||_{L(X,Y)}||x||_X;$$

das heisst, $y^* \in D_{A^*}$, und

$$\begin{aligned}\sup_{\|y^*\|_{Y^*}\le 1} \|A^*y^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X\le 1,\ \|y^*\|_{Y^*}\le 1} |\langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X}| \\ &= \sup_{\|x\|_X\le 1,\ \|y^*\|_{Y^*}\le 1} |\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| = \|A\|_{L(X,Y)}\end{aligned}$$

gemäss Satz 4.2.2. □

Beispiel 6.1.1. Seien $1 < p, q < \infty$ konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte $X = Y = L^p(\Omega)$ mit Dualraum $X^* = Y^* \cong L^q(\Omega)$. Sei

$$A = \Delta\colon D_A = C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega).$$

Dann gilt $D_{A^*} \supset C_c^\infty(\Omega)$, da für alle $g \in C_c^\infty(\Omega)$ die Abbildung

$$l_g\colon C_c^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \langle g, \Delta f\rangle_{L^q\times L^p} = \int_\Omega g\Delta f\, d\mu = \int_\Omega \Delta g f\, d\mu = \langle \Delta g, f\rangle_{L^q\times L^p}$$

mit

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega)\colon\ |l_g(f)| \le \|\Delta g\|_{L^q}\|f\|_{L^p},$$

sich stetig auf $L^p(\Omega)$ fortsetzen lässt, und

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega)\colon A^*g = \Delta g.$$

Satz 6.1.2. *Sei $A\colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert. Dann folgt*

i) $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ ist abgeschlossen.

ii) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

Beweis. i) Betrachte $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_{A^*}$ mit

$$y_k^* \to y^* \text{ in } Y^*,\ x_k^* := A^*y_k^* \to x^* \text{ in } X^* \quad (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $x \in D_A$:

$$\begin{aligned}\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} &= \lim_{k\to\infty} \langle y_k^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle A^*y_k^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X}.\end{aligned}$$

Also ist $y^* \in D_{A^*}$ mit $A^*y^* = x^*$; das heisst, A^* ist abgeschlossen.

ii) Sei $A \subset B$; das heisst $D_A \subset D_B$, $B_{|D(A)} = A$. Sei $y^* \in D_{B^*}$. Dann gilt für alle $x \in D_A \subset D_B$

$$\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} = \langle y^*, Bx\rangle_{Y^*\times Y} = \langle B^*y^*, x\rangle_{X^*\times X};$$

das heisst $y^* \in D_{A^*}$, $A^*y^* = B^*y^*$. □

6.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die Auflösbarkeit der Gleichung

$$Ax = y \tag{6.2.1}$$

zu vorgegebenem y aufgrund der Eigenschaften von A^* entscheiden.

Satz 6.2.1. *(Banach : Closed range theorem) Seien X, Y Banach-Räume, der lineare Operator $A\colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert und abgeschlossen, mit dualem Operator A^*. Dann sind äquivalent:*

i) $im(A)$ ist abgeschlossen in Y;

ii) $im(A^*)$ ist abgeschlossen in X^*;

iii) $im(A) = {}^\perp\ker(A^*) = \{y \in Y;\ \forall y^* \in \ker(A^*)\colon \langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} = 0\}$;

iv) $im(A^*) = \ker(A)^\perp = \{x^* \in X^*;\ \forall x \in \ker(A)\colon \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = 0\}$.

Wir beweisen nur die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ iii); hierfür müssen die Räume X, Y noch nicht einmal vollständig sein. Der vollständige Beweis von Satz 6.2.1 ist recht aufwendig und anspruchsvoll. So beweist Werner den Satz nur für beschränkte Operatoren und überlässt es in Aufgabe VII.5.19 dem Leser, die Details für den allgemeinen Fall zu ergänzen. Auch der Beweis von Kato gilt nur im Fall beschränkter Operatoren. (Die von Kato durchgeführte Reduktion auf diesen Fall enthält einen Fehler.) Einen ausführlichen Beweis für den allgemeinen Fall findet man jedoch bei Brezis, Thm. II.18.

Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 6.2.1. *i) Sei $M \subset X$. Dann ist $M^\perp \subset X^*$ abgeschlossen (sogar schwach* folgenabgeschlossen).*

ii) Sei $L \subset X^*$. Dann ist ${}^\perp L \subset X$ abgeschlossen (sogar schwach folgenabgeschlossen).

Beweis. ii) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset {}^\perp L$ mit $x_k \xrightarrow{w} x \in X$ $(k \to \infty)$. Für beliebiges $x^* \in L$ erhalten wir

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = \lim_{k\to\infty} \langle x^*, x_k\rangle_{X^*\times X} = 0;$$

das heisst, $x \in {}^\perp L$.

i) analog. □

Beweis von Satz 6.2.1, "i) $\Leftrightarrow$ iii)". Die Implikation iii) $\Rightarrow$ i) folgt unmittelbar aus Lemma 6.2.1.ii).

i) $\Rightarrow$ iii) Aus Bemerkung 6.1.1 folgt unmittelbar die Inklusion $im(A) \subset {}^\perp\ker(A^*)$. Die umgekehrte Inklusion beweisen wir indirekt. Sei $y \in {}^\perp\ker(A^*) \setminus im(A)$. Da $im(A)$ nach Annahme abgeschlossen, gibt es $y^* \in Y^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} \neq 0$ und $y^*_{|im(A)} = 0$. Letztere Bedingung besagt, dass

$$\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} = 0,\ \forall x \in D_A.$$

Es folgt $y^* \in D_{A^*}$ und $A^*y^* = 0$; also $y^* \in \ker(A^*)$. Da $y \in {}^\perp\ker(A^*)$, erhalten wir $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} = 0$ und somit den gewünschten Widerspruch. □

Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren $A\colon D_A \subset X \to Y$ mit abgeschlossenem Bild ist die Gleichung (6.2.1) somit zu vorgegebenem $y \in Y$ genau dann durch ein $x \in D_A$ auflösbar, wenn alle linearen Funktionale im Kern von

A^* auf y "senkrecht stehen" (verschwinden). Wir sagen dann, die Gleichung (6.2.1) ist **"normal lösbar"**.

Satz 6.2.2. *Für $A\colon D_A \subset X \to Y$ wie in Satz 6.2.1 sind äquivalent:*

i) A ist surjektiv;

ii) A^* ist injektiv, $im(A^*)$ ist abgeschlossen;

iii) $\exists c_0 > 0\, \forall y^* \in D_{A^*}\colon c_0 ||y^*||_{Y^*} \le ||A^* y^*||_{X^*}$.

Beweis. i) $\Leftrightarrow$ ii) folgt unmittelbar aus Satz 6.2.1.

ii) $\Rightarrow$ iii) A^* ist abgeschlossener Operator $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to im(A^*)$, wobei $im(A^*)$ als abgeschlossener Unterraum eines Banach-Raums ebenfalls ein Banach-Raum ist. Die Behauptung folgt somit aus Satz 3.3.2.

iii) $\Rightarrow$ ii) Offenbar ist A^* mit iii) injektiv. Sei $x_k^* = A^* y_k^*$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in $im(A^*)$ mit $x_k^* \to x^*$ $(k \to \infty)$. Wegen iii) ist dann auch $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Sei $y^* = \lim_{k\to\infty} y_k^*$. Da A^* abgeschlossen, folgt $y^* \in D_{A^*}$, $x^* = A^* y^*$; das heisst, $im(A^*)$ ist abgeschlossen. □

Wann ist das Bild eines Operators abgeschlossen? Eine wichtige Klasse sind die sogenannten **Fredholm Operatoren** $A = id - T$ auf einem Banach-Raum X, wobei T kompakt.

Definition 6.2.1. *Ein Operator $T \in L(X)$ heisst* **kompakt**, *falls $\overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt ist; analog für $T \in L(X,Y)$.*

Lemma 6.2.2. *Sei $T \in L(X)$ kompakt. Falls $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$, so folgt dann $Tx_k \to Tx$ $(k \to \infty)$.*

Beweis. Nach Satz 4.6.1 ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da T nach Annahme kompakt, ist der Abschluss der Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kompakt. Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $y_k = Tx_k \to y$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Zu $l \in \mathbb{N}$ wähle

$$z_l = \sum_{k\ge l,\ k\in\Lambda} a_{kl} x_k \in \overline{\text{conv}}\{x_k;\ k \ge l,\ k \in \Lambda\},\ 0 \le a_{kl} \le 1,\ \sum_{k\ge l,\ k\in\Lambda} a_{kl} = 1,$$

gemäss Satz 4.6.3 mit

$$z_l = \sum_{k\ge l,\ k\in\Lambda} a_{kl} x_k \to x \quad (l \to \infty).$$

Beachte, dass $x \in \overline{\text{conv}}\{x_k;\ k \ge l,\ k \in \Lambda\}$ für jedes $l \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$Tz_l = \sum_{k\ge l,\ k\in\Lambda} a_{kl} y_k \to y = Tx \quad (l \to \infty).$$

Aus der Eindeutigkeit des Häufungspunkts $y = Tx$ folgt die Konvergenz der ganzen Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Satz 6.2.3. *Sei X ein Banach-Raum, $T \in L(X)$ kompakt. Dann ist das Bild $im(id - T)$ des Operators $id - T$ abgeschlossen.*

Beweis. Setze $M = \ker(id - T)$. Da $\overline{B_1(0;M)} = \overline{T(B_1(0;M))} \subset \overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt, ist M endlich-dimensional nach Satz 2.1.4.

Sei $L = \overline{L}$ ein topologisches Komplement von M. Setze

$$Sx = x - Tx, x \in L.$$

Dann ist S injektiv, $im(S) = im(id - T)$.

Behauptung 1. $\exists r > 0 \; \forall x \in L \colon r||x||_X \leq ||Sx||_X$.

Beweis. (indirekt) Andernfalls gibt es $x_k \in L$ mit

$$k||Sx_k||_X \leq ||x_k||_X = 1, \; k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt für eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$:

$$Sx_k = x_k - Tx_k \to 0, \; Tx_k \to x_0 \; (k \to \infty, \; k \in \Lambda);$$

das heisst,

$$x_k \to x_0 \in L \; (k \to \infty; \; k \in \Lambda),$$

und $Sx_0 = 0, ||x_0||_X = 1$. Der Widerspruch ergibt die Behauptung. □

Sei $y_k = Sx_k \to y \; (k \to \infty)$, $x_k \in L$. Mit Behauptung 1 folgt, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in L. Da L abgeschlossen ist, existiert $x = \lim_{k \in \mathbb{N}} x_k \in L$ mit $y = Sx$; das heisst $im(S) = im(id - T)$ ist abgeschlossen. □

Beispiel 6.2.1. Kompakte Operatoren erhält man oft in der Form von Integraloperatoren.

6.3 Kompaktheit

Der folgende Satz gibt ein klassisches Kriterium für Folgenkompaktheit im Raum der stetigen Funktionen auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 6.3.1. *(Arzéla-Ascoli) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \subset C^0(\overline{\Omega})$. Es sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist relativ folgenkompakt;

ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig; das heisst, $\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{C^0} < \infty$, *und*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in \Omega \; \forall f \in \mathcal{F} \colon \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (6.3.1)$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Übung.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, und sei $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ dicht in $\overline{\Omega}$. Da $\mathcal{F}$ beschränkt, gibt es Teilfolgen $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots$ mit

$$f_k(x_l) \to a_l =: f(x_l) \quad (k \to \infty, \; k \in \Lambda_l).$$

Nach Auswahl einer Diagonalfolge Λ erhalten wir

$$\forall \, l \in \mathbb{N} \colon f_k(x_l) \to f(x_l) \quad (k \to \infty, \; k \in \Lambda). \quad (6.3.2)$$

Behauptung 1. f ist gleichmässig stetig und lässt sich daher fortsetzen zu einer Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Für $x_l, x_m \in \Omega$ mit $|x_l - x_m| < \delta$ schätze ab

$$\begin{aligned} |f(x_l) - f(x_m)| &\leq |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f_k(x_m)| + |f_k(x_m) - f(x_m)| \\ &\leq \varepsilon + |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f(x_m) - f_k(x_m)|, \end{aligned}$$

wobei $k \in \Lambda$ beliebig. Nach Grenzübergang $k \to \infty$, $k \in \Lambda$, folgt mit (6.3.2) die Abschätzung

$$|f(x_l) - f(x_m)| \leq \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Behauptung 2. $f_k \to f$ in $C^0(\overline{\Omega})$ für $k \to \infty$, $k \in \Lambda$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Da $\overline{\Omega}$ kompakt, überdecken endlich viele Bälle $B_\delta(x_l), 1 \leq l \leq L$, die Menge $\overline{\Omega}$. Wähle k_0 gemäss (6.3.2), so dass für $k \geq k_0$ und $1 \leq l \leq L$ gilt

$$|f_k(x_l) - f(x_l)| < \varepsilon.$$

Sei $x \in \Omega$ beliebig. Wähle $1 \leq l \leq L$ mit $x \in B_\delta(x_l)$ und schätze ab

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x)| < 3\varepsilon$$

für $k \geq k_0$. □

Somit ist $\mathcal{F}$ relativ folgenkompakt. □

Ein analoges Kriterium gilt auch in den Funktionenräumen $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Satz 6.3.2. *(Fréchet-Kolmogorov) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$. Für eine Familie $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist relativ folgenkompakt;

ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und "gleichgradig stetig in L^p", das heisst,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f - \tau_h f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad (h \to 0), \tag{6.3.3}$$

wobei wir $f \in \mathcal{F}$ durch $f = 0$ ausserhalb Ω zu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, und mit der Notation $\tau_h f(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$, für jedes $h \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) $\overline{\mathcal{F}}$ ist kompakt, also auch beschränkt.

Zum Beweis von (6.3.3) sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Endlich viele Bälle $B_\varepsilon(f_k)$, $1 \leq k \leq K$, mit $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ überdecken $\overline{\mathcal{F}}$. Wähle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; \forall k \in \{1, \ldots, K\} \colon \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)|^p < \frac{\varepsilon^p}{\mathcal{L}^n(\mathrm{supp}(f_k))}.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ folgt für $1 \leq k \leq K$:

$$||f_k - \tau_h f_k||_{L^p}^p \leq ||f_k - \tau_h f_k||_{L^\infty}^p \int_{\mathrm{supp}(f_k)} dx < \varepsilon^p.$$

Sei nun $f \in \mathcal{F}$ beliebig, $1 \leq k \leq K$ so gewählt, dass $f \in B_\varepsilon(f_k)$.

Es folgt für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$

$$\begin{aligned} ||f - \tau_h f||_{L^p} &\leq ||f - f_k||_{L^p} + ||f_k - \tau_h f_k||_{L^p} + ||\tau_h(f - f_k)||_{L^p} \\ &= 2||f - f_k||_{L^p} + ||f_k - \tau_h f_k||_{L^p} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ eine "regularisierende Folge" mit $0 \leq \rho_\delta \in C_c^\infty(B_\delta(0))$ und mit $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta dx = 1$ für jedes $\delta > 0$. Für $f \in \mathcal{F}$ setze $f_\delta = \rho_\delta * f$ mit

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) f(x - y)\, dy.$$

Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gemäss (6.3.3) gewählt mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f - \tau_h f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon. \tag{6.3.4}$$

Behauptung 1. $\forall f \in \mathcal{F}$: $||f - f_\delta||_{L^p} < \varepsilon$.

Beweis. Schreibe

$$(f_\delta - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)(f(x - y) - f(x))\, dy.$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung und da $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)\, dy = 1$, folgt mit (6.3.4)

$$||f_\delta - f||_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) ||f - \tau_y f||_{L^p}\, dy < \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Behauptung 2. Für festes $\delta > 0$ ist $(f_\delta)_{f \in \mathcal{F}} \subset C^0(\overline{\Omega})$ beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis. Da Ω beschränkt, folgt mit der Hölderschen Ungleichung zunächst

$$|f_\delta(x)| \leq \sup_y \rho_\delta(y) \int_{B_\delta(0)} |f(x - y)|\, dy \leq C_\delta ||f||_{L^p} \leq C$$

mit einer von $x \in \Omega$ und $f \in \mathcal{F}$ unabhängigen Konstanten C. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} |f_\delta(x) - f_\delta(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\delta(x - y) - \rho_\delta(z - y)) f(y)\, dy \right| \\ &\leq \sup_y |\rho_\delta(x - y) - \rho_\delta(z - y)|\, ||f||_{L^p} \leq C_\delta\, |x - z|\, ||f||_{L^p}. \end{aligned}$$

□

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Für $\varepsilon_l = 1/l$ mit zugehörigem $\delta_l > 0$ wähle Teilfolgen $\Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_l \supset \Lambda_{l+1} \ldots$ gemäss Satz 6.3.1 und Behauptung 2 so, dass

$$||f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}||_{L^p} \leq (\mathcal{L}^n(\Omega))^{1/p} ||f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}||_{C^0} < \varepsilon_l$$

für $j, k \in \Lambda_l$, $l \in \mathbb{N}$. Sei Λ eine Diagonalfolge mit der Eigenschaft, dass für jedes $l \in \mathbb{N}$ und für jedes $k \in \Lambda$ gilt $k \in \Lambda_l$, falls $k \geq k_0(l)$ für ein geeignetes $k_0(l) \in \mathbb{N}$. Mit Behauptung 1 folgt

$$\begin{aligned}||f_j - f_k||_{L^p} &\leq ||f_j - f_{j,\delta_l}||_{L^p} + ||f_{j,\delta_l} - f_{k,\delta_l}||_{L^p} \\ &\quad + ||f_{k,\delta_l} - f_k||_{L^p} < 3\varepsilon_l\end{aligned}$$

für $j, k \in \Lambda$, $j, k \geq k_0(l)$; das heisst, $(f_k)_{k\in\Lambda}$ ist Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. □

Beispiel 6.3.1. Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 3$, mit Rand von der Klasse C^1, und sei $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$(Tf)(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy,$$

wobei $G\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ bzgl. $\mathcal{L}^n$ messbar mit $G(x,y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und mit

$$\forall x \neq y\colon 0 \leq G(x,y) = G(y,x) \leq C|x-y|^{2-n},\ |\nabla G(x,y)| \leq C|x-y|^{1-n}.$$

Setze G fort durch $G(x,y) = 0$, falls $x \notin \Omega$.

Da für $0 < \alpha < n$ gilt $|x|^{\alpha-n} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p < \frac{n}{n-\alpha}$, erhalten wir $Tf \in L^2$ mit $||Tf||_{L^2} \leq C||f||_{L^2}$. Weiter gilt für $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \leq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}||Tf - \tau_h(Tf)||_{L^2} &\leq \int_\Omega |G(x,y) - G(x+h,y)||f(y)|\, dy \\ &\leq C|h| \cdot ||\, |x|^{1-n} * |f|\, ||_{L^2} \leq C|h| \cdot ||f||_{L^2};\end{aligned}$$

vergleiche Korollar 4.2.1 der Vorlesung über Masstheorie. Nach Satz 6.3.2 ist der Operator T somit kompakt.

Bemerkung 6.3.1. Die eindeutig bestimmte Lösung u des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

hat eine Darstellung $u = Tf$ mit einem T wie in Beispiel 6.3.1.

6.4 Adjungierter Operator im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit kanonischem Isomorphismus $\mathcal{I}\colon H \to H^*$, wobei

$$\forall x \in H, y^* \in H^*\colon \langle y^*, x\rangle_{H^*\times H} = (\mathcal{I}^{-1}y^*, x)_H. \tag{6.4.1}$$

Sei weiter $A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert, $A^*\colon D_{A^*} \subset H^* \to H^*$ der zu A duale Operator.

Definition 6.4.1. *Der zu A* **adjungierte Operator** $A^T\colon D_{A^T} \subset H \to H$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^T} = \{y \in H;\ l_y\colon D_A \ni x \mapsto (y, Ax)_H \ \textit{ist stetig}\ \}$$

und $A^T y = \mathcal{I}^{-1} l_y$ für alle $y \in D_{A^T}$; das heisst,

$$\forall x \in D_A,\ y \in D_{A^T}\colon (A^T y, x)_H = l_y(x) = (y, Ax)_H. \tag{6.4.2}$$

Bemerkung 6.4.1. Offenbar hängen A^T und A^* wie folgt zusammen:

i) $y^* \in D_{A^*} \Leftrightarrow y = \mathcal{I}^{-1}y^* \in D_{A^T}$, und weiter

ii) $\forall y^* \in D_{A^*}\colon A^T\mathcal{I}^{-1}y^* = \mathcal{I}^{-1}(A^*y^*)$; das heisst,

$$A^T = \mathcal{I}^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{I}. \tag{6.4.3}$$

Beispiel 6.4.1. Sei $H = \mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)\colon (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

und sei $A \in L(H)$ gegeben mit

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ 1 \leq i \leq n;$$

das heisst, A hat die Matrixdarstellung

$$a = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n\colon (y, Ax) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j = (A^T y, x),$$

mit

$$(A^T y)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i,\ 1 \leq j \leq n,$$

und A^T hat die Matrixdarstellung

$$a^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notation: Im weiteren schreiben wir – im Einklang mit der Lehrbuchliteratur – anstelle von A^T wieder A^*, wobei wir H und H^* implizit mittels $\mathcal{I}$ identifizieren. Die Gleichung, welche A^* auf einem Hilbert-Raum charakterisiert, ist also stets (6.4.2) – mit A^* anstelle von A^T.

Definition 6.4.2. *i) Ein Operator $A\colon D_A \subset H \to H$ heisst* **symmetrisch**, *falls $A \subset A^*$, das heisst, falls $D_A \subset D_{A^*}$ und falls gilt*

$$(Ay, x)_H = (y, Ax)_H,\ \forall x, y \in D_A.$$

ii) Ein Operator $A\colon D_A \subset H \to H$ heisst **selbstadjungiert**, *falls $A = A^*$, das heisst, falls A symmetrisch ist mit $D_A = D_{A^*}$.*

Bemerkung 6.4.2. Ein symmetrischer Operator wird auch als **formal selbstadjungiert** bezeichnet.

Beispiel 6.4.2. i) Sei $A \in L(H)$ symmetrisch. Dann ist A selbstadjungiert, da mit $H = D_A \subset D_{A^*} \subset H$ folgt, dass $D_A = D_{A^*} = H$.

ii) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann ist $id - T \in L(H)$ symmetrisch und nach i) selbstadjungiert,

Beispiel 6.4.3. Wir betrachten die Erweiterungen A_1, A_2, A_3 des Laplace-Operators $A_\infty \colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $A_\infty u = \Delta u$ für $u \in C_c^\infty(\Omega)$, auf einem glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$\begin{aligned} D_{A_1} &= C^2(\overline{\Omega}), \\ D_{A_2} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ D_{A_3} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ auf } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $A_\infty \subsetneqq A_3 \subsetneqq A_2 \subsetneqq A_1$, nach Satz 6.1.2 also

$$A_1^* \subset A_2^* \subset A_3^* \subset A_\infty^*.$$

Weiter gilt nach partieller Integration

$$(v, A_i u)_{L^2} = \int_\Omega v \Delta u \, d\mu = \int_\Omega \Delta v \cdot u \, d\mu = (A_i v, u)_{L^2} \tag{6.4.4}$$

für alle $u, v \in D_{A_i}$, falls $i = 2, 3$ oder $i = \infty$; das heisst, A_2, A_3 und A_∞ sind symmetrisch.

Zudem gilt (6.4.4) auch für $u \in D_{A_3}$, $v \in D_{A_1}$; das heisst,

$$D_{A_1} \subset D_{A_3^*},\ A_1 \subset A_3^*.$$

Somit ist $A_3^* \supset A_1 \supsetneqq A_3$ eine echte Erweiterung von A_3.

Bemerkung 6.4.3. Eine selbstadjungierte Erweiterung des Laplace-Operators erhalten wir im Sobolev-Raum $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$; vgl. Funktionalanalysis II.

6.5 Spektrum und Resolvente

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$, $A \colon D_A \subset X \to X$ linear.

Definition 6.5.1. *Die* **Resolventenmenge** *von A ist*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda \cdot id - A) \colon D_A \to X \text{ ist bijektiv mit } (\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)\}.$$

Die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heisst das **Spektrum** *von A.*

Bemerkung 6.5.1. i) Falls $\rho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen.

ii) Ist A abgeschlossen, $\lambda \cdot id - A$ bijektiv, so folgt $\lambda \in \rho(A)$, da $(\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)$ gemäss Satz 3.3.2.

iii) Statt $\lambda \cdot id - A$ schreiben wir der Einfachheit halber im folgenden auch $\lambda - A$, sowie $1 = id$.

Beweis. i) Sei $\lambda \in \rho(A)$, also $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$. Dann ist $(\lambda - A)^{-1}$ abgeschlossen; das heisst, die Menge

$$M = \{(x, y) \in X \times X;\ x = (\lambda - A)^{-1} y,\ y \in X\}$$

ist abgeschlossen. Jedoch gilt offenbar

$$M = \Gamma_{(\lambda - A)} = \{(x, \lambda x - Ax);\ x \in D_A\},$$

und die Abgeschlossenheit von M impliziert diejenige von A. □

Definition 6.5.2. *Die* **Resolvente** *von A ist die Abbildung $R\colon \rho(A) \to L(X)$ mit*

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R_\lambda = (\lambda - A)^{-1} \in L(X).$$

Satz 6.5.1. *Sei $A\colon D_A \subset X \to X$, $z_0 \in \rho(A)$. Dann enthält $\rho(A)$ die offene Kreisscheibe*

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < 1/||R_{z_0}||_{L(X)}\}.$$

Insbesondere ist $\rho(A)$ offen, $\sigma(A)$ abgeschlossen und

$$\forall z \in \rho(A)\colon ||R_z||_{L(X)} \geq \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \sigma(A))}.$$

Weiter ist die Abbildung $z \mapsto R_z \in L(X)$ stetig in $\rho(A)$.

Beweis. Schreibe

$$(z - A) = (z - z_0) + (z_0 - A) = (1 + (z - z_0) R_{z_0})(z_0 - A).$$

Falls $z \in D$, so ist $1 + (z - z_0) R_{z_0}$ gemäss Satz 2.2.7 invertierbar mit

$$(1 + (z - z_0) R_{z_0})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (z_0 - z)^n R_{z_0}^n,$$

also auch

$$R_z = (z - A)^{-1} = R_{z_0} (1 + (z - z_0) R_{z_0})^{-1} \in L(X);$$

vergleiche Satz 2.2.8.

Weiter folgt mit $1 + (z - z_0) R_{z_0} \to 1$ in $L(X)$ $(z \to z_0)$ offenbar auch

$$||R_z - R_{z_0}||_{L(X)} = ||R_{z_0}((1 + (z - z_0) R_{z_0})^{-1} - 1)||_{L(X)} \to 0 \quad (z \to z_0).$$

□

Satz 6.5.2. *Falls $\lambda, \mu \in \rho(A)$, so gilt:*

i) $R_\lambda A \subset A R_\lambda = \lambda R_\lambda - id \in L(X)$;

ii) $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$;

iii) $R_\lambda \cdot R_\mu = R_\mu \cdot R_\lambda$.

Beweis. Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$\lambda R_\lambda - R_\lambda A = R_\lambda(\lambda - A) = id_{D_A} \subset id_X = (\lambda - A)R_\lambda = \lambda R_\lambda - AR_\lambda.$$

Insbesondere erhalten wir i) aus der Darstellung

$$R_\lambda A = \lambda R_\lambda - id_{D_A} \subset \lambda R_\lambda - id_X = AR_\lambda.$$

Weiter lesen wir ab

$$A(R_\mu - R_\lambda) = \mu R_\mu - \lambda R_\lambda,$$

also

$$(A - \mu)(R_\mu - R_\lambda) = (\mu - \lambda)R_\lambda,$$

und ii) folgt nach Komposition mit R_μ. Schliesslich erhalten wir iii) aus ii) durch Vertauschen von μ und λ. □

Bemerkung 6.5.2. Mit Satz 6.5.1 und Satz 6.5.2 ii) folgt, dass R auf $\rho(A)$ komplex differenzierbar ist mit $dR_\lambda/d\lambda = -R_\lambda^2$.

Definition 6.5.3. *Sei A abgeschlossen mit Spektrum $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Insbesondere enthält $\sigma(A)$ die Menge*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda - A \text{ ist nicht injektiv }\}$$

der **Eigenwerte** *von A mit* **Eigenraum**

$$\ker(\lambda - A) = \{x \in D_A;\ Ax = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

$\sigma_p(A)$ heisst das **Punktspektrum** *von A. Die Menge*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A);\ \lambda - A \text{ ist injektiv, } im(\lambda - A) \text{ ist dicht }\}$$

heisst **kontinuierliches Spektrum** *von A. Schliesslich bezeichnen wir mit*

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$$

das **Restspektrum** *von A.*

Beispiel 6.5.1. Sei $X = \mathbb{C}^n$, $A \in L(X)$, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen der Rangformel sind äquivalent:

i) $\lambda - A$ ist injektiv,

ii) $\lambda - A$ ist surjektiv;

das heisst, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Nach Darstellung von A durch eine quadratische Matrix gilt überdies die Äquivalenz von i), ii) zu

iii) $\det(\lambda - A) \neq 0$.

Somit enthält $\sigma_p(A)$ höchstens n Punkte, und $\rho(A)$ ist nicht leer und liegt sogar dicht in $\mathbb{C}$.

Ein analoges Resultat gilt in einem beliebigen Hilbertraum H für einen kompakten, selbstadjungierten Operator $T \in L(H)$.

Beispiel 6.5.2. Sei H Hilbertraum, und sei $T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

(Vergleiche hierzu auch den Satz von Riesz-Schauder, Satz 6.7.2.)

Beweis. Nach Satz 6.2.3 hat der Operator $id - T$ abgeschlossenes Bild und gemäss Beispiel 6.4.2.ii) ist $id - T$ selbstadjungiert. Mit Satz 6.2.1 folgt

$$im(id - T) = ker(id - T)^{\perp}.$$

In Satz 6.6.2 zeigen wir, dass $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Ersetzen wir T durch $\lambda^{-1}T$, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so folgt nach Multiplikation mit λ die Darstellung

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon im(\lambda - T) = ker(\lambda - T)^{\perp},$$

und die Behauptung folgt. □

Beispiel 6.5.3. Für den Shift-Operator $S \colon l^2 \to l^2$ mit

$$S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

gilt $0 \in \sigma(S)$, $0 \notin \sigma_p(S)$.

Beweis. S ist nicht surjektiv, offenbar aber injektiv. □

Satz 6.5.3. *Sei $A \in L(X)$. Dann ist $\rho(A) \neq \emptyset \neq \sigma(A)$, und es gilt:*

i) $|z| > r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow z \in \rho(A)$;

ii) $r_A = \sup_{z\in\sigma(A)} |z|$.

Beweis. i) Sei $|z| > r_A$. Setze $\tilde{A} = z^{-1}A \in L(X)$ mit $r_{\tilde{A}} < 1$. Aus Satz 2.2.7 folgt Invertierbarkeit von $1 - \tilde{A}$ und

$$\begin{aligned} R_z = (z - A)^{-1} = z^{-1}(1 - \tilde{A})^{-1} = z^{-1} \sum_{n\geq 0} \tilde{A}^n \\ = z^{-1} + z^{-2}A + z^{-3}A^2 + \ldots \in L(X). \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

ii) Mit i) folgt zunächst $r_A \geq \sup_{z\in\sigma(A)\cup\{0\}} |z| =: \sigma_0$.

Behauptung 1. $r_A \leq \sigma_0$.

Beweis. Für $|z| > r_A$ entwickle R_z gemäss (6.5.1). Gliedweise Integration über $\partial B_r(0) \subset \mathbb{C}$, $r > r_A$, liefert

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n (z - A)^{-1}\, dz. \tag{6.5.2}$$

Offenbar ist (6.5.2) äquivalent zu

$$\forall n \in \mathbb{N},\, x \in X,\, l \in X^* \colon l(A^n x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n\, l(R_z x)\, dz. \tag{6.5.3}$$

Mit Bemerkung 6.5.2 folgt, dass die Abbildung

$$\rho(A) \ni z \mapsto l(R_z x) \in \mathbb{C} \tag{6.5.4}$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ holomorph ist; somit gilt (6.5.3), also auch (6.5.2), für jedes $r > \sigma_0$.

Für $r > \sigma_0$ setze

$$M(r) = \max\{||R_z||_{L(X)};\ |z| = r\}.$$

Aus (6.5.2) folgt mit der Minkowski Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon ||A^n||_{L(X)} \le r^{n+1} M(r),$$

also

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le r.$$

Da $r > \sigma_0$ beliebig war, folgt $r_A \le \sigma_0$. □

Mit einem ähnlichen Argument folgt nun auch, dass $\sigma(A) \neq \emptyset$. Nehmen wir widerspruchsweise an, $\sigma(A) = \emptyset$, $\rho(A) = \mathbb{C}$, so ist die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion

$$z \mapsto f(z) = l(R_z x)$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ analytisch, und (6.5.1) ergibt

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \le C \cdot \lim_{|z|\to\infty} |z|^{-1}\, ||(1 - z^{-1}A)^{-1}||_{L(X)} = 0.$$

Mit dem Satz von Liouville folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da l und x beliebig gewählt waren, erhalten wir $R_z = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$; jedoch gilt andererseits

$$\forall z \in \rho(A),\ x \in X\colon (z - A)R_z x = x.$$

□

Sei $A \in L(X)$. Weiter sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen mit $\sigma(A) \subset \Omega$.

Definition 6.5.4. *Eine Schar $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_L$ von Kurven $\gamma_l\colon S^1 \to \Omega$ der Klasse C^1, $1 \le l \le L$,* **umrundet** *$\sigma(A)$ in Ω, falls für eine Familie disjunkter offener Mengen $\Omega_l \subset \Omega$, $1 \le l \le L$, mit Rand von der Klasse C^1 gilt*

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{1\le l\le L} \Omega_l, \quad \gamma_l = \partial\Omega_l,\ 1 \le l \le L.$$

Für eine Schar $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_L$ in Ω wie in Definition 6.5.4 und $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ setze

$$\int_\gamma f\, dz = \sum_{1\le l\le L} \int_{\gamma_l} f\, dz$$

Lemma 6.5.1. *Falls die Schar γ die Menge $\sigma(A)$ in Ω umrundet, so gilt*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon A^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^n R_z\, dz. \tag{6.5.5}$$

Beweis. Gemäss (6.5.2) gilt die Behauptung für die Kurve $\gamma_0 = \partial B_r(0)$ in $\Omega_0 = B_{r_0}(0)$, wobei $r_A < r < r_0$ so gewählt sind, dass $Q := \cup_{1\le l\le L}\Omega_l \subset B_r(0)$. Da $D := \Omega_0 \setminus Q \subset \rho(A)$ und daher $D \ni z \mapsto z^n R_z$ holomorph, liefert der Cauchysche Integralsatz die Identität

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon 0 = \int_{\partial D} z^n R_z\, dz = \int_{\gamma_0} z^n R_z\, dz - \int_\gamma z^n R_z\, dz,$$

und die Behauptung folgt. □

Lemma 6.5.2. *Falls die Schar γ die Menge $\sigma(A)$ in Ω umrundet, und falls $\alpha \in \rho(A)$, $\alpha \notin \Omega$, so gilt*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \colon (\alpha - A)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\alpha - z)^n R_z\, dz =: y_n. \tag{6.5.6}$$

Für $n \ge 0$ gilt (6.5.6) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweis. Gemäss Lemma 6.5.1 gilt die Behauptung für $n = 0$.

Für $z \in \rho(A)$ schreibe

$$(\alpha - A)R_z = \big((z - A) + (\alpha - z)\big)(z - A)^{-1} = 1 + (\alpha - z)R_z.$$

Damit erhalten wir die Rekursionsformel

$$(\alpha - A)y_n = y_{n+1} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\alpha - z)^n\, dz = y_{n+1},$$

falls $n \ge 0$ oder falls $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \notin \Omega$, und die Behauptung folgt. □

Folgerung 6.5.1. Falls die Schar γ die Menge $\sigma(A)$ in Ω umrundet, und falls $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, $\alpha_m \in \rho(A)$, $\alpha_m \notin \Omega$, $c_m \in \mathbb{C}$, $k_m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le M$, so gilt für die (in Ω holomorphe) rationale Funktion

$$f(z) = p(z) + \sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m - z)^{-k_m}$$

die Identität

$$f(A) := p(A) + \sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m - A)^{-k_m} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)R_z\, dz. \tag{6.5.7}$$

Wie oben bezeichne

$$Gl(X) = \{T \in L(X);\ T \text{ ist bijektiv, } T^{-1} \in L(X)\}.$$

Satz 6.5.4. *(Spektralabbildungssatz) Sei $f(z) = p(z) + \sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m - z)^{-k_m}$ eine rationale Funktion wie in Folgerung 6.5.1. Dann gilt*

i) $f(A) \in Gl(X) \Leftrightarrow \forall z \in \sigma(A) \colon f(z) \ne 0$;

ii) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Beweis. i) "$\Leftarrow$": Sei $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(A)$. Dann gibt es eine offene Menge $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\sigma(A) \subset \Omega_1$, so dass die rationale Funktion $g = 1/f$ holomorph ist in Ω_1. Für eine Kurve γ_1, welche $\sigma(A)$ in Ω_1 umrundet, folgt mit $r(z) = f(z)g(z) = g(z)f(z) \equiv 1$ aus (6.5.7) mit Lemma 6.5.2 die Gleichung

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) = r(A) = 1 \in L(X).$$

Das heisst, $g(A) = f(A)^{-1} \in L(X)$.

"$\Rightarrow$": Falls $f(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \sigma(A)$, so gibt es eine rationale und in Ω holomorphe Funktion g mit $f(z) = g(z)(z - \lambda)$, $z \in \Omega$, und

$$f(A) = g(A)(A - \lambda) = (A - \lambda)g(A)$$

ist entweder nicht injektiv oder nicht surjektiv; also $f(A) \notin Gl(X)$.

ii) Für $\beta \in \mathbb{C}$ gilt wegen i) mit $g(z) := f(z) - \beta$ die Äquivalenz

$$g(A) = f(A) - \beta \notin Gl(X) \Leftrightarrow \exists z \in \sigma(A) \colon g(z) = f(z) - \beta = 0;$$

also

$$\beta \in \sigma(f(A)) \Leftrightarrow \beta \in f(\sigma(A)).$$

□

6.6 Spektraltheorie im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ mit hermiteschem Skalarprodukt

$$\forall x, y \in H \colon (x, y)_H = \overline{(y, x)_H},$$

und sei $A \colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert mit adjungiertem Operator A^*.

Welche Aussagen über das Spektrum von A kann man machen, falls A symmetrisch ist oder selbstadjungiert?

Satz 6.6.1. *Sei A symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte reell, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_p(A)$ mit zugehörigem Eigenvektor $0 \neq x \in \ker(\lambda - A) \subset D_A$. Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda ||x||_H^2 &= (Ax, x)_H = (A^*x, x)_H \\ &= (x, Ax)_H = \overline{(Ax, x)_H} = \overline{\lambda} ||x||_H^2; \end{aligned}$$

also $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Gilt dieselbe Aussage für das gesamte Spektrum? – Betrachte dazu das folgende Beispiel. Zuvor benötigen wir noch eine Definition.

Definition 6.6.1. *Die Funktion $f \in L^2(]0,1[)$ besitzt eine* **schwache Ableitung** *$f' \in L^2(]0,1[)$, falls $v =: f' \in L^2(]0,1[)$ existiert mit*

$$\forall g \in C_c^\infty(]0,1[) \colon \int_0^1 f g' dx = -\int_0^1 v g \, dx.$$

Beispiel 6.6.1. Sei $H = L^2(]0,1[;\mathbb{C})$ mit Skalarprodukt

$$\forall f, g \in H \colon (f,g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\, dt,$$

und sei $A_\infty = i\frac{d}{dt} \colon C_c^\infty(]0,1[;\mathbb{C}) \subset H \to H$. Betrachte die folgenden Erweiterungen A_k von A_∞, $k = 1, \dots, 4$, wobei

$$\begin{aligned}
D_{A_1} &= H^1 = H^1(]0,1[;\mathbb{C}) := \{f \in L^2;\ f \text{ ist absolut stetig mit } f' \in L^2\},\\
D_{A_2} &= \{f \in H^1;\ f(0) = f(1)\} \quad \text{(periodische Randbedingung)},\\
D_{A_3} &= \{f \in H^1;\ f(0) = 0 = f(1)\} \quad \text{(Dirichlet Randbedingung)},\\
D_{A_4} &= \{f \in H^1;\ f(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

Natürlich setzen wir $A_k f = if'$ für $f \in D_{A_k}$. D_{A_1} ist dann offenbar der **maximale** Definitionsbereich, und es gilt $A_\infty \underset{\neq}{\subsetneq} A_3 \underset{\neq}{\subsetneq} A_2 \underset{\neq}{\subsetneq} A_1$, $A_\infty \underset{\neq}{\subsetneq} A_4$.

Behauptung 1. $A_3 \subset A_1^* \subset A_2^* = A_2 \subset A_3^*$; das heisst, A_3 ist symmetrisch, wegen $A_3 \underset{\neq}{\subsetneq} A_2 \subset A_3^*$ aber nicht selbstadjungiert, und A_2 ist selbstadjungiert.

Beweis. Die Aussagen $A_3 \subset A_1^*$, $A_2 \subset A_2^*$ folgen analog zu Beispiel 6.4.3. Es genügt daher, $A_2^* \subset A_2$ zu zeigen; alles weitere folgt aus Satz 6.1.2.

Sei $f \in D_{A_2^*}$. Für $g \in C_c^\infty(]0,1[) \subset D_{A_2}$ erhalten wir

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i\int_0^1 f\overline{g}'\, dt.$$

Da $f \in D_{A_2^*}$, können wir abschätzen

$$\sup\{\int_0^1 f\overline{g}'\, dt;\ g \in C_c^\infty,\ ||g||_{L^2} \le 1\} \le \sup_{||g||_{L^2} \le 1} (A_2^* f, g)_{L^2} = ||A_2^* f||_{L^2};$$

das heisst, $f \in H^1$ besitzt eine schwache Ableitung $f' \in L^2$, so dass

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = -i\int_0^1 f\overline{g}'\, dt = i\int_0^1 f'\overline{g}\, dt = (if', g)_{L^2}$$

für alle $g \in C_c^\infty(]0,1[)$, und $A_2^* f = if'$; vgl. Satz 7.3.2.

Für allgemeine $g \in D_{A_2}$ erhalten wir mit partieller Integration zusätzlich einen Randterm

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i\int_0^1 f\overline{g}'\, dt = i\int_0^1 f'\overline{g}\, dt - i(f\overline{g})|_{t=0}^1. \tag{6.6.1}$$

Da andererseits $A_2^* f = if'$, folgt jedoch auch in diesem Fall

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = i\int_0^1 f'\overline{g}\, dt;$$

mit (6.6.1) also

$$\forall g \in D_{A_2} \colon (f\overline{g})|_0^1 = (f(1) - f(0))\overline{g}(1) = 0.$$

Da $\overline{g}(1)$ beliebig ist, erhalten wir $f(0) = f(1)$, also $f \in D_{A_2}$. ☐

Behauptung 2. Es gilt

i) $\sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) = \mathbb{C}$, $\rho(A_1) = \emptyset$;

ii) $\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = 2\pi\mathbb{Z}$, $\overline{\rho(A_2)} = \mathbb{C}$;

iii) $\sigma(A_3) = \mathbb{C}$, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$, $\rho(A_3) = \emptyset$;

iv) $\sigma(A_4) = \emptyset$, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$.

Beweis. i) Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f = e^{-i\lambda t} \in \ker(\lambda - A_1) \subset D_{A_1}$.

ii) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt analog, dass $f = e^{-2\pi ikt} \in D_{A_2} \cap \ker(2\pi k - A_2)$; das heisst, $2\pi\mathbb{Z} \subset \sigma_p(A_2) \subset \sigma(A_2)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $g \in L^2$ erhält man mit der Variation-der-Konstanten-Formel die Darstellung aller Lösungen f der Gleichung

$$\left(\lambda - i\frac{d}{dt}\right) f = \lambda f - if' = g. \tag{6.6.2}$$

Die allgemeine Lösung von (6.6.2) hat die Form

$$f(t) = ae^{-i\lambda t} + i\int_0^t e^{i\lambda(s-t)} g(s)\, ds,\ a \in \mathbb{C}. \tag{6.6.3}$$

Falls $f \in D_{A_2}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, so ist $a \in \mathbb{C}$ eindeutig durch die Bedingung $f(0) = f(1)$ bestimmt. Aus der Gleichung

$$a = f(0) = f(1) = ae^{-i\lambda} + i\int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s)\, ds \tag{6.6.4}$$

folgt

$$a = (1 - e^{-i\lambda})^{-1} i\int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s)\, ds,$$

und wir erhalten $f \in L^2$ mit

$$||f||_{L^2} \leq |a| + ||g||_{L^2} \leq \left(\frac{1}{|1 - e^{-i\lambda}|} + 1\right) ||g||_{L^2}.$$

iii) Falls $A_3 f = if' = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so folgt $f(t) = ae^{-i\lambda t}$ und $a = 0$, falls $f \in D_{A_3}$; das heisst, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$.

Andererseits ist $\lambda - A_3$ für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ surjektiv. Für $g(s) = e^{-i\lambda s}$ folgt nämlich mit (6.6.3) und (6.6.4) für jede Lösung $f \in D_{A_3}$ von (6.6.2) zunächst $a = 0$ und

$$f(t) = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda s} g(s)\, ds = ite^{-i\lambda t},$$

also $f(1) = ie^{-i\lambda} \neq 0$.

iv) Wie im Falle von A_3 erhalten wir aus (6.6.3) für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in L^2(]0,1[;\mathbb{C})$ die Darstellung

$$f(t) = ie^{-i\lambda t}\int_0^t e^{i\lambda s} g(s)\, ds \in D_{A_4}$$

einer Lösung von (6.6.2); das heisst, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$. $\square$

Symmetrische Operatoren können demnach durchaus imaginäre Spektralanteile besitzen, jedoch gilt:

Lemma 6.6.1. *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die Abschätzung*

$$\forall u \in D_A\colon ||(z-A)u||_H \geq |Im(z)|\ ||u||_H;$$

das heisst, für $z \notin \mathbb{R}$ ist $(z-A)$ stets injektiv. Falls $(z-A)$ zusätzlich surjektiv ist, so folgt $z \in \rho(A)$ und

$$||(z-A)^{-1}||_{L(H)} \leq \frac{1}{|Im(z)|}.$$

Beweis. Für $u \in D_A$ gilt wegen $A \subset A^*$

$$(u, Au)_H = (Au, u)_H = \overline{(u, Au)_H} \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für alle $u \in D_A$ die Abschätzung

$$|Im(z)|\ ||u||_H^2 = |Im(u,(z-A)u)_H| \leq |(u,(z-A)u)_H| \leq ||u||_H||(z-A)u||_H,$$

wie gewünscht. □

Beispiel 6.6.1 illustriert sehr schön den folgenden Satz, welcher die selbstadjungierten Operatoren durch ihr Spektrum charakterisiert.

Satz 6.6.2. *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

i) $A = A^*$;

ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;

iii) Es gibt $z_1, z_2 \in \rho(A)$ mit $Im(z_1) < 0 < Im(z_2)$.

Beweis. Wir zeigen iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii).

iii) $\Rightarrow$ ii): Sei $z_0 - A$ surjektiv, $Im(z_0) > 0$. Mit Lemma 6.6.1 folgt $z_0 \in \rho(A)$, und Satz 6.5.1 liefert zusammen mit Lemma 6.6.1

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < Im(z_0)\} \subset \rho(A).$$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \ Im(z) > 0\}$ lässt sich iterativ durch derartige Kreisscheiben überdecken. Analog erhalten wir $\{z \in \mathbb{C};\ Im(z) < 0\} \subset \rho(A)$.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $u \in D_{A^*}$. Da $\pm i \in \rho(A)$ nach Annahme, existiert $v \in D_A$ mit

$$(A^* - i)u = (A - i)v = (A^* - i)v,$$

letzteres wegen $A \subset A^*$. Es folgt $(u - v) \in \ker(A^* - i)$. Wähle nun $w \in D_A$ mit $(A + i)w = u - v$. Es folgt

$$||u - v||_H^2 = (u - v, (A + i)w)_H = ((A^* - i)(u - v), w)_H = 0\,;$$

das heisst, $u = v \in D_A$.

i) $\Rightarrow$ iii): Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Behauptung 1. $im(z - A)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $v_k = (z - A)u_k \to v$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ insbesondere symmetrisch ist, folgt mit Lemma 6.6.1 die Abschätzung

$$||u_k - u_l||_H \leq \frac{1}{|Im(z)|}||v_k - v_l|| \to 0 \quad (k, l \to \infty);$$

das heisst, $u_k \to u$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ abgeschlossen ist, folgt $u \in D_A$, und $v = (z - A)u \in im(z - A)$. Der Raum $im(z - A)$ ist somit abgeschlossen. □

Behauptung 2. $z - A$ ist surjektiv.

Beweis. Nach Behauptung 1 ist der Raum $M := im(z - A)$ abgeschlossen. Nimm an, $M \neq H$. Wähle $v \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$\forall u \in D_A \colon (v, (z - A)u)_H = 0;$$

das heisst,

$$\forall u \in D_A \colon (v, Au)_H = \overline{z}(v, u)_H.$$

Die Abbildung $D_A \ni u \mapsto (v, Au)_H$ ist somit stetig, und $v \in D_{A^*} = D_A$ mit

$$Av = A^*v = \overline{z}v.$$

Mit Lemma 6.6.1 folgt jedoch

$$|Im(z)|\,||v||_H \leq ||(\overline{z} - A)v||_H = 0,$$

und wir erhalten $v = 0$ im Widerspruch zur Wahl von v. □

Damit ist der Satz nun vollständig bewiesen. □

6.7 Das Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbertraum uber $\mathbb{C}$, $T \in L(H)$.

Definition 6.7.1. *Der Operator T heisst* **normal***, falls gilt $TT^* = T^*T$; T heisst* **unitär***, falls $T \in Gl(H)$ mit $T^* = T^{-1}$.*

Bemerkung 6.7.1. T ist normal $\Leftrightarrow \forall x \in H \colon ||Tx||_H = ||T^*x||_H$.

Beweis. Mit den Identitäten

$$\forall x \in H \colon (Tx, Tx)_H = (T^*Tx, x)_H$$

sowie

$$\forall x \in H \colon (T^*x, T^*x)_H = (x, TT^*x)_H = \overline{(x, TT^*x)_H} = (TT^*x, x)_H$$

folgt "⇒" unmittelbar. Die umgekehrte Richtung erhält man durch "Polarisieren", das heisst, durch Anwendung der obigen Gleichungen auf $x \pm y$. □

Beispiel 6.7.1. i) Falls T selbstadjungiert ist, so ist T normal.

ii) Falls T unitär ist, so ist T normal.

iii) Sei $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $|\lambda_k| \le r < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, und sei $T\colon l^2 \to l^2$ definiert durch

$$T(a_1, a_2, \dots) = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots),\ a = (a_1, a_2, \dots) \in l^2.$$

Dann gilt

$$T^*(a_1, a_2, \dots) = (\overline{\lambda_1} a_1, (\overline{\lambda_2} a_2, \dots),$$

also

$$TT^*(a_1, a_2, \dots) = (|\lambda_1|^2 a_1, (|\lambda_2|^2 a_2, \dots) = T^*T(a_1, a_2, \dots),$$

und T ist normal. Weiter gilt $T \in L(l^2)$ mit $||T||_{L(l^2)} \le r$, und

$$T \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\colon \lambda_k \in \mathbb{R};$$
$$T \text{ unitär} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\colon |\lambda_k| = 1;$$
$$T \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lambda_k \to 0\ (k \to \infty).$$

Beweis. Wir zeigen nur die letzte Aussage. Nimm an, $r_0 = \inf_{k\in\Lambda} |\lambda_k| > 0$ für eine Folge $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar

$$B_{r_0}(0; Y) \subset T(B_1(0; X)),$$

wobei $Y = span\{e_k;\ k \in \Lambda\}$ unendlich-dimensional ist. Also ist T nicht kompakt.

Falls hingegen $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$, so gilt auch $\varepsilon_l := \sup_{k\ge l} |\lambda_k| \to 0$ $(l \to \infty)$. Sei $y_k = Tx_k$ mit $\|x_k\|_{l^2} \le 1$, also auch $\|y_k\|_{l^2} \le r$, $k \in \mathbb{N}$. OBdA dürfen wir annehmen, dass $x_k \overset{w}{\to} x$, $y_k \overset{w}{\to} y = Tx \in l^2$ $(k \to \infty)$. Es folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \|y_k - y\|_{l^2} \le \varepsilon_l \|x_k - x\|_{l^2},\ l \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $l \to \infty$ liefert $y_k \to y$ $(k \to \infty)$, und T ist kompakt. □

Schliesslich gilt

Behauptung. $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_k;\ k \in \mathbb{N}\}}$.

Beweis. Offenbar gilt $\lambda_k \in \sigma(T)$, $k \in \mathbb{N}$. Für $\lambda \notin \{\lambda_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ ist $\lambda - T$ injektiv, und für $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ mit

$$b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\lambda - T)a = ((\lambda - \lambda_k)a_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

gilt

$$a_k = b_k/(\lambda - \lambda_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Falls $\lambda = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} \lambda_k$ für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$, so folgt

$$||(\lambda - T)^{-1} e_k||_{l^2} = |\lambda - \lambda_k|^{-1} \to \infty \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda);$$

also $\lambda \notin \rho(T)$.

Falls andererseits $\lambda \notin \overline{\{\lambda_k;\ k \in \mathbb{N}\}}$, so existiert $\delta > 0$ mit $|\lambda - \lambda_k| > \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $(\lambda - T)^{-1} \in L(H)$. □

Satz 6.7.1. *$T \in L(H)$ normal $\Rightarrow ||T||_{L(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = r_T$.*

Beweis. Wir zeigen induktiv, dass gilt

Behauptung. $\forall n \in \mathbb{N}$: $||T^n||_{L(H)} = ||T||^n_{L(H)}$.

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich.

"$n \to n+1$": Für $x \in H$ mit $||x||_H = 1$ folgt mit Bemerkung 6.7.1

$$\begin{aligned} ||T^n x||_H^2 &= (T^n x, T^n x)_H = (T^* T^n x, T^{n-1} x)_H \le ||T^*(T^n x)||_H ||T^{n-1} x||_H \\ &= ||T^{n+1} x||_H ||T^{n-1} x||_H \le ||T^{n+1}||_{L(H)} ||T^{n-1}||_{L(H)}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme erhalten wir

$$\begin{aligned} ||T||^{2n}_{L(H)} = ||T^n||^2_{L(H)} &= \sup_{x \in H,\, ||x||_H = 1} ||T^n x||_H^2 \\ &\le ||T^{n+1}||_{L(H)} ||T^{n-1}||_{L(H)} = ||T^{n+1}||_{L(H)} ||T||^{n-1}_{L(H)} \end{aligned}$$

also mit Satz 2.2.3

$$||T||^{n+1}_{L(H)} \le ||T^{n+1}||_{L(H)} \le ||T||^{n+1}_{L(H)},$$

und die Behauptung folgt. □

Mit Satz 6.5.3 erhalten wir nun

$$||T||_{L(H)} = \lim_{n \to \infty} ||T^n||^{1/n}_{L(H)} = r_T = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|,$$

wie gewünscht. □

Satz 6.7.2. *Sei $T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert, $T \neq 0$. Dann gilt*

i) es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, welche sich höchstens bei $\lambda = 0$ häufen, und zugehörige orthonormale Eigenvektoren e_k, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall x \in H : Tx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k e_k (x, e_k)_H;$$

ii) wir erhalten die orthogonale Zerlegung

$$H = ker(T) \oplus \overline{span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Bemerkung 6.7.2. $ker(T)$ muss nicht separabel sein.

Beweis von Satz 6.7.2. i) Nach Beispiel 6.5.2 und Satz 6.7.1 gilt

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} \subset \overline{B_{r_0}(0)},$$

wobei $r_0 = ||T||_{L(H)} < \infty$. Für $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ setze

$$X_\lambda = ker(\lambda - T).$$

Behauptung 1. $\forall \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\colon dim(X_\lambda) < \infty$.

Beweis. Für jedes $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ ist $\lambda\overline{B_1(0; X_\lambda)} = \overline{T(B_1(0; X_\lambda)}$ kompakt; nach Satz 2.1.4 also $dim(X_\lambda) < \infty$. □

Behauptung 2. $\forall r > 0\colon \sigma_p(T) \setminus B_r(0)$ ist endlich.

Beweis. Andernfalls existiert eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \sigma_p(T)$ mit $\lambda_k \to \lambda \neq 0$ $(k \to \infty)$. Gemäss Behauptung 1 dürfen wir oBdA annehmen, dass $\lambda_k \neq \lambda_l$ $(k \neq l)$. Seien e_k zugehörige Eigenvektoren mit $Te_k = \lambda_k e_k$, $||e_k||_H = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Aus

$$\lambda_k(e_k, e_l)_H = (Te_k, e_l)_H = (T^*e_k, e_l)_H = (e_k, Te_l)_H = \lambda_l(e_k, e_l)_H$$

folgt dann

$$(e_k, e_l)_H = 0 \quad (k \neq l). \tag{6.7.1}$$

Da T kompakt, enthält die Folge $(Te_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. OBdA dürfen wir annehmen, dass

$$y_k := Te_k \to y \quad (k \to \infty).$$

Mit $\lambda_k \to \lambda \neq 0$ $(k \to \infty)$ erhalten wir dann jedoch auch Konvergenz

$$e_k = \lambda_k^{-1} Te_k \to \lambda^{-1} y \quad (k \to \infty)$$

im Widerspruch zu (6.7.1). □

Da $\sigma_p(T)\setminus B_{1/k}(0)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach Behauptung 2 endlich ist, ist $\sigma_p(T)\setminus\{0\}$ abzählbar. Mit (6.7.1) erhalten wir die Beziehung

$$\forall \lambda, \mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\colon \lambda \neq \mu \Rightarrow X_\lambda \perp X_\mu.$$

Durch geeignete Normierung können wir erreichen, dass auch die Eigenvektoren e_k, e_l zu einem mehrfachen Eigenwert $\lambda = \lambda_k = \lambda_l$ orthonormal sind, und wir erhalten eine höchstens abzählbare Schar orthonormaler Eigenvektoren e_k, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$X := \overline{\oplus_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} X_\lambda} = \overline{span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Behauptung 3. Jedes $x \in X$ hat die Darstellung $x = \sum_{k\in\mathbb{N}}(x, e_k)_H e_k$.

Beweis. Beachte, dass für die Partialsummen $x_K = \sum_{k\leq K}(x, e_k)_H e_k$ der Reihe wegen Orthonormalität der $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$||x_K||_H^2 = \sum_{k\leq K} |(x, e_k)_H|^2 = (x_K, x)_H \leq ||x_K||_H ||x||_H;$$

also

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (x, e_k)_H^2 = \lim_{K\to\infty} ||x_K||_H \leq ||x||_H^2 < \infty,$$

und

$$||x_K - x_L||_H^2 = \sum_{K<k\leq L} |(x, e_k)_H|^2 \to 0 \quad (K \leq L \to \infty).$$

Somit existiert $y := \lim_{K\to\infty} x_K$. Da weiter gilt $(x - y, e_k)_H = 0$ für jedes k und da $x, y \in X = \overline{span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}}$, folgt $x = y = \sum_{k\in\mathbb{N}}(x, e_k)_H e_k$. □

Mit Behauptung 3 und Stetigkeit von T erhalten wir nun auch die gewünschte Identität

$$Tx = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x, e_k)_H Te_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k (x, e_k)_H e_k.$$

ii) Sei $Y = X^\perp \subset H$. Nimm an, $Y \neq \{0\}$.

Behauptung 4. $T(Y) \subset Y$.

Beweis. Für $y \in Y$ gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon (e_k, Ty)_H = (T^* e_k, y)_H = (Te_k, y)_H = \lambda_k (e_k, y)_H = 0;$$

also $Ty \in span\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = X^\perp = Y$. □

Setze $T_0 = T_{|_Y} \in L(Y)$. Dann ist T_0 kompakt und selbstadjungiert; also

$$\sigma(T_0) \subset \sigma_p(T_0) \cup \{0\}.$$

Sei $\lambda_0 \in \sigma_p(T_0)$ mit zugehörigem Eigenvektor $0 \neq e_0 \in Y \subset H$ mit

$$T_0 e_0 = Te_0 = \lambda_0 e_0.$$

Dann ist $\lambda_0 = 0$, oder $e_0 \in X_{\lambda_0} \subset X$, und $e_0 \in X \cap Y = \{0\}$. Also $\lambda_0 = 0$, und Satz 6.7.1 ergibt

$$||T_0||_{L(H)} = \sup_{\lambda\in\sigma(T_0)} |\lambda| = 0;$$

das heisst, $Y = ker(T)$. □

Bemerkung 6.7.3. Falls T **positiv definit** ist im Sinne, dass gilt

$$\forall x \in H \setminus \{0\}\colon (x, Tx)_H > 0,$$

so ist $ker(T) = \{0\}$, und es gilt $\lambda > 0$ für jedes $\lambda \in \sigma(T)$. Die in absteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte $\lambda_1 \geq \dots \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \dots$ erhält man dann mit dem **Courant-Fischerschen Minimax-Prinzip**:

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \lambda_k = \sup_{M\subset H\ linear,\ dim M\geq k}\ \inf_{x\in M,\ ||x||_H=1} (x, Tx)_H =: \mu_k.$$

Beweis. "$\lambda_k \leq \mu_k$": Wähle $M = M_k := span\{e_j;\ 1 \leq j \leq k\}$ mit

$$\begin{aligned}(x, Tx)_H = (Tx, x)_H = (\sum_{1\leq j\leq k} \lambda_j (x, e_j)_H e_j, x)_H &= \sum_{1\leq j\leq k} \lambda_j |(x, e_j)_H|^2 \\ \geq \lambda_k \sum_{1\leq j\leq k} |(x, e_j)_H|^2 = \lambda_k ||x||_H = \lambda_k.\end{aligned}$$

für alle $x \in M$ mit $||x||_H = 1$.

"$\lambda_k \geq \mu_k$": Sei $M \subset H$ linear mit $dim M \geq k$. Nimm zunächst an, es gibt $x_0 \in M$ mit $||x_0||_H = 1$ und $x_0 \perp M_k$. Dann können wir abschätzen

$$\begin{aligned}\inf_{x\in M,\ ||x||_H=1} (x, Tx)_H \leq (x_0, Tx_0)_H = (Tx_0, x_0)_H &= (\sum_{l>k} \lambda_l (x_0, e_l)_H e_l, x_0)_H \\ = \sum_{l>k} \lambda_l |(x_0, e_l)_H|^2 \leq \lambda_k \sum_{l>k} |(x_0, e_l)_H|^2 &= \lambda_k ||x_0||_H^2 = \lambda_k,\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt in diesem Fall.

Andernfalls ist $\pi_k\colon M \to M_k$ bijektiv, wobei wir mit π_k die Einschränkung der orthogonalen Projektion $H \to M_k$ auf M bezeichnen. Betrachte den Vektor $x = \pi_k^{-1} e_k = e_k + y_k \in M$, wobei $y_k \perp M_k$. Es gilt

$$\begin{aligned}(x, Tx)_H &= (e_k + y_k, Te_k + Ty_k)_H \\ &= (e_k, Te_k)_H + (y_k, Te_k)_H + (e_k, Ty_k)_H + (y_k, Ty_k)_H,\end{aligned}$$

wobei

$$(y_k, Te_k)_H = \lambda_k (y_k, e_k)_H = 0, \ (e_k, Ty_k)_H = (Te_k, y_k)_H = 0,$$

und – wie eben gezeigt – mit

$$(y_k, Ty_k)_H \leq \lambda_k ||y_k||_H^2;$$

das heisst,

$$(x, Tx)_H = (e_k, Te_k)_H + (y_k, Ty_k)_H \leq \lambda_k (1 + ||y_k||_H^2) = \lambda_k ||x||_H^2.$$

Es folgt

$$\inf_{x \in M,\ ||x||_H = 1} (x, Tx)_H = \inf_{x \in M,\ x \neq 0} \frac{(x, Tx)_H}{||x||_H^2} \leq \lambda_k.$$

$\square$

Teil II

Funktionalanalysis II

Kapitel 7

Sobolev-Räume

7.1 Funktionalanalytische Zugänge zum Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, glatt berandet, und seien $f, u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Wir suchen eine Lösung u des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{7.1.1}$$
$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{7.1.2}$$

Bemerkung 7.1.1. Ersetze u durch $v = u - u_0$. Dann geht (7.1.1) über in die Gleichung

$$-\Delta v = -\Delta u + \Delta u_0 = f + \Delta u_0 =: g \quad \text{in } \Omega$$

mit der homogenen Dirichlet-Randbedingung

$$v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

anstelle von (7.1.2). Im Folgenden nehmen wir daher stets an $u_0 \equiv 0$.

Zur Lösung von (7.1.1), (7.1.2) bieten die zuvor behandelten Methoden zwei mögliche Ansätze, zum einen via Banach's "Closed range theorem", Satz 6.2.1, zum anderen mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2.

7.1.1 Lösung mittels Banach's closed range theorem

Deute (7.1.1),(7.1.2) als Gleichung $Au = f$ für eine geeignete Erweiterung $A\colon D_A \subset X \to X$ des Laplace-Operators mit einem geeigneten Funktionenraum $C_c^\infty(\Omega) \subset D_A \subset X$, wobei $Au = -\Delta u$ für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $u \in D_A$. Idealerweise wählen wir für X einen Hilbertraum $X = H$ und D_A so, dass A selbstadjungiert ist. Dies ist in der Tat möglich.

Wähle $X = L^2(\Omega)$, $D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ und setze $Au = -\Delta u$ für $u \in D_A$. Dann gilt:

Behauptung 1. A ist symmetrisch.

Beweis. Für $u, v \in D_A$ erhalten wir nach partieller Integration

$$(Au, v)_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)v \, dx = \int_\Omega u(-\Delta v) \, dx = (u, Av)_{L^2}$$

wobei wir für die partielle Integration die Gleichung

$$div(u\nabla v - v\nabla u) = u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u$$

und den Satz von Gauss angewendet haben. □

Nach Satz 3.4.2 ist A abschliessbar mit $\Gamma_{\bar{A}} = \overline{\Gamma_A}$ und

$$\begin{aligned} D_{\bar{A}} = \{u \in & L^2(\Omega);\ \exists (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_A : \\ & u_k \to u,\ Au_k \to f =: \bar{A}u \text{ in } L^2(\Omega)\ (k \to \infty)\}. \end{aligned}$$

Behauptung 2. $\bar{A}$ ist selbstadjungiert.

Beweis. Mit A ist auch $\bar{A}$ symmetrisch: Seien $u, v \in D_{\bar{A}}$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (v_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset D_A$ mit

$$u_k \to u,\ -\Delta u_k = f_k \to f = \bar{A}u,\ v_l \to v,\ -\Delta v_l = g_l \to g = \bar{A}v$$

in $L^2(\Omega)$ $(k, l \to \infty)$. Mit Behauptung 1 folgt

$$(\bar{A}u, v)_{L^2} = \lim_{k,l\to\infty} (Au_k, v_l)_{L^2} = \lim_{k,l\to\infty} (u_k, Av_l)_{L^2} = (u, \bar{A}v)_{L^2}.$$

Lemma 7.1.1. *Sei $v \in L^2(\Omega)$ und es gelte für alle $u \in D_{\bar{A}}$ die Abschätzung*

$$\left|(v, \bar{A}u)_{L^2}\right| = \left|\int_\Omega v\bar{A}u \, dx\right| \le C \cdot \|u\|_{L^2}$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C. Dann folgt $v \in D_{\bar{A}}$.

Beweis. Siehe Lemma 7.5.2 für den Fall $n = 1$, bzw. Lemma 9.4.2 für $n \ge 1$. □

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} D_{\bar{A}^*} &= \{v \in L^2(\Omega);\ D_{\bar{A}} \ni u \mapsto (v, \bar{A}u)_{L^2} \text{ ist stetig auf } L^2(\Omega) \text{ fortsetzbar}\} \\ &= \{v \in L^2(\Omega);\ \exists C \in \mathbb{R} :\ \left|(v, \bar{A}u)_{L^2}\right| \le C \cdot \|u\|_{L^2}\}. \end{aligned}$$

Lemma 7.1.1 ergibt also $D_{\bar{A}^*} = D_{\bar{A}}$; das heisst, $\bar{A}$ ist selbstadjungiert. □

Satz 7.1.1. *i) $im(\bar{A})$ ist abgeschlossen;*

ii) $ker(\bar{A}) = \{0\}$.

Folgerung 7.1.1. Zusammen mit Satz 6.2.1 liefert Satz 7.1.1 für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $u \in D_{\bar{A}}$ der Gleichung $\bar{A}u = f$. Wir können u ansehen als eine "verallgemeinerte Lösung" von (7.1.1),(7.1.2).

Zum Beweis von Satz 7.1.1 benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 7.1.2. (Poincaré) *Sei $\Omega \subset]0, L[\ \times \mathbb{R}^{n-1}$. Für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt dann die Abschätzung*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq L^2 \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx.$$

Beweis. Setze u fort durch $u(x) = 0$ für $x \notin \Omega$. Für $x = (x_1, x') \in \Omega$ schätze ab

$$\begin{aligned}
|u(x_1, x')|^2 &= \Big| \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(s, x') \ ds \Big|^2 \\
&\leq \Big(\int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(s, x') \right| \ ds \Big)^2 \leq L \int_0^L |\nabla u(s, x')|^2 \ ds.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^2 \ dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^L |u(x_1, x')|^2 \ dx_1 \ dx' \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} L^2 \int_0^L |\nabla u(s, x')|^2 \ ds \ dx' \leq L^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 7.1.1. i) Seien $(u_k) \subset D_{\bar{A}}$ mit $\bar{A} u_k =: f_k \to f$ in $L^2(\Omega)$ für $k \to \infty$.

OBdA dürfen wir annehmen, dass $u_k \in D_A$. (Betrachte sonst Folgen $(u_{kl}) \subset D_A$ mit $u_{kl} \to u_k$, $Au_{kl} \to Au_k = f_k$ in L^2 $(l \to \infty)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und ersetze u_k durch $\tilde{u_k} = u_{kl(k)}$ für geeignetes $l(k)$).

Somit gilt $u_k \in C^2(\bar{\Omega})$, $Au_k = -\Delta u_k \in C^0(\bar{\Omega})$, $u_k = 0$ auf $\partial\Omega$, $k \in \mathbb{N}$, und mit Lemma 7.1.2 und partieller Integration unter Verwendung der Gleichung $div(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u_k - u_l\|_{L^2}^2 &\leq L^2 \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^2}^2 = L^2 \int_\Omega |\nabla(u_k - u_l)|^2 \ dx \\
&= L^2 \int_\Omega \underbrace{|-\Delta(u_k - u_l)|}_{=f_k - f_l}(u_k - u_l) \ dx \leq L^2 \|f_k - f_l\|_{L^2} \cdot \|u_k - u_l\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|u_k - u_l\|_{L^2} \leq C \|f_k - f_l\|_{L^2} \to 0 \ (k, l \to \infty).$$

Also ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ Cauchy-Folge und es existiert $u = \lim_{k\to\infty} u_k$.

Mit $u_k \to u$, $Au_k = f_k \to f$ in L^2 $(k \to \infty)$ folgt $u \in D_{\bar{A}}$ und $f = \bar{A}u$; das heisst, $im\bar{A}$ ist abgeschlossen.

ii) Sei $u \in D_{\bar{A}}$ mit $\bar{A}u = 0$. Wie in i) wähle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_A$ mit $u_k \to u$, $Au_k = -\Delta u_k \to 0$ in L^2 $(k \to \infty)$. Mit Lemma 7.1.2 folgt

$$\|u_k\|_{L^2} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^2}^2 = C \int_\Omega (-\Delta u_k) u_k \ dx \leq o(1) \cdot \|u_k\|_{L^2},$$

wobei $o(1) \to 0$ $(k \to \infty)$; also $u = \lim_{k\to\infty} u_k = 0 \in L^2(\Omega)$.

$\square$

Zu $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ finden wir also stets eine "verallgemeinerte Lösung" $u \in D_{\bar{A}}$ von (7.1.1), (7.1.2). Es bleiben jedoch einige wichtige Fragen offen.

Fragen: Ist u auch eine klassische Lösung von (7.1.1),(7.1.2), allenfalls sogar "glatt", also $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, falls $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$? – Erfüllt eine "verallgemeinerte Lösung" auch die Randbedingung (7.1.2)? – Wie beweist man Lemma 7.1.1?

7.1.2 Lösung mittels Rieszschem Darstellungssatz

Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ Lösung von (7.1.1),(7.1.2), und sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine "Testfunktion". Nach partieller Integration erhalten wir aus (7.1.1) die Gleichung

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \; dx = \int_\Omega f\varphi \; dx.$$

Wir deuten die linke Seite als Skalrprodukt. Setze dazu

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \;\; u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Wegen Lemma 7.1.2 gilt

$$\forall u \in C_c^\infty(\Omega)\colon \; \|u\|_{L^2} \le C \cdot \|u\|_{H_0^1} \, ;$$

also ist $\|\cdot\|_{H_0^1}$ eine Norm auf $C_c^\infty(\Omega)$. Definiere

$$H_0^1(\Omega) = \|\cdot\|_{H_0^1} - clos(C_c^\infty(\Omega)).$$

Dann ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx, \;\; u, v \in H_0^1(\Omega),$$

wie gewünscht, wobei wir für $u = \lim_{k\to\infty} u_k$ in $H_0^1(\Omega)$ mit $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ setzen

$$\nabla u := \lim_{k\to\infty} \nabla u_k \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Weiter lässt sich $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi \, dx$ stetig erweitern zu $l \in (H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega)$. Mit Satz 4.3.2 folgt

Satz 7.1.2. *Für alle $f \in L^2(\Omega)$ gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega fv \, dx. \tag{7.1.3}$$

Definition 7.1.1. *Ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit* (7.1.3) *heisst* **schwache Lösung der Klasse H_0^1 von** (7.1.1), (7.1.2).

Wie bei unserem ersten Lösungsansatz bleiben zunächst einige Fragen ungeklärt.

Fragen: Ist eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ eine (allenfalls sogar "glatte") klassische Lösung von (7.1.1),(7.1.2)? – Was bedeutet ∇u für $u \in H_0^1(\Omega)$? – In welchem Sinne ist die Randbedingung (7.1.2) erfüllt?

Um Antwort auf diese Fragen zu geben, müssen wir zunächst den Ansatzraum $H_0^1(\Omega)$ besser verstehen und uns dann der Regularitätstheorie zuwenden.

7.2 Distributionsableitung, schwache Ableitung, Sobolev - Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definition 7.2.1. *i) Die lineare Abbildung*

$$C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

definiert die **Distributionsableitung** $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$.

ii) Analog definiert für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit den Notationen

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \;\; D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

die Abbildung

$$C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx$$

die **Distributionsableitung** $D^\alpha u$ *von u.*

Beachte, dass die Distributionsableitung eine *Abbildung* ist. Wir verwenden jedoch dasselbe Symbol wie für die Ableitungsfunktion, sofern diese existiert.

Definition 7.2.2. *i) Die Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$* **hat eine schwache Ableitung** $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *in $L^p(\Omega)$, falls $g_i \in L^p(\Omega)$ existiert mit*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega g_i \varphi\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

In diesem Fall sagen wir: "Die Distributionsableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ wird durch die Funktion $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \in L^p(\Omega)$ dargestellt."

ii) Für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heisst $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, falls $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega g_\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx.$$

Beispiel 7.2.1. i) Falls $u \in C^k(\Omega)$, so ist für $|\alpha| \leq k$ die klassische Ableitung $D^\alpha u$ auch schwache Ableitung in $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

ii) Sei $\Omega = I =]-1,1[$. Für $u(x) = max\{0,x\}$ gilt $u' = \chi_{]0,1[} \in L^\infty(I)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Dann gilt

$$-\int_I u\varphi'\ dx = -\int_0^1 x\varphi'(x)\ dx = \underbrace{-(x\varphi(x))|_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \int_0^1 \varphi\ dx$$
$$= \int_I \chi_{]0,1[}\ \varphi\ dx.$$

$\square$

iii) Allgemein besitzt jede absolut stetige Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine schwache Ableitung $u' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; vergleiche dazu Abschnitt 7.3.

iv) Sei $u = \chi_{]0,\infty[}$. Dann hat u die Distributionsableitung δ_0; das heisst, u besitzt *keine* schwache Ableitung $u' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Beweis. Für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$-\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\ dx = -\int_0^\infty \varphi'\ dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

$\square$

v) Sei $u\colon]0,1[\to]0,1[$ die Cantor-Lebesgue-Funktion mit $u' = 0$ punktweise fast überall. Jedoch erhalten wir

$$\int_0^1 u\varphi_k'\ dx \to -1 \quad (k \to \infty),$$

falls wir $\varphi_k \in C_c^\infty(]0,1[)$ geeignet wählen mit $\varphi_k \to \chi_{]0,1[}$ $(k \to \infty)$; also verschwindet die Distributionsableitung u' nicht!

vi) Sei $v \in L^2(\Omega)$, und es gelte analog zu Lemma 7.1.1 die Bedingung

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\colon \left| \int_\Omega v\Delta\varphi\ dx \right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^2}.$$

Dann definiert die Distribtutionsableitung

$$\Delta v : C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega v\Delta\varphi\ dx$$

ein Funktional $l \in (L^2(\Omega))^*$. Nach Satz 4.3.2 gibt es $f \in L^2(\Omega)$ mit

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega)\colon l(\varphi) = (f,\varphi)_{L^2},$$

und wir erhalten

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega f\varphi\ dx = l(\varphi) = \int_\Omega v\Delta\varphi\ dx;$$

das heisst, $\Delta v = f \in L^2(\Omega)$.

Definition 7.2.3. (Sobolev-Räume) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$. Setze*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}.$$

Weiter sei

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{1,p}} - clos(C_c^\infty(\Omega)).$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$W^{1,2}(\Omega) =: H^1(\Omega),\ W_0^{1,2}(\Omega) =: H_0^1(\Omega).$$

Analog sei für $k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Wieder setzen wir

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{k,p}} - clos(C_c^\infty(\Omega)),\ W_{(0)}^{k,2}(\Omega) = H_{(0)}^k(\Omega).$$

Bemerkung 7.2.1. i) Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, so folgt mit Hölder

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega),\ 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Dabei und auch im Folgenden bezeichnet das Symbol $\hookrightarrow$ eine topologische (also stetige) und algebraische (homomorphe) Einbettung (häufig sogar Inklusion).

ii) Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ definiert wegen Lemma 7.1.2 der Ausdruck

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2},\ u \in H_0^1(\Omega),$$

eine zur H^1-Norm äquivalente Norm.

iii) Allgemein gilt analog zu Lemma 7.1.2 für $1 \leq p < \infty$ und $u \in C_c^\infty(\Omega)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p\ dx &\leq \int_\Omega \Big(\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\ dx_1\Big)^p\ dx \\ &\leq L \cdot L^{p-1} \int_\Omega \int_0^L |\nabla u|^p\ dx_1\ dx' = L^p \cdot \int_\Omega |\nabla u|^p\ dx.\end{aligned}$$

Folglich sind für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ die durch $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_{L^p}$ für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definierte Norm und die $W^{1,p}$-Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ äquivalent.

Satz 7.2.1. *Der Raum* $W^{1,p}(\Omega)$ *ist*

i) vollständig für $1 \leq p \leq \infty$,

ii) separabel für $1 \leq p < \infty$,

iii) und reflexiv für $1 < p < \infty$.

Beweis. i) Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Dann sind $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\frac{\partial u}{\partial x_i})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $L^p(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Da der Raum $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existieren $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, $g_i = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$.

Behauptung 1. $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$.

Beweis. Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_i\ \varphi\ dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\ \varphi\ dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx \\ &= -\int_\Omega u\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx.\end{aligned}$$

□

Somit folgt $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ $(k \to \infty)$, wie gewünscht.

ii) Die Einbettung

$$i : W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$$

ist isometrisch. Nach Beispiel 5.2.1.iii) ist $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ separabel, nach Satz 5.2.1 daher auch $i(W^{1,p}(\Omega))$. Da i isometrisch, ist also auch $W^{1,p}(\Omega)$ separabel.

iii) Nach i) ist $i(W^{1,p}(\Omega)) =: Y$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von $X := (L^p(\Omega))^{n+1}$. Für $1 < p < \infty$ ist X nach Beispiel 5.1.2.iii) reflexiv, nach Satz 5.1.3 dann auch Y, also auch $W^{1,p}(\Omega)$.

□

Bemerkung 7.2.2. Insbesondere ist $H^1(\Omega)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega uv\ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Analog für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Fragen: Wann existiert mit der schwachen Ableitung auch eine punktweise Ableitung? – Was kann man über die Randwerte von Sobolev-Funktionen sagen?

7.3 Sobolev-Räume auf einem Intervall

Sei $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Im folgenden legen wir stets das Lebesguesche Mass zugrunde.

Satz 7.3.1. *i) Sei $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ mit $u = \tilde{u}$ fast überall, und für $x_0, x \in I$ gilt*

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt.$$

Insbesondere ist $\tilde{u}$ absolut stetig und punktweise fast überall differenzierbar mit $\tilde{u}'(x) = u'(x)$ für fast alle $x \in I$.

ii) Falls umgekehrt $u \in C(I)$ absolut stetig ist, so gilt $u \in W^{1,1}_{loc}(I)$, und die fast überall definierte Ableitung stimmt überein mit der schwachen Ableitung u'. Falls $u, u' \in L^p(I)$, so gilt $u \in W^{1,p}(I)$.

Notation: Im Folgenden identifizieren wir eine Funktion $u \in W^{1,p}(I)$ meist mit ihrem stetigen Repräsentanten $\tilde{u}$.

Lemma 7.3.1. (du Bois-Reymond) *Sei $f \in L^1_{loc}(I)$ mit*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I)\colon \int_I f \varphi'\, dx = 0.$$

Dann gilt $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 7.3.1. Lemma 7.3.1 sagt aus, dass f konstant sein muss, falls die Distributionsableitung von f verschwindet, analog zum Fall $f \in C^1(I)$.

Beweis. i) Sei $v \in C_c^\infty(I)$ mit $\int_I v\ dx = 0$. Dann gilt $v = \varphi'$ für die Funktion

$$\varphi(x) = \int_a^x v(t)\ dt\ \ \in C_c^\infty(I).$$

ii) Sei $w \in C_c^\infty(I)$ nun beliebig. Fixiere $\psi \in C_c^\infty(I)$ mit $\int_I \psi\ dx = 1$ und setze $v = w - c_0\psi$, wobei $c_0 \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass

$$\int_I v\ dx = \int_I w\ dx - c_0 \int_I \psi\ dx = 0\ ;$$

das heisst, $c_0 = \int_I w\ dx$. Nach i) gilt $v = \varphi'$ für ein $\varphi \in C_c^\infty(I)$, also

$$0 = \int_I fv\ dx = \int_I fw\ dx - c_0 \int_I f\psi\ dx = \int_I (f - c)w\ dx$$

mit $c = \int_I f\psi\ dx$. Da $w \in C_c^\infty(I)$ beliebig war, folgt $f \equiv c$. □

Lemma 7.3.2. *Sei $g \in L^1(I)$, $x_0 \in I$. Dann ist die Funktion*

$$v(x) = \int_{x_0}^x g(t)\ dt$$

absolut stetig und von der Klasse $W^{1,1}_{loc}(I)$ mit schwacher Ableitung $v' = g$.

Beweis. Absolute Stetigkeit von v folgt aus Sätzen der Analysis III. Wir zeigen

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I)\colon \int_I g\varphi\ dx = -\int_I v\varphi'\ dx.$$

Sei $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' dx &= \int_a^b \Big(\int_{x_0}^x g(t)dt\Big)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^{x_0} \Big(\int_x^{x_0} g(t)\varphi'(x)dt\Big)dx + \int_{x_0}^b \Big(\int_{x_0}^x g(t)\varphi'(x)dt\Big)dx \\ &= -\int_a^{x_0} \Big(\int_a^t g(t)\varphi'(x)dx\Big)dt + \int_{x_0}^b \Big(\int_t^b g(t)\varphi'(x)dx\Big)dt \\ &= -\int_a^{x_0} g(t)\varphi(t)dt - \int_{x_0}^b g(t)\varphi(t)dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt,\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Beweis von Satz 7.3.1. i) Sei $u \in W^{1,p}(I)$. Fixiere $x_0 \in I$. Setze

$$v(x) = \int_{x_0}^x u'(t)\ dt.$$

Nach Lemma 7.3.2 ist v absolut stetig und $v \in W^{1,1}_{loc}(I)$ mit schwacher Ableitung $v' = u' \in L^p(I)$. Setze $f = u - v \in L^1_{loc}(I)$ mit

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I)\colon \int_I f\varphi'\ dx = \int_I u\varphi'\ dx - \int_I v\varphi'\ dx = 0.$$

Mit Lemma 7.3.1 folgt $f \equiv c$ fast überall, also $u(x) = v(x) + c$ fast überall, wobei $c = u(x_0) - v(x_0) = u(x_0)$.

ii) Sei $u \in C(I)$ absolut stetig. Dann gilt nach Korollar III.5.3.1

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x u'(t)\ dt =: v(x)$$

mit der punktweise fast überall definierten Ableitung $u' \in L^1(I)$. Nach Lemma 7.3.2 hat v (und damit u) die schwache Ableitung u'. □

Satz 7.3.2. *Sei $1 < p \leq \infty$, und sei $u \in L^p(I)$. Es sind äquivalent:*

i) $u \in W^{1,p}(I)$;

ii) es gibt $C \geq 0$ mit

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I)\colon \Big|\int_I u\varphi'\ dx\Big| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^q},\ \text{wobei}\ q = \frac{p}{p-1};$$

iii) mit einer Konstanten $C \geq 0$ gilt für alle $I' \subset\subset I$ und $|h| < dist(I', \partial I)$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} \leq C \cdot |h|,$$

wobei $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

Bemerkung 7.3.2. i) Der Beweis zeigt, dass man $C = \|\nabla u\|_{L^p}$ in ii), iii) wählen kann.

ii) Die Funktion $u = \chi_{]0,1[}$ erfüllt ii) und iii) mit $p = 1$, $q = \infty$, aber $u \notin W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$.

iii) Es gelten jedoch auch im Falle $p = 1$ die Aussagen "i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii)". (Übung)

iv) Für $p = \infty$ liefert Satz 7.3.2 die Äquivalenz:

$$u \in W^{1,\infty}(I) \Leftrightarrow u \text{ Lipschitz stetig.}$$

Beweis von Satz 7.3.2. "i) $\Rightarrow$ ii)": Sei $u \in W^{1,p}(I)$. Für $\varphi \in C^\infty_c(I)$ erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung

$$\Big| \int_I u\varphi' \, dx \Big| = \Big| \int_I u'\varphi \, dx \Big| \leq \|u'\|_{L^p} \cdot \|\varphi\|_{L^q}.$$

"ii) $\Rightarrow$ i)": Falls ii) gilt, so kann man die Abbildung

$$C^\infty_c(I) \ni \varphi \mapsto \int_I u\varphi' \, dx$$

stetig zu $l \in (L^q(I))^*$ erweitern. Da $p > 1$, also $q < \infty$, gibt es nach Satz 4.4.1 ein $g \in L^p(I)$ mit

$$\forall \varphi \in L^q(I) \colon l(\varphi) = -\int_I g\varphi \, dx \; ;$$

insbesondere

$$\forall \varphi \in C^\infty_c(I) \colon \int_I u\varphi' \, dx = l(\varphi) = -\int_I g\varphi \, dx \; ;$$

das heisst, $g \in L^p(I)$ ist schwache Ableitung von u.

"i) $\Rightarrow$ iii)": Sei $I' \subset\subset I$, $|h| < dist(I', \partial I)$. Nach Satz 7.3.1 gilt für alle $x \in I'$

$$\tau_h u(x) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) \, dt = h \cdot \int_0^1 u'(x + ht) \, dt.$$

Mit der Minkowski-Ungleichung (oder der Jensenschen Ungleichung) folgt

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} &= |h| \cdot \| \int_0^1 u'(\cdot + ht) \, dt \|_{L^p(I')} \\ &\leq |h| \cdot \int_0^1 \|u'(\cdot + ht)\|_{L^p(I')} \, dt \leq |h| \cdot \|u'\|_{L^p(I)}. \end{aligned}$$

"iii) $\Rightarrow$ ii)": Sei $\varphi \in C^\infty_c(I)$. Wähle $I' \subset\subset I$ mit $supp(\varphi) \subset I'$. Für $|h| < dist(I', \partial I)$ liefert die Höldersche Ungleichung die Abschätzung

$$A := \int_I \big(\underbrace{u(x+h) - u(x)}_{= \tau_h u - u \in L^p} \big) \varphi(x) \, dx \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} \cdot \|\varphi\|_{L^q(I')}.$$

Andererseits gilt nach Substitution $y = x + h$

$$A = \int_I \big(u(y)\varphi(y-h) - u(y)\varphi(y) \big) \, dy = -\int_I u(y) \big(\varphi(y) - \varphi(y-h) \big) \, dy.$$

Nach Division durch $|h|$ und Grenzübergang $h \to 0$ folgt mit Annahme iii) die Abschätzung

$$\Big|\int_I u\varphi'\,dx\Big| = \lim_{h\to 0}\Big|\int_I u(x)\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}\,dx\Big| \le C\cdot\|\varphi\|_{L^q(I)}$$

mit einem von φ unabhängigen $C \in \mathbb{R}$. □

Satz 7.3.3. *Sei $I =]a,b[$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 \le p \le \infty$. Es gibt einen stetigen, linearen Fortsetzungsoperator $E : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften*

i) $(Eu)|_I = u$,

ii) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\cdot\|u\|_{L^p(I)}$,

iii) $\|(Eu)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\cdot\|u\|_{W^{1,p}(I)}$

für alle $u \in W^{1,p}(I)$.

Bemerkung 7.3.3. $C = C(I)$, $E = E(I)$ sind unabhängig von p.

Beweis. a) Sei zunächst $I =]0,\infty[= \mathbb{R}_+$. Für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$ setze

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \ge 0,\\ u(-x), & x < 0,\end{cases}, \quad \text{sowie}\quad g(x) = \begin{cases} u'(x), & x > 0,\\ -u'(-x), & x < 0.\end{cases}$$

wobei wir u bei $x = 0$ gemäss Satz 7.3.1 stetig ergänzen. Dann sind v, $g \in L^p(\mathbb{R})$ mit

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\cdot\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}\,, \qquad \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\cdot\|u'\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}\,,$$

und offenbar gilt $v|_{\mathbb{R}_+} = u$.

Behauptung 1. $g = v'$ als Distribution.

Beweis. Nach Satz 7.3.1 gilt für fast alle $x > 0$

$$v(x) = u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt = v(0) + \int_0^x g(s)\,ds,$$

sowie für $x < 0$

$$\begin{aligned} v(x) = u(-x) = u(0) &+ \int_0^{-x} u'(t)\,dt \\ \overset{(s=-t)}{=} u(0) &+ \int_0^x (-u'(-s))\,ds = v(0) + \int_0^x g(s)\,ds.\end{aligned}$$

Nach Satz 7.3.1.ii) oder Lemma 7.3.2 folgt $g = v'$. □

b) Sei I beschränkt, OBdA $I =]0,1[$. Fixiere eine "Abschneidefunktion" $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le \eta \le 1$ und so, dass

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{4},\\ 0, & x > \frac{3}{4},\end{cases} \quad |\eta'| \le 3.$$

Für $u \in W^{1,p}(I)$ setze $u_1 = u\eta$, $u_2 = u(1-\eta)$ mit $u = u_1 + u_2$. Offenbar gilt u_1, $u_2 \in L^p(I)$ mit

$$\|u_1\|_{L^p},\ \|u_2\|_{L^p} \le \|u\|_{L^p}.$$

Behauptung 2. $u_1 \in W^{1,p}(I)$ mit $u_1' = u'\eta + u\eta' \in L^p(I)$, da $u'\eta,\ u\eta' \in L^p$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Beachte

$$(\eta\varphi)' = \eta'\varphi + \eta\varphi'.$$

Mit Definition 7.2.2 folgt

$$\int_I \big(u_1\varphi' + (u'\eta + u\eta')\varphi\big)\ dx = \int_I \big(u\,\underbrace{(\eta\varphi' + \eta'\varphi)}_{=(\eta\varphi)'} + u'(\eta\varphi)\big)\ dx = 0.$$

□

Setze u_1 fort durch $u(x) = 0$ für $x \geq 1$ zu $u_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$ mit

$$\|u_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Mit a) folgt die Behauptung. Analog erhalten wir $u_2 \in W^{1,p}(]-\infty, 1[)$ mit

$$\|u_2\|_{W^{1,p}(]-\infty,1[)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}.$$

□

Satz 7.3.4. *Sei $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit*

$$\big\|u_{k|_I} - u\big\|_{W^{1,p}(I)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Bemerkung 7.3.4. i) Insbesondere liegt für beschränktes I der Raum $C^\infty(\bar{I})$ dicht in $W^{1,p}(I)$, falls $1 \leq p < \infty$. (Beachte, dass $\{u|_I;\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R})\} \subset C^\infty(\bar{I})$.)

ii) Für $I = \mathbb{R}$ liegt $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R})$; das heisst,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \|\cdot\|_{W^{1,p}} - clos(C_c^\infty(\mathbb{R})) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty.$$

Zum Beweis von Satz 7.3.4 genügt es, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ zu betrachten. (Sonst betrachte $\tilde{u} = Eu$ gemäss Satz 7.3.3.) Wir können dann u durch Faltung mit einem "regularisierenden Kern" (oder "mollifier") glätten; vergleiche Analysis III.4.2.

Repetition: Faltung auf $\mathbb{R}^n$. Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ g(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\ g(x-z)\ dz \\ &= (g * f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

mit

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\ \|g\|_{L^p}\ ,\ 1 \leq p \leq \infty; \tag{7.3.2}$$

vergleiche Korollar III.4.2.1. Falls $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so gilt $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)\Big)\ g(y)\ dy = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g\Big)(x); \tag{7.3.3}$$

analog

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \Big(f * \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big)(x),$$

falls auch $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, g, $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $g * h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(g * h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\underbrace{g(x-y)}_{\tilde{g}(y-x)}h(y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}(f * \tilde{g})\,h\,dy \tag{7.3.4}$$

mit $\tilde{g}(x) = g(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Sei nun $0 \le \rho \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho\,dx = 1.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\rho_k(x) = k^n\rho(kx) \in C_c^\infty(B_{1/k}(0))$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(kx)\,d(kx) = 1.$$

Lemma 7.3.3. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $f_0 \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - f_0\|_{L^p} < \varepsilon$. Betrachte die Folge $f_k = \rho_k * f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$supp(f_k) \subset \bigcup_{y \in supp(f_0)} B_{1/k}(y) \subset B_{R_0}(0)$$

für ein $R_0 > 0$. Beachte

$$\begin{aligned}|(f_k - f_0)(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n}(f_0(x-y) - f_0(x))\,\rho_k(y)\,dy\Big| \\ &\le \sup_{|x-z|<1/k}|f_0(z) - f_0(x)| \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k\,dy}_{=1} \to 0 \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

gleichmässig in $x \in \mathbb{R}^n$. Es folgt

$$\|f_k - f_0\|_{L^p} \le (\mathcal{L}^n(B_{R_0}(0)))^{1/p}\,\|f_k - f_0\|_{L^\infty} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

mit (7.3.2) also

$$\begin{aligned}\|\rho_k * f - f\|_{L^p} &\le \|\rho_k * (f - f_0)\|_{L^p} + \|\rho_k * f_0 - f_0\|_{L^p} + \|f_0 - f\|_{L^p} \\ &\le \|\rho_k\|_{L^1}\,\|f - f_0\|_{L^p} + \|f_k - f_0\|_{L^p} + \varepsilon \le 2\varepsilon + o(1),\end{aligned}$$

wobei $o(1) \to 0$ $(k \to \infty)$. □

Die Aussage von Lemma 7.3.3 ergibt sich auch aus dem Differentiationssatz von Lebesgue, siehe Analysis III, Satz 5.1.1, zusammen mit dem Satz von Vitali, siehe Analysis III, Satz 3.4.1.

Beweis von Satz 7.3.4. Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $v_k = \rho_k * u$, wobei $\rho_k(x) = k\rho(kx)$ für ein $0 \le \rho \in C_c^\infty(]-1,1[)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$ wie oben.

Behauptung 1. $v_k \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ mit $v_k' = \rho_k * u' \in L^p(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Mit (7.3.3), (7.3.4) und mit $\tilde{\rho}_k(x) = \rho_k(-x)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} v_k \varphi'\, dx &= \int_{\mathbb{R}} (\rho_k * u)\varphi'\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(\varphi' * \tilde{\rho}_k)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(\varphi * \tilde{\rho}_k)'\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} u'(\varphi * \tilde{\rho}_k)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} (\rho_k * u')\varphi\, dx.\end{aligned}$$

□

Mit Lemma 7.3.3 folgt

$$\|v_k - u\|_{L^p} + \|v_k' - u'\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

das heisst, $\|v_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Schliesslich sei $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \eta \le 1$, mit

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(x) = \eta(x/k)$, $u_k = \eta_k v_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_k' = \eta_k' v_k + \eta_k v_k'$. Schreibe

$$\begin{aligned} u_k - u &= \eta_k(v_k - u) + \eta_k u - u, \\ u_k' - u' &= \eta_k(v_k' - u') + \eta_k' v_k + \eta_k u' - u'. \end{aligned}$$

Da $\eta_k u \to u$, $\eta_k u' \to u'$ punktweise, folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\|\eta_k u - u\|_{L^p} + \|\eta_k u' - u'\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Mit $0 \le \eta \le 1$, $\|\eta_k'\|_{L^\infty} = k^{-1} \|\eta'\|_{L^\infty} \to 0$ $(k \to \infty)$ erhalten wir andererseits auch Konvergenz

$$\|\eta_k(v_k - u)\|_{L^p} + \|\eta(v_k' - u')\|_{L^p} \le \|v_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0$$

sowie

$$\|\eta_k' v_k\|_{L^p} \le Ck^{-1} \cdot \|v_k\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

also $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ $(k \to \infty)$. □

Satz 7.3.5. (Sobolev-Einbettung) *Sei $1 \le p \le \infty$. Es gilt $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ und*

$$\forall u \in W^{1,p}(I)\colon\ \|u\|_{L^\infty} \le C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}$$

mit $C = C(l)$, wobei $l = |b-a| = \mathcal{L}^1(I) = |I|$.

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I)$. OBdA sei $l = |I| \le 1$. (Sonst betrachte $I' \subset I$ mit $|I'| = 1$ und $\|u\|_{L^\infty(I')} \ge \frac{1}{2} \|u\|_{L^\infty(I)}$.) Für fast alle $x, y \in I$ gilt nach Satz 7.3.1 die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \le \int_I |u'(t)|\, dt = \|u'\|_{L^1},$$

also nach Mittelung bzgl. $y \in I$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in I} |u(x)| &\leq l^{-1} \int_I |u(y)| \ dy + \|u'\|_{L^1} \\ &\leq (1 + l^{-1}) \ \|u\|_{W^{1,1}} \leq (1 + l^{-1}) \ \|u\|_{W^{1,p}} .\end{aligned}$$

□

Korollar 7.3.1. *Falls I unbeschränkt, $1 \leq p < \infty$, so gilt für $u \in W^{1,p}(I)$ stets*

$$u(x) \to 0 \qquad (|x| \to \infty, \ x \in I).$$

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I)$. Da $p < \infty$, liefert Satz 7.3.4 eine Folge $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$ $(k \to \infty)$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u_k - u\|_{W^{1,p}(I)} < \varepsilon$ für $k \geq k_0$. Mit Satz 7.3.5 folgt für $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}\limsup_{|x|\to\infty,\ x\in I} |u(x)| &\leq \underbrace{\limsup_{|x|\to\infty,\ x\in I} |u_k(x)|}_{=0} + \|u_k - u\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq \|u_k - u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u_k - u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\epsilon.\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung. □

Korollar 7.3.2. (Produktregel) *Seien $u, v \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt $uv \in W^{1,p}(I)$, und*

$$\|uv\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)} \cdot \|v\|_{W^{1,p}(I)} .$$

Beweis. Nach Satz 7.3.5 gilt $u, v \in L^\infty(I)$, also $uv \in L^p(I)$ mit

$$\|uv\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^p} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)} \cdot \|v\|_{W^{1,p}(I)} .$$

Analog $u'v + uv' \in L^p(I)$ mit

$$\|u'v + uv'\|_{L^p} \leq \|u'\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v'\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \cdot \|v\|_{W^{1,p}} .$$

Behauptung. $u'v + uv' \in L^p$ ist schwache Ableitung von uv.

Beweis. i) Sei $p < \infty$. Wähle (u_k), (v_k) in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}} + \|v_k|_I - v\|_{W^{1,p}} \to 0,$$

also auch $u_k \to u$, $v_k \to v$ in $L^\infty(I)$ $(k \to \infty)$. Dann folgt

$$(u_k v_k)' = u_k' v_k + u_k v_k' \to u'v + uv' \text{ in } \ L^p(I) \quad (k \to \infty).$$

Nach Satz 7.2.1 ist $\lim_{k\to\infty} (u_k v_k)' = u'v + uv' \in L^p(I)$ schwache Ableitung von $uv \in L^p(I)$.

ii) Sei nun $p = \infty$. Zu gegebenem $\varphi \in C_c^\infty(I)$ wähle $I' \subset\subset I$ mit $supp(\varphi) \subset I'$. Nach Bemerkung 7.2.1 können wir $u|_{I'}, v|_{I'}$ auffassen als $u|_{I'}$, $v|_{I'} \in W^{1,1}(I')$, da

$$W^{1,\infty}(I) \hookrightarrow W^{1,\infty}(I') \hookrightarrow W^{1,1}(I').$$

Gemäss i) ist $(uv' + u'v)|_{I'} \in L^1(I')$ schwache Ableitung von $(uv)|_{I'} \in L^1(I')$. Insbesondere gilt

$$\int_I (uv)\varphi' \, dx = -\int_I (uv' + u'v)\varphi \, dx,$$

wie gewünscht. □

Es folgt $uv \in W^{1,p}(I)$. □

7.4 Lösung des Modellproblems auf I

7.4.1 Dirichlet-Problem

Sei $I =]a, b[$, $-\infty < a < b < \infty$. Zu $f \in C^0(\bar{I})$ suche $u \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' = f \quad \text{in } I, \tag{7.4.1}$$

$$u(a) = 0 = u(b)\ . \tag{7.4.2}$$

Gemäss Abschnitt 7.1 finden wir mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(I)$ von (7.4.1), (7.4.2) im Sinne von

$$\forall v \in H_0^1(I) \colon \int_I u'v' \, dx = \int_I fv \, dx. \tag{7.4.3}$$

Satz 7.4.1. *Für das so bestimmte u gilt $u \in C^2(\bar{I})$, und u löst* (7.4.1), (7.4.2) *klassisch.*

Beweis. i) $u \in C^2(\bar{I})$. Da (7.4.3) insbesondere gilt für $v \in C_c^\infty(I)$, hat $u' \in L^2(I)$ die schwache Ableitung

$$(u')' = -f \in C^0(\bar{I}) \hookrightarrow L^\infty(I);$$

das heisst, $u' \in W^{1,\infty}(I)$. Nach Satz 7.3.1 gilt

$$u'(x) = u'(x_0) - \int_{x_0}^x f(t) \, dt \in C^1(\bar{I})$$

gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da $f \in C^0(\bar{I})$. Also folgt $u \in C^2(\bar{I})$, und u löst (7.4.1) klassisch.

ii) Da $H_0^1(I) = \|\cdot\|_{H^1} - clos(C_c^\infty(I))$ gibt es $(u_k) \subset C_c^\infty(I)$ mit

$$\|u_k - u\|_{L^\infty} \le C \cdot \|u_k - u\|_{H^1} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Es folgt für beliebige $k \in \mathbb{N}$

$$|u(a)| \le \underbrace{|u_k(a)|}_{=0} + \|u_k - u\|_{L^\infty} \le C \, \|u_k - u\|_{H^1} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

also $u(a) = 0$. Analog $u(b) = 0$. □

7.4.2 Neumann-Problem

Sei $f \in C^0(\bar{I})$. Wir suchen zunächst $u \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' + u = f \quad \text{in } I, \tag{7.4.4}$$
$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.5}$$

Bemerkung 7.4.1. i) Für $u \in W^{1,p}(I)$ sind die Randwerte $u'(a)$, $u'(b)$ nicht definiert.

ii) Falls $u \in C^2(\bar{I})$ klassische Lösung von (7.4.4), (7.4.5), so folgt für $v \in C^1(\bar{I})$ nach partieller Integration

$$(u, v)_{H^1} = \int_I (u'v' + uv)\, dx = \int_I fv\, dx. \tag{7.4.6}$$

Definition 7.4.1. *$u \in H^1$ heisst* **schwache Lösung in der Klasse** *H^1 von* (7.4.4), (7.4.5), *falls* (7.4.6) *erfüllt ist für alle $v \in H^1(I)$.*

Existenz einer Lösung liefert der folgende Satz.

Satz 7.4.2. *Für jedes $f \in C^0(\bar{I})$ besitzt* (7.4.4), (7.4.5) *genau eine schwache Lösung $u \in H^1(I)$, und $u \in C^2(\bar{I})$ löst* (7.4.4), (7.4.5) *klassisch.*

Beweis. i) Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in H^1(I)$ folgt aus Satz 4.3.2. Wie in Beweis von Satz 7.4.1 sieht man, dass $u' \in L^2$ die schwache Ableitung $(u')' = u - f \in L^2$ besitzt; das heisst, $u' \in H^1(I)$, und mit Satz 7.3.1 folgt

$$u'(x) = u'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (u - f)(t)\, dt \in C^1(\bar{I}),$$

da $u \in H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{I})$, $f \in C^0(\bar{I})$. Das heisst, $u \in C^2(\bar{I})$, und u erfüllt (7.4.4) klassisch.

ii) Sei $v \in C^1(\bar{I})$ beliebig. Da u Lösung von (7.4.6), folgt nach partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (u'v' + uv - fv)\, dx \\ &= \int_a^b \underbrace{(-u'' + u - f)}_{=0} v\, dx + u'(b)\ v(b) - u'(a)\ v(a). \end{aligned}$$

Da $v(a)$, bzw. $v(b)$ beliebig sind, folgt $u'(a) = 0 = u'(b)$, also (7.4.5). □

Bemerkung 7.4.2. Somit erhalten wir (7.4.5) als "natürliche Randbedingung" aus (7.4.6) und der Wahl des Raumes der zulässigen Testfunktionen $v \in H^1(I)$.

7.4.3 Varianten des Neumann-Problems

Zu $f \in C^0(\bar{I})$ suche $u \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' = f \quad \text{in } I, \tag{7.4.7}$$

$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.8}$$

Bemerkung 7.4.3. i) Wie Integration von (7.4.7) über I zeigt, ist die Bedingung

$$\int_I f \, dx = 0 \tag{7.4.9}$$

notwendig für die Existenz einer Lösung $u \in C^2(\bar{I})$ von (7.4.7), (7.4.8).

ii) Falls $u \in C^2(\bar{I})$ Lösung ist, so auch jede Funktion $u + c$, $c \in \mathbb{R}$. Wir können daher Ansatzfunktionen u normieren durch die Bedingung

$$0 = \bar{u} = \frac{1}{|I|} \int_I u \, dx = 0.$$

Setze

$$X = \{u \in H^1(I);\ \bar{u} = 0\}.$$

X ist abgeschlossener linearer Unterraum von $H^1(I)$.

Lemma 7.4.1. *Für $u \in X$ gilt $\|u\|_{L^2} \le C \cdot \|u'\|_{L^2}$ mit einer nur von $|I|$ abhängigen Konstanten C.*

Beweis. Für $x, y \in I$ gilt nach Satz 7.3.1

$$|u(x) - u(y)| \le \int_I |u'(t)| \ dt = \|u'\|_{L^1} .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \frac{1}{|I|} \int_I (u(x) - u(y)) \, dy \right| \\ &\le \frac{1}{|I|} \int_I |u(x) - u(x_0)| \ dx_0 \le \frac{1}{|I|} \|u'\|_{L^1} . \end{aligned}$$

Integration über I und die Höldersche Ungleichung liefern die Behauptung. □

Aufgrund von Lemma 7.4.1 ist X ein Hilbert-Raum mit dem zum H^1-Skalarprodukt äquivalenten Skalarprodukt

$$(u, v)_X = \int_I u'v' \, dx, \quad u, v \in X.$$

Definition 7.4.2. $u \in H^1(I)$ *heisst* **schwache Lösung von** (7.4.7)**,** (7.4.8) **der Klasse** H^1*, falls gilt*

$$\forall v \in H^1(I)\colon \int_I u'v' \, dx = \int_I fv \, dx . \tag{7.4.10}$$

Bemerkung 7.4.4. Falls f die notwendige Bedingung (7.4.9) erfüllt, so ist (7.4.10) äquivalent zu

$$\forall v \in X\colon \int_I u'v'\,dx = \int_I fv\,dx\,. \tag{7.4.11}$$

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, folgt

Satz 7.4.3. *Falls f die Bedingung* (7.4.9) *erfüllt, so besitzt* (7.4.7), (7.4.8) *genau eine schwache Lösung $u \in X$, und $u \in C^2(\bar I)$ efüllt* (7.4.7), (7.4.8) *klassisch.*

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit von $u \in X$ mit (7.4.11) folgt aus Satz 4.3.2. Wegen (7.4.9) erfüllt u auch (7.4.10). Regularität von u, etc., folgt wie in Satz 7.4.2. □

Alternativer Ansatz: Für $\varepsilon > 0$ suche $u_\varepsilon \in C^2(\bar I)$ mit

$$-u'' + \varepsilon u = f \quad \text{in } I, \tag{7.4.12}$$

$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.13}$$

Nach Satz 7.4.2 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ genau ein $u_\varepsilon \in C^2(\bar I)$ mit (7.4.12), (7.4.13).

Satz 7.4.4. *Die Bedingung* (7.4.9) *ist notwendig und hinreichend für Konvergenz $u_\varepsilon \to u$ in $C^1(\bar I)$ für $\varepsilon \downarrow 0$, wobei u die Lösung von* (7.4.7), (7.4.8) *ist.*

Beweis. i) Integration von (7.4.12) unter Berücksichtigung von (7.4.13) ergibt

$$\varepsilon\,\bar u_\varepsilon = \varepsilon\,\frac{1}{|I|}\int_I u_\varepsilon\,dx = \frac{1}{|I|}\int_I f\,dx = \bar f. \tag{7.4.14}$$

Falls $\bar f \neq 0$, so folgt

$$|\bar u_\varepsilon| \geq \frac{|\bar f|}{\varepsilon} \to \infty \qquad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Also ist (7.4.9) notwendig für Konvergenz $u_\varepsilon \to u$.

ii) Falls $\bar f = 0$, so folgt mit (7.4.14) die Gleichung $\bar u_\varepsilon = 0$; das heisst, $u_\varepsilon \in X$. Mit Lemma 7.4.1 und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} C^{-1}\,\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|u_\varepsilon'\|_{L^2}^2 &\leq \int_I (|u_\varepsilon'|^2 + \varepsilon u_\varepsilon^2)\,dx \\ &= \int_I (-u_\varepsilon'' + \varepsilon u_\varepsilon)u_\varepsilon\,dx = \int_I f u_\varepsilon\,dx \leq \|f\|_{L^2}\cdot\|u_\varepsilon\|_{L^2}\,; \end{aligned}$$

also $\|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\,\|f\|_{L^2}$ und damit auch $\|u_\varepsilon'\|_{L^2} \leq C\,\|f\|_{L^2}$. Mit Satz 7.3.5 folgt

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C\,\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C\,\|f\|_{L^2}\,.$$

Gleichung (7.4.12) liefert somit

$$\|u_\varepsilon'' - u_\delta''\|_{L^\infty} \leq \varepsilon\,\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} + \delta\,\|u_\delta\|_{L^\infty} \to 0 \quad (\varepsilon,\delta \downarrow 0);$$

also $u_\varepsilon \to u$ in $C^2(\bar I)$, und u löst (7.4.7), (7.4.8). Die Bedingung (7.4.9) ist somit auch hinreichend für die Konvergenz. □

7.5 Der Laplace-Operator auf I

Wir kehren zurčk zum Dirichlet-Problem (7.4.1), (7.4.2). Sei $I =]a,b[$, wobei $-\infty < a < b < \infty$, und sei $A : D_A \subset L^2(I) \to L^2(I)$ mit $Au = -u''$ auf

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{I});\ u(a) = 0 = u(b)\}$$

wie in Abschnitt 7.1. Betrachte $\bar{A}$ mit

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\bar{I});\ \exists (u_k) \subset D_A,\ f \in L^2(I)\colon u_k \overset{k\to\infty}{\to} u,\ Au_k \overset{k\to\infty}{\to} f \text{ in } L^2(I)\}.$$

Lemma 7.5.1. *$D_{\bar{A}} = \{u \in H^2(I);\ u(a) = 0 = u(b)\} = H^2 \cap H_0^1(I)$.*

Für den Beweis benötigen wir die folgende elementare Beobachtung.

Bemerkung 7.5.1. $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I);\ u(a) = 0 = u(b)\}$.

Beweis. "$\supset$": OBdA dürfen wir annehmen, dass $I =]-1,1[$. Sei $u \in H^1(I)$ mit $u(a) = 0 = u(b)$. Setze u fort zu $u \in H^1(\mathbb{R})$ mit $u(x) = 0$ für $|x| \geq 1$.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $u_k(x) = u((1+2/k)x) \in H^1(\mathbb{R})$ mit $supp(u_k) \subset B_{1-1/k}(0)$, $k \geq 2$. Anwendung der Substitutionsregel ergibt $\|u_k\|_{H^1} \to \|u\|_{H^1}$ sowie $u_k \overset{w}{\to} u$ in $H^1(\mathbb{R})$; also $u_k \to u$ in $H^1(\mathbb{R})$ $(k \to \infty)$.

Mit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in Lemma 7.3.3 erhalten wir $v_k = u_k * \rho_k \in C_c^\infty(I)$ mit $v_k \to u$ in $H^1(\mathbb{R})$ $(k \to \infty)$.

"$\subset$": Verfahre wie im Teil ii) des Beweises von Satz 7.4.1. □

Beweis von Lemma 7.5.1. i) Sei $u \in H^2 \cap H_0^1(I)$. Gemäss Satz 7.3.4 gibt es $(v_k) \subset C^\infty(\bar{I})$ mit $v_k \to u$ in $H^2(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$ $(k \to \infty)$. Mit Bemerkung 7.5.1 folgt $v_k(a), v_k(b) \to 0$, also auch

$$v_k^{(0)}(x) = v_k(a) + \frac{x-a}{b-a}(v_k(b) - v_k(a)) \to 0 \text{ in } H^2(I) \quad (k \to \infty).$$

Setze $u_k = v_k - v_k^{(0)}$ mit $u_k(a) = 0 = u_k(b)$, also $u_k \in D_A$, $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $u_k \to u$ in $H^2(I)$. Es folgt $u \in D_{\bar{A}}$, wie gewünscht.

ii) Sei $u \in D_{\bar{A}}$ und dazu $(u_k) \subset D_A$, $f \in L^2(I)$ mit

$$u_k \to u,\ Au_k = -u_k'' \to f \text{ in } L^2(I) \quad (k \to \infty). \tag{7.5.1}$$

Mit Lemma 7.1.2 und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\|u_k - u_l\|_{H^1}^2 &\leq C\,\|(u_k - u_l)'\|_{L^2}^2 = C\int_I |(u_k - u_l)'|^2\,dx \\ &= -\int_I (u_k'' - u_l'')(u_k - u_l)\,dx = o(1)\,\|u_k - u_l\|_{L^2} \leq o(1)\,\|u_k - u_l\|_{H^1}\end{aligned}$$

mit Fehler $o(1) \to 0$ $(k, l \to \infty)$. Da $u_k \in D_A \subset H_0^1(I)$ gemäss Bemerkung 7.5.1, folgt $u_k \to u$ in $H_0^1(I)$, und mit (7.5.1) dann auch $u_k \to u$ in H^2 $(k \to \infty)$. □

Schliesslich können wir nun die Selbstadjungiertheit von $\bar{A}$ beweisen.

Lemma 7.5.2. *Sei $v \in L^2(I)$ und für ein $C \in \mathbb{R}$ gelte*

$$\forall u \in D_{\bar{A}} \colon \ \left|(v, \bar{A}u)_{L^2}\right| \leq C \cdot \|u\|_{L^2} \,. \tag{7.5.2}$$

Dann ist $v \in D_{\bar{A}}$.

Beweis. i) Wir zeigen zunächst, dass $v \in H^2(I)$. Mit (7.5.2) folgt die Existenz von $g = \bar{A}^* v \in L^2(I)$ mit

$$\forall u \in D_{\bar{A}} \colon (v, \bar{A}u)_{L^2} = (g, u)_{L^2}. \tag{7.5.3}$$

Da $C_c^\infty(I) \subset D_A \subset D_{\bar{A}}$ gilt insbesondere

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I) \colon \ -\int_I v\varphi'' \, dx = \int_I g\varphi \, dx. \tag{7.5.4}$$

Setze

$$G(x) = \int_a^x g(t) \, dt \in H^1(I).$$

Mit (7.5.4) und Lemma 7.3.1 folgt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I) \colon \ -\int_I v\varphi'' \, dx + \int_I G\varphi' \, dx = -\int_I v\varphi'' \, dx - \int_I g\varphi \, dx = 0. \tag{7.5.5}$$

Gleichung (7.5.5) lässt erwarten, dass $v' + G = C$ für geeignetes $C \in \mathbb{R}$. Zum Beweis fixiere $\psi \in C_c^\infty(I)$ mit $\int_I \psi \, dx = 1$. Setze

$$C = \int_I (G\psi - v\psi') \, dx$$

und für $w \in C_c^\infty(I)$ weiter

$$\varphi(x) = \int_a^x \Big(w(t) - \psi(t) \int_I w(s) ds \Big) dt \in C_c^\infty(I)$$

analog Lemma 7.3.1, mit

$$\varphi' = w - \psi \int_I w \, dx, \ \ \varphi'' = w' - \psi' \int_I w \, dx.$$

Mit (7.5.5) folgt

$$\begin{aligned}
\int_I (G - C) w \, dx - \int_I v w' \, dx &= \int_I \Big(- v w' + G w - w \int_I (G\psi - v\psi') dt \Big) \, dx \\
&= \int_I \Big(- v \big(w' - \psi' \int_I w \, dt \big) \Big) \, dx + \int_I G (w - \psi \int_I w \, dt) \, dx \\
&= \int_I -v\varphi'' \, dx + \int_I G\varphi' \, dx = 0 \,;
\end{aligned}$$

also $v' = C - G \in H^1(I)$, wie gewünscht, und $v \in H^2(I)$ mit $v'' = -G' = -g$.

ii) Mit (7.5.3) und partieller Integration folgt für $u \in D_A$ die Identität

$$\begin{aligned}
0 = \int_I (v u'' + g u) \, dx &= \int_I \underbrace{(v'' + g)}_{=0} \ u \, dx + (v u')\big|_a^b \\
&= u'(b) v(b) - u'(a) v(a).
\end{aligned}$$

Da $u'(a)$, $u'(b)$ beliebig, folgt $v(a) = 0 = v(b)$; also $v \in D_{\bar{A}}$ gemäss Lemma 7.5.1 $\square$

Kapitel 8

Sobolev-Räume im $\mathbb{R}^n$

8.1 Erste Beispiele

Im Falle $n = 1$ hat jedes $u \in W^{1,p}(I)$ gemäss Satz 7.3.1 einen stetigen Repräsentanten. Für $n \geq 2$ gilt diese Aussage nicht mehr. Zur Konstruktion entsprechender Beispiele ist folgender Begriff nützlich.

Definition 8.1.1. *Ein $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ hat* **verschwindende $W^{1,p}$-Kapazität**, *$cap_{W^{1,p}}(K) = 0$, falls $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $0 \leq \psi_k \leq 1$ und $\psi_k \equiv 1$ in einer Umgebung U_k von K für jedes $k \in \mathbb{N}$, so dass $\psi_k \to 0$ fast überall und $\|\nabla\psi_k\|_{L^p} \to 0$ $(k \to \infty)$.*

Beispiel 8.1.1. Für $n > 1$ und $1 \leq p \leq n$ hat die Menge $K = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ verschwindende $W^{1,p}$-Kapazität.

Beweis. Betrachte die Folge

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/e^{e^{k+1}} = r_k, \\ \log\log(1/|x|) - k, & \text{sonst}, \\ 0, & |x| \geq 1/e^{e^k} = R_k. \end{cases}$$

Wegen

$$|\nabla\psi_k(x)|^n = \begin{cases} |x|^{-n} \ \ |\log|x||^{-n}, & r_k < |x| < R_k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt nach Substitution $s = \log(1/r)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi_k|^n \ dx &\leq C \int_{r_k}^{R_k} \frac{r^{n-1}\ dr}{r^n\,|\log r|^n} = C \int_{\log(1/R_k)}^{\log(1/r_k)} \frac{ds}{s^n} \\ &= \frac{C(n)}{|\log r|^{n-1}}\bigg|_{r_k}^{R_k} \to 0 \ \ (k \to \infty). \end{aligned}$$

Nach Glättung erhalten wir eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung 8.1.1. i) Hat $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ verschwindende $W^{1,p}$-Kapazität, so hat K auch verschwindende $W^{1,s}$-Kapazität für alle $1 \le s \le p$ (Hölder).

ii) Falls K verschwindende $W^{1,p}$-Kapazität hat, so folgt $\mathcal{L}^n(K) = 0$.

Satz 8.1.1. *Sei $K \subset \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $u \in L^q(\Omega) \cap C^1(\Omega \backslash K)$ mit $|\nabla u| \in L^p(\Omega \backslash K)$, wobei $1 \le p \le q \le \infty$, und sei s zu q konjugiert. Falls $cap_{W^{1,s}}(K) = 0$, dann gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit schwacher Ableitung $\nabla u(x)$ fast überall.*

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, und sei $(\psi_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \psi_k \le 1$ und $\psi_k = 1$ in einer Umgebung von K, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge mit $\psi_k \to 0$ fast überall und $\|\nabla \psi_k\|_{L^s} \to 0$ $(k \to \infty)$. Dann gilt $\varphi(1-\psi_k) \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)$, $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\int_\Omega u\varphi \nabla \psi_k \, dx \to 0 \quad (k \to \infty),$$

und mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \nabla \varphi \, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u \nabla(\varphi(1-\psi_k)) \, dx \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla u \varphi (1-\psi_k) \, dx = -\int_\Omega \nabla u \varphi \, dx \, .\end{aligned}$$

Also besitzt u die schwache Ableitung $\nabla u \in L^p$. □

Beispiel 8.1.2. Sei $n > 1$.

i) Betrachte $u(x) = \log|x| \in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n))$ für jedes $q < \infty$; insbesondere $u \in L^{\frac{n}{n-1}}$. Da $K = \{0\}$ nach Beispiel 8.1.1 verschwindende $W^{1,n}$-Kapazität hat, und da

$$\nabla u(x) = \frac{x}{|x|^2} \in L^p(B_1(0;\mathbb{R}^n)), \; p < n,$$

liegt u in $W^{1,p}(B_1(0,\mathbb{R}^n))$ für jedes $p < n$.

ii) Die Funktion

$$u(x) = \log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) \in \bigcap_{1 \le q < \infty} L^q(B_{1/e}(0))$$

mit

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x|\,|\log|x||} \in L^n(B_{1/e}(0))$$

liegt in $W^{1,n}(B_{1/e}(0;\mathbb{R}^n))$.

iii) Für $0 < \alpha < n$ gilt

$$u(x) = \frac{x}{|x|^{n-\alpha}} \in W^{1,p}(B_1(0;\mathbb{R}^n)), \; 1 \le p < \frac{n}{n-\alpha} \, .$$

Beweis. Es gilt $|u| = \frac{1}{|x|^{n-1-\alpha}} \in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n))$ für jedes $q < \frac{n}{n-1-\alpha}$; weiter

$$|\nabla u(x)| \le \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} \in L^p(B_1(0;\mathbb{R}^n)), \; p < \frac{n}{n-\alpha} \, .$$

□

iv) Die Funktion

$$u(x) = \frac{x}{|x|^n} \in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n)),\ q < \frac{n}{n-1},$$

erfüllt $div(u(x)) = 0$ $(x \neq 0)$, aber im Distributionssinne gilt $div(u) = c(n)\delta_{\{x=0\}}$ für ein $c(n) \neq 0$, vgl. Analysis III.

Folge: Die Menge $K = \{0\}$ hat für kein $p > n$ verschwindende $W^{1,p}$-Kapazität.

8.2 Approximation von Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen

Um mit Sobolev-"Funktionen" rechnen zu können, müssen wir diese durch glatte Funktionen approximieren. Ob dies im Allgemeinen möglich ist, war lange Zeit offen, bis diese Frage überraschend durch den folgenden Satz von Meyers-Serrin beantwortet wurde.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Satz 8.2.1. *(Meyers-Serrin (1964)) Für jedes $1 \leq p < \infty$ liegt der Raum $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Für den Beweis hilft die folgende Vorbetrachtung. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$K := supp(u) = \bigcap_{A \text{ abg.};\ u(x)=0 \text{ für fast alle } x \notin A} A \subset\subset \Omega.$$

Sei $\rho \in C_c^\infty(B_1(0))$ ein „mollifier“ wie in Abschnitt 7.3 mit $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$, und für $\varepsilon > 0$ sei

$$0 \leq \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon}) \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0)) \text{ mit } \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon\, dx = 1.$$

Setze $u(x) = 0$ für $x \notin \Omega$. Für $0 < \varepsilon < dist(K, \partial\Omega)$ gilt dann $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u \in C_c^\infty(\Omega)$, und

$$u_\varepsilon \to u, \quad \nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \nabla u \to \nabla u \text{ in } L^p \quad (\varepsilon \to 0)$$

gemäss Lemma 7.3.3.

Für allgemeines $u \in W^{1,p}(\Omega)$ benötigen wir eine Zerlegung der Eins auf Ω.

Definition 8.2.1. *Eine offene Überdeckung $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst* **lokal endlich**, *falls zu jedem $x_0 \in A$ eine Umgebung U existiert mit*

$$\#\{\iota \in I; \Omega_\iota \cap U \neq \emptyset\} < \infty. \tag{8.2.1}$$

Beispiel 8.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\Omega_k = \{x \in \Omega;\ |x| < k,\ dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

sowie $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$, und setze $U_k = \Omega_k \backslash \Omega_{k-2}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ offene Überdeckung von Ω. Für $x \in U_k$ gilt

$$k - 2 < |x| \le k \text{ oder } \frac{1}{k-2} \ge dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k},$$

daher ist $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lokal endlich.

Bemerkung 8.2.1. i) Für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}^n$ können wir (8.2.1) nicht erwarten. Z.B. gilt in Beispiel 8.2.1 für $x_0 \in \partial\Omega$ und eine beliebige Umgebung U_0 von x_0 stets $U_0 \cap U_k \neq \emptyset$ für genügend grosse k.

ii) Nach allgemeinen Sätzen der mengentheoretischen Topologie besitzt eine offene Überdeckung $(\Omega_\iota)_{\iota\in I}$ in einem metrischen Raum stets eine lokal endliche Verfeinerung; vgl. Kelly „General topology", Korollar 5.35, p.160.

Definition 8.2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von Ω. Eine Schar $(\varphi_\iota)_{\iota\in I} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ heisst* **Zerlegung der Eins auf Ω bzgl. $\mathcal{F}$**, *falls*

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\iota \in I\colon 0 \le \varphi_\iota(x) \le 1$;

ii) die Mengen $U_\iota = supp(\varphi_\iota)$, $\iota \in I$, bilden eine lokal endliche Überdeckung von Ω, und für jedes $\iota \in I$ gibt es $U \in \mathcal{F}$ mit $U_\iota \subset U$;

iii) $\forall x \in \Omega\colon \sum_{\iota\in I} \varphi_\iota(x) = 1$.

Beispiel 8.2.2. Sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Überdeckung von Ω in Beispiel 8.2.1. Setze $\psi_k(x) = dist(x, \mathbb{R}^n \backslash U_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen ψ_k Lipschitz mit $supp(\psi_k)^\circ = U_k$, $k \in \mathbb{N}$. Nach Glättung durch Faltung mit einem geeigneten mollifier erhält man $\psi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $supp(\psi_k) \subset V_k := \cup_{|k-l|\le 1} U_l$, $k \in \mathbb{N}$, und mit

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \psi_k(x) > 0, \ x \in \Omega.$$

Da $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lokal endlich, ist ψ wohldefiniert und lokal Lipschitz. Setze $\varphi_k = \frac{\psi_k}{\psi}$.

Beweis von Satz 8.2.1. Überdecke Ω mit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gemäss Beispiel 8.2.1, und wähle eine Zerlegung der Eins $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzgl. $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gemäss Beispiel 8.2.2, wobei $V_k = \cup_{|k-l|\le 1} U_l$, $k \in \mathbb{N}$, mit $0 \le \varphi_k \le 1$, $\varphi_k \in C_c^\infty(V_k)$, $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k = 1$ in Ω.

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zerlege

$$u = \sum_{k=1}^\infty u\varphi_k = \sum_{k=1}^\infty u_k$$

mit $u_k = u\varphi_k \in W^{1,p}(\Omega)$ und $supp(u_k) \subset V_k \subset\subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Fixiere $\delta > 0$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $\varepsilon_k > 0$ mit $\varepsilon_k < dist(V_k, \partial\Omega)$ und

$$\|\rho_{\varepsilon_k} * u_k - u_k\|_{W^{1,p}} < \delta \cdot 2^{-k}.$$

Setze $v_k := \rho_{\varepsilon_k} * u_k \in C_c^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$v := \sum_{k=1}^\infty v_k \in C^\infty(\Omega), \tag{8.2.2}$$

und v erfüllt die Abschätzung

$$\|v-u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\sum_{k=1}^{\infty}(v_k-u_k)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\|v_k-u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 8.2.2. i) Im allgemeinen konvergiert die Darstellung (8.2.2) für v nicht gleichmässig für Punkte in der Nähe des Randes von Ω. Die Darstellung (8.2.2) liefert daher im Allgemeinen keine Funktion $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

ii) In der Tat liegt für manche Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ *nicht* dicht in $W^{1,1}(\Omega)$. Dies gilt sogar im Falle $n = 1$.

Beispiel 8.2.3. i) Sei $S =]-1,0[\cup]0,1[$. Betrachte $u = \chi_{]0,1[}$. Offenbar gilt $u \in W^{1,1}(S)$ mit $u' = 0$. Die Funktion u lässt sich nicht durch Funktionen der Klasse $C^1(\bar{S})$ auf $\bar{S} = [-1,1]$ in $W^{1,1}(S)$ approximieren.

Nimm widerspruchsweise an, es gilt $\|u_k - u\|_{W^{1,1}(S)} \to 0$ $(k \to \infty)$ für eine Folge $(u_k) \subset C^1(\bar{S})$. Gemäss Satz 7.3.5 ist (u_k) Cauchy-Folge in $C^0(\bar{S})$, und $u_k \to u$ gleichmässig auf S $(k \to \infty)$. Somit lässt sich u zu einer stetigen Funktion auf $\bar{S} = [-1,1]$ ergänzen. Der Widerspruch zeigt insbesondere, dass $C^\infty(\bar{S})$ nicht dicht liegt in $W^{1,1}(S)$.

ii) Sei analog $\Omega = (]-1,0] \times S) \cup (]0,1[\times]-1,1[)$. Betrachte

$$u(x,y) = \begin{cases} x, & x < 0 \text{ und } y > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Wiederum lässt sich u nicht durch Funktionen der Klasse $C^1(\bar{\Omega})$ auf $\bar{\Omega} = [-1,1] \times [-1,1]$ im Raum $W^{1,1}(\Omega)$ approximieren.

Falls nämlich für $(u_k) \subset C^1(\bar{\Omega})$ gilt $\|u_k - u\|_{W^{1,1}} \to 0$ $(k \to \infty)$, so folgt mit Fubini

$$\int_{-1}^{1} \|u_k(x,\cdot) - u(x,\cdot)\|_{W^{1,1}(S)}\, dx \le \|u_k - u\|_{W^{1,1}(\bar{\Omega})} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

also

$$\|u_k(x,\cdot) - u(x,\cdot)\|_{W^{1,1}(S)} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

für fast alle x, wobei $u_k(x,\cdot) \in C^1(\bar{S})$. Mit i) erhalten wir wieder einen Widerspruch, und $C^1(\bar{\Omega})$ liegt nicht dicht in $W^{1,1}(\Omega)$.

Im Abschnitt 8.4 werden wir die Frage, für welche Gebiete Ω der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht liegt in $W^{k,p}(\Omega)$ wieder aufgreifen.

8.3 Weitere Eigenschaften von $W^{1,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Satz 8.3.1. *Sei $1 < p \le \infty$, $u \in L^p(\Omega)$. Es sind äquivalent:*

i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$;

ii) $\exists C \ge 0\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\Big| \int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \Big| \le C \, \|\varphi\|_{L^q} \,, \ 1 \le i \le n, \ \text{wobei} \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

iii) $\exists C \ge 0\ \forall \Omega' \subset\subset \Omega\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ |h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$:

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \le C \, |h| \,,$$

wobei $\tau_h u(x) = u(x+h)$, $x \in \Omega'$.

Beweis. *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *i)*: wie in Satz 7.3.2. (Beachte, dass $p > 1$.)

i) $\Rightarrow$ *iii)*: Sei $u \in C^1(\Omega)$, und sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Für $|h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$, $x \in \Omega'$ gilt

$$\tau_h u(x) - u(x) = u(x+h) - u(x) = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th) \, dt.$$

Es folgt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \le |h| \int_0^1 \|\nabla u(\cdot + th)\|_{L^p(\Omega')} \, dt \le |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \,. \tag{8.3.1}$$

Wir müssen nun die Fälle $p < \infty$ und $p = \infty$ unterscheiden.

$p < \infty$: Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k) \subset C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ für $k \to \infty$, und (8.3.1) gilt für jedes u_k. Mit $k \to \infty$ folgt (8.3.1) für u.

$p = \infty$: Zu $\Omega' \subset\subset \Omega$ wähle Ω'' mit $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Da $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega'')$ für jedes $p < \infty$, erhalten wir mit (8.3.1) und der Hölderschen Ungleichung für $|h| < dist(\Omega', \partial\Omega'')$ die Abschätzung

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \le |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega'')} \le |h| \cdot \mathcal{L}^n(\Omega'')^{\frac{1}{p}} \, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \,.$$

Für $p \to \infty$ folgt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^\infty(\Omega')} \le |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^\infty} \,,$$

wie gewünscht. □

Korollar 8.3.1. *Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

i) $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$;

ii) u besitzt einen lokal Lipschitz-stetigen Repräsentanten $\tilde{u} = u$, und es gibt $C \ge 0$, so dass

$$\forall x, y \in \Omega\colon\ |u(x) - u(y)| \le C \cdot dist_\Omega(x, y), \tag{8.3.2}$$

wobei $dist_\Omega(x,y) = \inf\{L(\gamma);\ \gamma \in C^1([0,1], \Omega),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}$.

Bemerkung 8.3.1. Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so gilt $dist_\Omega(x,y) = |x-y|$; das heisst, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ genau dann, wenn u (gleichmässig) Lipschitz stetig ist.

Beweis von Korollar 8.3.1. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Seien $x, y \in \Omega$, dazu $\gamma \in C^1([0,1], \Omega)$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Setze $2\delta = dist(\gamma([0,1]), \partial\Omega) > 0$ und definiere weiter $\Omega' = U_\delta(\gamma([0,1])) \subset\subset \Omega$.

Wähle $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$ mit $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \delta$, $1 \le i \le N$. Für festes $1 \le i \le N$ setze $h = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$. Mit Satz 8.3.1 folgt

$$|u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| = |(\tau_h u - u)(\gamma(t_{i-1}))| \le C\,|h| = C\,|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|\,.$$

Nach Summieren über i erhalten wir

$$\begin{aligned}|u(y) - u(x)| &= \Big|\sum_{i=1}^N u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))\Big| \le \sum_{i=1}^N |u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| \\ &\le C \sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le CL(\gamma).\end{aligned}$$

Mit Übergang zum Infimum bzgl. γ folgt ii).

ii) $\Rightarrow$ *i)*: Sei u lokal Lipschitz mit (8.3.2). Sei $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$. Gemäss ii) gilt für alle $x \in B_r(x_0)$ und $0 < |h| < r$ die Abschätzung

$$|u(x+h) - u(x)| \le C dist_\Omega(x, x+h) = C\,|h|$$

mit der Konstanten C aus (8.3.2), also

$$\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|} \le C.$$

Insbesondere gilt für $1 \le i \le n$ die gleichmässige Abschätzung

$$\forall x \in B_r(x_0),\ 0 < h < r\colon\ \left|\partial_i^h u(x)\right| = \Big|\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}\Big| \le C.$$

Da $L^\infty(B_r(x_0)) \cong (L^1(B_r(x_0)))^*$ und da $L^1(B_r(x_0))$ separabel ist, gibt es nach dem Satz von Banach-Alaoglu, Satz 5.3.1, eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge

$$\partial_i^{h_k} u \overset{w^*}{\to} g_i \quad (k \to \infty),\ 1 \le i \le n,$$

für geeignetes $h_k \downarrow 0$, wobei $g_i \in L^\infty(B_r(x_0))$ mit $\|g_i\|_{L^\infty} \le C$, $1 \le i \le n$.

Behauptung 1. $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Für $0 < h < dist(supp(\varphi), \partial\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i^h u\varphi\,dx &= \int_\Omega \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}\varphi(x)\,dx \\ &\overset{(y=x+he_i)}{=} \int_\Omega u(y)\frac{\varphi(x-he_i) - \varphi(y)}{h}\,dy = \int_\Omega u\,\partial_i^{-h}\varphi\,dx\end{aligned}$$

Mit $h \to 0$ erhalten wir

$$\int_\Omega g_i\varphi\,dx = -\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx;$$

das heisst, g_i ist schwache Ableitung von u in Richtung e_i, $1 \le i \le n$. $\square$

Somit gilt $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\infty(B_r(x_0))$ mit $\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^\infty} \le C$ für jedes $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ mit der von x_0 und $R > 0$ unabhängigen Konstanten C aus (8.3.2); also $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \le i \le n$. □

Als weitere Anwendung von Satz 8.2.1 erhalten wir die Kettenregel.

Satz 8.3.2. *(Kettenregel) Sei $G \in C^1(\mathbb{R})$ mit $G(0) = 0$, $|G'(s)| \le L$, und sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit*

$$\nabla(G \circ u) = (G' \circ u) \cdot \nabla u \in L^p(\Omega).$$

Im Unterschied zum Fall $n = 1$ kann man auf die Annahme $G' \in L^\infty$ nicht verzichten.

Beispiel 8.3.1. Sei $n = 4$. Es gilt $u(x) = |x|^{-\frac{1}{2}} \in W^{1,2}(B_1(0;\mathbb{R}^4))$; jedoch $u^2(x) = |x|^{-1} \notin W^{1,2}$, da $\left|\nabla(u^2)\right| \cong |x|^{-2} \notin L^2(B_1(0;\mathbb{R}^4))$.

Beweis von Satz 8.3.2. Setze $v = G \circ u$. Da $G(0) = 0$, $|G'(s)| \le L$, gilt

$$|v(x)| = \left|G(u(x)) - G(0)\right| \le L\,|u(x)| \in L^p(\Omega);$$

analog erhalten wir für die Funktion $g = (G' \circ u) \cdot \nabla u$ die Abschätzung

$$|g(x)| = |G'(u(x))| \cdot |\nabla u(x)| \le L\,|\nabla u(x)| \in L^p(\Omega).$$

Zwischen v und g gilt die folgende Beziehung.

Behauptung 1. $g = \nabla v$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Wähle $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $supp(\varphi) \subset \Omega'$. Fasse $u|_{\Omega'}$ auf als $u \in W^{1,1}(\Omega')$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1 \cap W^{1,1}(\Omega')$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,1}(\Omega')$. Gemäss der üblichen Kettenregel gilt

$$\int_\Omega G(u_k)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega G'(u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi\,dx,\ 1 \le i \le n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt

$$\Big|\int_\Omega (G(u_k) - G(u))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\Big| \le C\,\|u_k - u\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

da $|G(u_k) - G(u)| \le L\,|u_k - u|$, $|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}| \le C$. Analog folgern wir

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega \big(G'(u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - G'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)\varphi\,dx\Big| \\
&\le \Big|\int_\Omega G'(u_k)\big(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\big)\varphi\,dx\Big| + \Big|\int_\Omega (G'(u_k) - G'(u))\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx\Big| \\
&\le LC\,\|u_k - u\|_{W^{1,1}} + C\int_\Omega |G'(u_k) - G'(u)|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\,dx \to 0 \quad (k \to \infty)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir zur Abschätzung des letzten Integrals Lebesgue's Theorem von der dominierten Konvergenz benutzen. Beachte hierzu, dass $|G'(u_k) - G'(u)| \le 2L$

mit $G'(u_k) \to G'(u)$ fast überall, und dass $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx &= \int_\Omega G(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega G(u_k)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \\ &= -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega G'(u_k)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega G'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega g_i\varphi\,dx.\end{aligned}$$

□

Die Behauptung des Satzes folgt. □

Satz 8.3.3. *(Substitutionsregel) Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen, $H \in C^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus mit $H(\Omega') = \Omega$ und $|dH|$, $\left|dH^{-1}\right| \le C < \infty$, $1 \le p \le \infty$. Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt dann $v := u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$, und*

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = \frac{\partial(u\circ H)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\circ H\Big)\frac{\partial H_j}{\partial y_j} =: g_i,\ 1 \le i \le n.$$

Beweis. i) Sei $p < \infty$. Wir zeigen: $v, g = (g_i)_{1\le i\le n} \in L^p(\Omega')$. Es gilt

$$\int_{\Omega'} |v|^p\,dy = \int_{\Omega'} |u\circ H|^p\,dy = \int_\Omega |u|^p\left|det(dH^{-1})\right|dx \le C\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\,, \quad (8.3.3)$$

wobei wir $x = H(y)$ substituiert und $\left|det(dH^{-1})\right| \le C$ benutzt haben; analog

$$\int_{\Omega'} |g|^p\,dy \le C\int_{\Omega'} |\nabla u\circ H|^p\,dy \le C\,\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\,. \quad (8.3.4)$$

Wähle $(u_k) \subset C^1 \cap W^{1,p}(\Omega)$ gemäss Satz 8.2.1 mit $\|u_k - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$. Mit (8.3.3) und (8.3.4) folgt $v_k = u_k \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\|v_k - v\|_{L^p(\Omega')} + \|\nabla v_k - g\|_{L^p(\Omega')} \le C\,\|u_k - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Mit Satz 7.2.1.i) folgt $v = \lim_{k\to\infty} v_k \in W^{1,p}(\Omega')$ mit $\nabla v = g$.

ii) Sei $p = \infty$. Da $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ genügt es zu zeigen, dass $v \in W^{1,\infty}(\Omega')$. Offenbar gilt $v \in L^\infty(\Omega')$, und für jedes $x \in \Omega'$ und jedes genügend kleine $0 \ne h \in \mathbb{R}^n$ können wir abschätzen

$$\frac{|v(x+h)-v(x)|}{|h|} = \frac{|u(H(x+h)) - u(H(x))|}{|H(x+h)-H(x)|}\frac{|H(x+h)-H(x)|}{|h|} \le C\|\nabla u\|_{L^\infty},$$

wobei wir die Injektivität von H und die Annahme $|dH| \le C$ benutzt haben. Die Behauptung folgt mit Satz 8.3.1. □

8.4 Fortsetzung von $W^{1,p}$-Funktionen, Spursatz

Betrachte zunächst den Zylinder

$$Q = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ |x'| < 1,\ |x_n| < 1\}$$

mit

$$Q_+ = \{x = (x', x_n) \in Q;\ x_n > 0\}$$

und

$$Q_0 = \{x = (x', x_n) \in Q;\ x_n = 0\}.$$

Lemma 8.4.1. *Sei $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Setze*

$$u^*(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann gilt $u^* \in W^{1,p}(Q)$, und $\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}$.

Beweis. Setze $g_i = (\frac{\partial u}{\partial x_i})^*$, $1 \le i \le n-1$, bzw.

$$g_n(x', x_n) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n), & x_n > 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann gilt $u^* \in L^p(Q)$ mit

$$\|u^*\|^p_{L^p(Q)} = 2\,\|u\|^p_{L^p(Q_+)}\,, \quad \text{falls } p < \infty,$$

bzw.

$$\|u^*\|_{L^\infty(Q)} = \|u\|_{L^\infty(Q_+)}\,, \quad \text{falls } p = \infty;$$

das heisst, in jedem Fall

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \le 2\,\|u\|_{L^p(Q_+)}\,.$$

Analog gilt $g_i \in L^p(Q)$ mit

$$\|g_i\|_{L^p(\Omega)} \le 2\,\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^p(Q_+)},\ 1 \le i \le n.$$

Behauptung 1. $g_i = \frac{\partial u^*}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(Q)$. Für $1 \le i \le n-1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx &= \int_{Q_+} u(x', x_n)\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_n)\Big)\,dx \\ &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx, \end{aligned}$$

wobei $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)$, bzw. für $i = n$

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\,dx &= \int_{Q_+} u(x', x_n)\big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', -x_n)\big)\,dx \\ &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \rho}{\partial x_n}\,dx, \end{aligned}$$

wobei $\rho(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$.

Sei $1 \leq i \leq n-1$. Wähle $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(t) = \eta(kt)$. Dann gilt

$$\psi_k = \psi_k(x', x_n) := \eta_k(x_n)\psi \in C_c^\infty(Q_+)$$

und

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_k\, dx,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Beachte

$$\psi_k = \eta_k \psi \to \psi,\ \ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \to \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad \text{fast überall} \quad (k \to \infty).$$

Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\, dx = -\lim_{k\to\infty} \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_k\, dx \\ &= -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\, dx = -\int_Q (\frac{\partial u}{\partial x_i})^* \varphi\, dx = -\int_Q g_i \varphi\, dx.\end{aligned}$$

Sei nun $i = n$. Beachte $\rho(x', 0) = 0$, $\rho \in C^1(\overline{Q_+})$; insbesondere also

$$|\rho(x', x_n)| \leq C\, |x_n|\, . \tag{8.4.1}$$

Setze $\rho_k = \eta_k(x_n)\rho \in C_c^\infty(Q_+)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n}\, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}\rho_k\, dx \overset{(k\to\infty)}{\to} -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}\rho\, dx = -\int_Q g_n \varphi\, dx.$$

Schätze ab

$$\begin{aligned}\Big|\int_{Q_+} u(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} - \frac{\partial \rho}{\partial x_n})\, dx\Big| &\leq \int_{Q_+} |u|\, \Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial t}(x_n)\Big|\, |\rho|\ dx + \Big|\int_{Q_+} u(1-\eta_k)\frac{\partial \rho}{\partial x_n}\, dx\Big| \\ &=: I_k + II_k.\end{aligned}$$

Wegen $\eta_k \to 1$ fast überall folgt $II_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Mit Definition von η_k und (8.4.1) erhalten wir weiter $\left|\frac{\partial \eta_k}{\partial t}\rho\right| \leq C$, und absolute Stetigkeit von $\int |u| dx$ ergibt

$$I_k \leq C \int_{\{x=(x',x_n);\ 0<x_n<\frac{2}{k}\}} |u|\, dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Es folgt

$$-\int_Q g_n \varphi\, dx = \int_{Q_+} u \frac{\partial \rho}{\partial x_n}\, dx = \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, dx.$$

□

Betrachte nun ein beliebiges offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega = \Gamma$.

Definition 8.4.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ist* **von der Klasse** C^k, $k \in \mathbb{N}$, *falls zu jedem* $x_0 \in \partial\Omega$ *eine Umgebung* U *sowie ein Diffeomorphismus* $\Psi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ *auf* $V := \Psi(U)$ *existieren mit*

$$\Psi(x_0) = 0 \ \textit{und}\ \ \Psi(U \cap \Omega) = V \cap \{x = (x_1, ..., x_n);\ x_n > 0\},$$

also auch

$$\Psi(U \cap \partial\Omega) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}).$$

Satz 8.4.1. *Sei Ω von der Klasse C^1 mit kompaktem Rand Γ. Dann gibt es einen stetigen, linearen Fortsetzungsoperator $E\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit*

i) $(Eu)|_\Omega = u$,

ii) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

wobei $C = C(\Omega)$ unabhängig von p ist.

Beweis. Da Ω von der KLasse C^1, Γ kompakt, existieren Umgebungen $U_1, \dots U_L$ mit $\Gamma \subset \bigcup\limits_{l=1}^{L} U_l$ und C^1-Diffeomorphismen $H_l\colon Q \to U_l$ mit

$$H_l(Q_+) = U_l \cap \Omega,\ H_l(Q_0) = U_l \cap \Gamma, \quad 1 \le l \le L.$$

Wähle $U_0 \subset \Omega$ offen mit $dist(U_0, \Gamma) > 0$ und mit $\bar{\Omega} \subset \bigcup\limits_{l=0}^{L} U_l$. Weiter sei $(\varphi_l)_{0\le l\le L}$ eine Zerlegung der Eins auf Ω bzgl. $(U_l)_{0\le l\le L}$ mit

$$0 \le \varphi_l \le 1,\ supp(\varphi_l) \subset U_l,\ 0 \le l \le L,\ \text{und} \ \sum_{l=0}^{L} \varphi_l = 1 \ \text{ in } \Omega.$$

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zerlege $u = \sum\limits_{l=0}^{L} u_l$, wobei $u_l = \varphi_l u$, $0 \le l \le L$.

Behauptung 1. $u_0 = \varphi_0 u \in W^{1,p}(\Omega)$ lässt sich durch

$$v_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

fortsetzen zu $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Offenbar gilt $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und $\|v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Setze

$$g(x) = \begin{cases} (u\nabla\varphi_0 + \varphi_0 \nabla u)(x), & x \in \Omega, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Sei weiter $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Beachte $\varphi_0\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_0 \nabla\varphi\, dx &= \int_\Omega u\varphi_0 \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega u\nabla(\varphi_0\varphi)\, dx - \int_\Omega u\varphi\nabla\varphi_0\, dx \\ &= -\int_\Omega \nabla u(\varphi\varphi_0)\, dx - \int_\Omega u\varphi\nabla\varphi_0\, dx \\ &= -\int_\Omega (\varphi_0\nabla u + u\nabla\varphi_0)\varphi\, dx = -\int_\Omega g\varphi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} g\varphi\, dx; \end{aligned}$$

also $g = \nabla v_0$, und $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Behauptung 2. Für $1 \leq l \leq L$ gibt es $v_l =: Eu_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften i)-iii) des Satzes.

Beweis. Setze

$$v_l(x) = \begin{cases} \big((u_l \circ H_l)^* \circ H_l^{-1}\big)(x), & x \in U_l, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $(u_l \circ H_l)^* \in W^{1,p}(Q)$ wie in Lemma 8.4.1 definiert ist. Nach Satz 8.3.3 gilt $v_l \in W^{1,p}(U_l)$. Da mit $supp(u_l) \subset supp(\varphi_l) \subset\subset U_l$ auch gilt $supp(v_l) \subset\subset U_l$, erhalten wir analog zu Behauptung 1 so eine Fortsetzung $v_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ von u_l. Weiter folgt mit Satz 8.3.3 bei geeigneter Substitution

$$\begin{aligned} \|v_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|(u_l \circ H_l)^* \circ H_l^{-1}\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C\|(u_l \circ H_l)^*\|_{W^{1,p}(Q)} \\ &\leq C\|u_l \circ H_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} \leq C\|u_l\|_{W^{1,p}(U_l \cap \Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

für jedes $1 \leq l \leq L$. □

Mit der Linearität der verwendeten Zerlegung folgt der Satz aus den Behauptungen 1 und 2 . □

Korollar 8.4.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und von der Klasse C^1, $1 \leq p < \infty$. Dann liegt der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ die Fortsetzung von u gemäss Satz 8.4.1. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(v_k) \subset C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $v_k \to v$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Für $u_k = v_k|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ gilt dann $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(k \to \infty)$. □

Die folgende Variante ist für unbeschränkte Gebiete von Interesse.

Korollar 8.4.2. *Sei Ω von der Klasse C^1, $1 \leq p < \infty$. Dann existiert zu jedem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine Folge $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u_k|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$ $(k \to \infty)$.*

Bemerkung 8.4.1. $\partial\Omega$ muss nicht kompakt sein.

Beweis von Korollar 8.4.2. Sei $\delta > 0$ vorgegeben.

Behauptung 1. $\exists \tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $supp(\tilde{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $\|\tilde{u} - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta$.

Beweis. Sei $\eta \in C_c^\infty(B_2(0))$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(x) = \eta(x/k) \in C_c^\infty(B_{2k}(0))$ mit $|\nabla\eta_k| \leq C/k$ und $\eta_k \to 1$ fast überall $(k \to \infty)$. Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\|\eta_k u - u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(1-\eta_k)|^p \; dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Weiter gilt $\nabla(\eta_k \cdot u) = u\nabla\eta_k + \eta_k \nabla u$. Mit

$$\|u\,|\nabla\eta_k|\,\|_{L^p} \leq Ck^{-1}\|u\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

und $\|\eta_k \nabla u - \nabla u\|_{L^p} \to 0$ $(k \to \infty)$ erhalten wir

$$\|\nabla(\eta_k u) - \nabla u\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

also $\eta_k u \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Setze $\tilde{u} = \eta_k u$ für geeignetes $k \geq k_0(\delta)$. □

Da $\Gamma \cap supp(\tilde{u})$ kompakt, liefert das im Beweis von Satz 8.4.1 benutzte Argument eine Fortsetzung $\tilde{v} = E\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(\tilde{v}) \subset\subset \mathbb{R}^n$ und den Eigenschaften i)-iii) aus Satz 8.4.1; insbesonder $\tilde{v}|_\Omega = \tilde{u}$. Glättung durch Faltung liefert eine Schar $\tilde{v}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{v} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ gemäss Lemma 7.3.3. Zum vorgegebenen $\delta > 0$ wähle $\varepsilon > 0$ mit $\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$. Es folgt

$$\|\tilde{v}_\varepsilon|_\Omega - u\|_{W^{1,p}} \leq \|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{v}|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < 2\delta.$$

□

Steigen die Anforderungen an das Gebiet Ω, wenn wir Funktionen in $W^{k,p}(\Omega)$ für ein $k > 1$ durch Funktionen in $C^\infty(\bar{\Omega})$ approximieren wollen?

Satz 8.4.2. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und von der Klasse C^1. Dann liegt der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq p < \infty$.*

Bemerkung 8.4.2. $\Omega \in C^1$ genügt für jedes k.

Beweis von Satz 8.4.2. Überdecke $\partial\Omega$ mit Umgebungen $U_1, ..., U_L$ und wähle $U_0 \subset\subset \Omega$ offen mit $\Omega \subset \bigcup_{l=0}^{L} U_l$ wie im Beweis von Satz 8.4.1.

Sei (φ_l) eine Zerlegung der Eins auf $\bar{\Omega}$ bezüglich (U_l), und sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Zerlege $u = \sum_{l=0}^{L} u_l$ mit $u_l = u\varphi_l \in W^{k,p}(\Omega)$ für jedes l. Wir konstruieren glatte Näherungen für u_l, $0 \leq l \leq L$.

$l = 0$: Da $K_0 := supp(u_0) \subset supp(\varphi_0) \subset U_0 \subset\subset \Omega$, gilt für $\varepsilon < dist(K_0, \partial\Omega)$ die Beziehung

$$v_0^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u_0 \in C_c^\infty(\Omega), \text{ und } \|v_0^\varepsilon - u_0\|_{W^{k,p}} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

analog zum Beweis von Satz 8.2.1.

$l \geq 1$: Es gilt $\bar{\Omega} \supset K_l = supp(u_l) \subset\subset U_l$. OBdA gelte (nach Drehung der Koordinaten und allenfalls Verkleinerung von U_l) für alle $x \in \partial\Omega \cap U_l$ zudem $\nu(x) \cdot e_n \geq \frac{1}{2}$, wobei $\nu(x)$ die äussere Normale an Ω bezeichnet. Für genügend kleines $\varepsilon_l > 0$ und $0 < 3\delta < \varepsilon < \varepsilon_l$ ist dann die Verschiebung

$$T_\varepsilon \colon K_l^\delta \ni x \mapsto x - \varepsilon e_n \in U_l \cap \Omega$$

wohldefiniert, wobei $K_l^\delta = \bigcup_{x \in K_l} B_\delta(x)$. Setze $v_l^\varepsilon = u_l \circ T_\varepsilon$.

Behauptung 1. $\forall\, 0 < 3\delta < \varepsilon < \varepsilon_l \colon v_l^\varepsilon \in W^{k,p}(\Omega_l^\delta)$, wo $\Omega_l^\delta = \bigcup_{x \in U_l \cap \Omega} B_\delta(x)$.

Beweis. Für $|\alpha| \leq k$ schätze ab

$$\|(\partial^\alpha u_l) \circ T_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_l^\delta)} = \int_{\Omega_l^\delta} |\partial^\alpha u_l|^p \circ T_\varepsilon \, dx = \int_{T_\varepsilon(\Omega_l^\delta)} |\partial^\alpha u_l|^p \, dx \leq \|\partial^\alpha u_l\|_{L^p}^p.$$

Weiter gilt für alle $|\alpha| \leq k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_l$ die Beziehung $\partial^\alpha v_l^\varepsilon = (\partial^\alpha u_l) \circ T_\varepsilon \in L^p$. Sei dazu $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_l^\delta)$ beliebig, $|\alpha| \leq k$. Für $0 < 3\delta < \varepsilon < \varepsilon_l$ gilt nach geeigneter

Substitution

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_l^\delta} \big((\partial^\alpha u_l)\circ T_\varepsilon\big)\varphi\, dx &= \int_\Omega \partial^\alpha u_l(\varphi\circ T_\varepsilon^{-1})\, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_l \partial^\alpha(\varphi\circ T_\varepsilon^{-1})\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_l\big((\partial^\alpha\varphi)\circ T_\varepsilon^{-1}\big)\, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \big(u_l\circ T_\varepsilon\big)\partial^\alpha\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega_l^\delta} v_l^\varepsilon \partial^\alpha\varphi\, dx.\end{aligned}$$

□

Behauptung 2. Es gilt $\|v_l^\varepsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} \to 0$ $(\varepsilon\to 0)$.

Beweis. Für $f\in C^0(U_l\cap\bar\Omega)$ gilt $\|f\circ T_\varepsilon - f\|_{L^p(U_l\cap\Omega)}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$. Da jedes $\partial^\alpha u_l$, $|\alpha|\le k$, durch Funktionen $f_{lm}^\alpha \in C^0(U_l\cap\bar\Omega)$, $m\in\mathbb{N}$, in $L^p(U_l\cap\Omega)$ approximiert werden können, folgt mit $\partial^\alpha v_l^\varepsilon = \partial^\alpha u_l\circ T_\varepsilon$ die Behauptung. □

Da v_l^ε in Ω_l^δ definiert ist, können wir glätten. Setze dazu

$$v_l^{\delta,\varepsilon} = \rho_\delta * v_l^\varepsilon \in C^\infty(U_l\cap\Omega).$$

Wie in Lemma 7.3.3 folgt $\|v_l^{\delta,\varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{L^p(U_l\cap\Omega)}\to 0$ $(\delta\to 0)$. Analog erhalten wir für jedes $|\alpha|\le k$ für $\partial^\alpha v_l^{\delta,\varepsilon} = \rho_\delta * \partial^\alpha v_l^\varepsilon$ die Konvergenz

$$\|\partial^\alpha v_l^{\delta,\varepsilon} - \partial^\alpha v_l^\varepsilon\|_{L^p(U_l\cap\Omega)} \to 0 \quad (\delta\to 0);$$

also $\|v_l^{\delta,\varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)}\to 0$ $(\delta\to 0)$.

Zu vorgegebenem $\gamma>0$ gibt es also $0<3\delta<\varepsilon<\varepsilon_l$ mit

$$\|v_l^{\delta,\varepsilon} - u_l\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} \le \|v_l^{\delta,\varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} + \|v_l^\varepsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l\cap\Omega)} < \gamma.$$

□

Wie kann man für $u\in W^{1,p}(\Omega)$ sinnvoll die "Spur" $u|_{\partial\Omega}$ erklären?

Lemma 8.4.2. *Sei $u\in W^{1,p}(Q_+)$, $1\le p\le\infty$. Dann ist $u|_{Q_0}\in L^p(Q_0)$ wohldefiniert, und der „Spuroperator“*

$$W^{1,p}(Q_+)\ni u\mapsto u|_{Q_0}\in L^p(Q_0)$$

ist linear und stetig.

Beweis. i) Sei $u\in C^1(Q)$. Für $x'\in Q_0$ gilt

$$u(x',0) = u(x',x_n) - \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',s)\, ds.$$

Nach Mittelung bzgl. x_n erhalten wir die Abschätzung

$$|u(x',0)| \le \int_0^1 |u(x',x_n)|\, dx_n + \int_0^1 |\nabla u(x',s)|\, ds.$$

Für $1\le p<\infty$ folgt mit der Minkowski- und der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|u(x',0)\|_{L^p(Q_0)} &\le \int_0^1 \|u(\cdot,x_n)\|_{L^p(Q_0)}\, dx_n + \int_0^1 \|\nabla u(\cdot,x_n)\|_{L^p(Q_0)}\, dx_n \\ &\le \|u\|_{L^p(Q_+)} + \|\nabla u\|_{L^p(Q_+)} = \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.\end{aligned}$$

ii) Sei $u \in W^{1,p}(Q)$, $1 \le p < \infty$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k) \subset W^{1,p} \cap C^1(Q)$ mit $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0$ $(k \to \infty)$. Mit i) folgt

$$\|u_k|_{Q_0} - u_l|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \le \|u_k - u_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} \to 0 \quad (k, l \to \infty).$$

Da $L^p(Q_0)$ vollständig ist, existiert $u|_{Q_0} := \lim_{k\to\infty} u_k|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$, und

$$\|u|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \le \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{W^{1,p}(Q_+)} = \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

iii) Sei $u \in W^{1,p}(Q_+)$, $1 \le p < \infty$. Betrachte $u^* \in W^{1,p}(Q)$ gemäss Lemma 8.4.1 und benutze ii)!

iv) Sei $u \in W^{1,\infty}(Q_+)$. Da $Q_+ \subset\subset \mathbb{R}^n$, gilt $u \in W^{1,p}(Q_+)$ für jedes $p < \infty$, und

$$\|u|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \le \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)} \le \mathcal{L}^n(Q_+)^{1/p}\|u\|_{W^{1,\infty}(Q_+)}.$$

Mit $p \to \infty$ folgt die Behauptung.

□

Für ein Ω der Klasse C^1 mit kompaktem Rand $\partial\Omega = \Gamma$ kann man den "Spurraum" $L^p(\Gamma)$ mittels lokaler "Karten" $H\colon Q \to \mathbb{R}^n$ mit $H(Q_+) = \Omega \cap U$, $H(Q_0) = \Gamma \cap U$ erklären. Die durch verschiedene Überdeckungen von Γ definierten Normen auf $L^p(\Gamma)$ sind äquivalent.

Satz 8.4.3. (Spursatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, von der Klasse C^1, und sei der Rand $\partial\Omega = \Gamma$ kompakt. Dann ist der Spuroperator*

$$W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto u|_\Gamma \in L^p(\Gamma)$$

für alle $1 \le p \le \infty$ wohldefiniert und stetig; das heisst, es gilt

$$\|u|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Beweis. Übung □

Bemerkung 8.4.3. i) Der Spuroperator ist nicht surjektiv. (Für $p = \infty$ ist dies offensichtlich.) Daher "definiert" man für $1 \le p \le \infty$ als Spurraum

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = \{u|_\Gamma; u \in W^{1,p}(\Omega)\}$$

mit der Norm

$$\|u|_\Gamma\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} = \inf_{v\in W^{1,p}(\Omega);\ u-v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Die Räume $W^{s,p}$ mit $s \notin \mathbb{Z}$ lassen sich jedoch auch intrinsisch definieren.

ii) Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasee C^1, $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u = \lim_{k\to\infty} u_k$ für geeignete $(u_k) \subset C_c^\infty(\Omega)$ gilt $u|_\Gamma = \lim_{k\to\infty} u_k|_\Gamma = 0$ in $L^2(\Gamma)$; das heisst, die schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Dirichlet Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

erfüllt die Randbedingung $u = 0$ fast überall.

Betrachte nun auch Randdaten $u_0|_\Gamma$, wobei $u_0 \in H^1(\Omega)$.

Satz 8.4.4. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Dann gilt*

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \{u_0 \in H^1(\Omega);\ \Delta u_0 = 0\}, \tag{8.4.2}$$

und für $u = u_0 + u_1 \in H^1(\Omega)$ mit $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta u_0 = 0$ gilt

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 . \tag{8.4.3}$$

Zu jedem $u \in H^1(\Omega)$ gibt es also eine eindeutige harmonische Fortsetzung u_0 von $u|_\Gamma$, und u_0 hat minimale Dirichlet-Energie

$$E(u_0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2\ dx = \min_{v \in H^1(\Omega),\ u-v \in H_0^1(\Omega)} E(v).$$

Beweis. Zu $u \in H^1(\Omega)$ sei $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Problems

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi\ dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\ dx, \tag{8.4.4}$$

gemäss Riesz, Satz 4.3.2, wobei wir beachten, dass $\nabla u \in L^2$. Setze $u_0 = u - u_1$. Dann gilt wegen (8.4.4) für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_\Omega (-\Delta u_0)\varphi\ dx = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi\ dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\ dx - \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi\ dx = 0,$$

wobei wir Δu_0 als Distributionsableitung deuten; das heisst, $\Delta u_0 = 0$, und (8.4.2) ist bewiesen. Weiter erhalten wir

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla (u_0 + u_1)\|_{L^2}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + 2 \int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1\ dx.$$

Da $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, existiert $(\varphi_k) \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_k \to u_1$ in $H^1(\Omega)$, und

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1\ dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi_k\ dx = 0,$$

was (8.4.3) zeigt. Falls $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$, so ergibt die Darstellung $u = u_0 + u_1$ mit $u_0 = u_1 = u/2$ zusammen mit (8.4.3) sofort $u = 0$; die Zerlegung (8.4.2) von $H^1(\Omega)$ ist also direkt. □

Korollar 8.4.3. *Es gilt $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ u|_\Gamma = 0\}$, wobei die Spur $u|_\Gamma$ gemäss Satz 8.4.3 erklärt ist.*

Beweis. "$\subset$" folgt mit Bemerkung 8.4.3.ii). Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $u|_\Gamma = 0$. Dann ist $u_0 = 0$ schwache Lösung des Dirichlet Problems $\Delta u_0 = 0$ in Ω, $u_0|_\Gamma = 0$; also gemäss Satz 8.4.4 $u = u_1 \in H_0^1(\Omega)$. □

8.5 Sobolev-Einbettung, $p < n$

Betrachte zunächst $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Satz 8.5.1. (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *Sei $1 \le p < n$ und sei der "Sobolev-Exponent" $p^* > p$ gegeben durch $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$; das heisst, $p^* = \frac{np}{n-p}$. Dann gilt $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, und*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, wo $C = C(n,p) = \frac{(n-1)p}{n-p}$.

Bemerkung 8.5.1. Bei Skalierung $u \mapsto u_R(x) = u(Rx)$ gilt

$$\|\nabla u_R\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^p \, dx = R^{p-n} \|\nabla u\|_{L^p}^p,$$
$$\|u_R\|_{L^q}^q = R^{-n} \|u\|_{L^q}^q.$$

Falls es eine Beziehung $\|u\|_{L^q} \le C\|\nabla u\|_{L^p}$ gibt, so gilt

$$R^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q} = \|u_R\|_{L^q} \le C\|\nabla u_R\|_{L^p} = CR^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p},$$

für alle $R > 0$, also

$$\forall R > 0\colon\, R^{(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - 1)} \le C(n);$$

das heisst, $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q}$. Die Zahl p^* ist somit der einzig mögliche Exponent.

Beweis von Satz 8.5.1. i) Betrachte zunächst $p = 1$ und $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für festes $i \in \{1, \dots, n\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ schätze ab

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= |u(x_1, \dots, x_n) - \lim_{s \to -\infty} u(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)| \\
&= \Big| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) \, ds \Big| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)| \, ds =: f_i(x_i'),
\end{aligned}$$

wobei $x_i' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $1 \le i \le n$. Es folgt

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}} \tag{8.5.1}$$

mit $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(x_i') \, dx_i' = \|\nabla u\|_{L^1}$, $1 \le i \le n$.

Behauptung 1. Es gilt $\prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\Big\| \prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}} \Big\|_{L^1} \le \prod_{i=1}^n \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_i(y)) \, dy \Big)^{\frac{1}{n-1}} = \|\nabla u\|_{L^1}^{\frac{n}{n-1}}.$$

Beweis. (Induktion nach n)
$n = 2$: Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{i=1}^2 f_i(x_i') \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2) f_2(x_1) \, dx_1 \, dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2) \, dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1) \, dx_1 = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 .
\end{aligned}$$

$n \to n+1$: Da $\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$, folgt für festes x_{n+1} mit Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n+1} \big(f_i(x_i')\big)^{\frac{1}{n}}\, dx \le \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}}\, dx\Big)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$\le \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(y, x_{n+1})\, dy\Big)^{\frac{1}{n}},$$

wobei wir im zweiten Schritt die Indunktionsvoraussetzung benutzen. Da weiter $1 = n \cdot 1/n$, folgt erneut mit Hölder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(y, x_{n+1})\, dy\Big)^{\frac{1}{n}}\, dx_{n+1} \le \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}};$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \big(f_i(x_i')\big)^{\frac{1}{n}}\, dx \le \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})}^{\frac{n+1}{n}},$$

wie gewünscht. □

Mit Behauptung 1 und (8.5.1) folgt für alle $n \ge 2$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{8.5.2}$$

ii) Sei nun $1 < p < n$, und sei zunächst weiter $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Betrachte $v = u^t$ für ein noch zu bestimmendes $t \ge 1$. Sei $q = \frac{p}{p-1}$ zu p konjugiert. Mit (8.5.2) folgt mit Hölder

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^t \le \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= t\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u||u|^{t-1}\, dx \le t\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{(t-1)q}(\mathbb{R}^n)}^{t-1}. \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

Wähle t so, dass

$$\frac{tn}{n-1} = (t-1)q = \frac{(t-1)p}{p-1};$$

das heisst,

$$t\Big(\frac{n}{n-1} - \frac{p}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1} = 0$$

oder

$$t = \frac{p(n-1)}{p(n-1) - n(p-1)} = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

Somit erhalten wir den Sobolev Exponenten

$$\frac{tn}{n-1} = \frac{pn}{n-p} = p^*,$$

und Abschätzung (8.5.3) ergibt

$$\|u\|_{L^{p^*}} \le t\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{p(n-1)}{n-p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

iii) Schliesslich sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - u_k\|_{W^{1,p}} \to 0$ $(k \to \infty)$. Mit (8.5.2), bzw. (8.5.3) folgt

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \ (k, l \to \infty),$$

also $u_k \to u$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ $(k \to \infty)$, und $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. □

Bemerkung 8.5.2. i) Für $p = 1$ gibt es eine enge Beziehung zwischen Satz 8.5.1 und der isoperimetrischen Ungleichung

$$(\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \tag{8.5.4}$$

für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ der Klasse C^1.

Sei $0 \leq u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit nur endlich vielen kritischen Punkten in $supp(u)$. Nach lokaler Substitution $\Phi(x', x_n) = (x', u(x))$ (in geeigneten Koordinaten, so dass $\frac{\partial u}{\partial x_n} \neq 0$) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \ dx = \int_0^\infty \Big(\int_{\{x;\ u(x)=t\}} d\mathcal{H}^{n-1}\Big) \ dt = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t)) \ dt, \tag{8.5.5}$$

wobei $\Omega(t) = \{x; u(x) > t\}$, $t \geq 0$. Mit der Darstellung

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{\Omega(t)}(x) \ dt,$$

und mit der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} &\leq \int_0^\infty \|\chi_{\Omega(t)}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} dt = \int_0^\infty \big(\mathcal{L}^1(\Omega(t))\big)^{\frac{n-1}{n}} dt \\ &\overset{(8.5.4)}{\leq} C(n) \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t)) \ dt \overset{(8.5.5)}{\leq} C(n)\|\nabla u\|_{L^1}.\end{aligned}$$

ii) Der Grenzfall $p = n$: Nach Beispiel 8.1.2.ii) gilt

$$\log\log(\frac{1}{|x|}) \in W^{1,n}(B_{1/e}(0)), \ n \geq 2;$$

das heisst, $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Bemerkung 8.5.1 zeigt, dass andererseits auch keine Ungleichung der Art

$$\|u\|_{L^q} \leq C \ \|\nabla u\|_{L^n}$$

für ein $q < \infty$ bestehen kann.

Satz 8.5.2. *Es gilt $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ für $n \leq p < \infty$, und*

$$\forall u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \colon \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}, \quad .$$

Beweis. Sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Mit (8.5.3) und Hölder folgt

$$\|u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}} \leq t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u||u|^{t-1} \ dx \leq t\|\nabla u\|_{L^n} \|u\|^{t-1}_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}}.$$

Bei Wahl von $t = n$ erhalten wir aus der Youngschen Ungleichung

$$\|u\|^n_{L^{\frac{n^2}{n-1}}} \le n\|\nabla u\|_{L^n}\|u\|^{n-1}_{L^n} \le \|\nabla u\|^n_{L^n} + (n-1)\|u\|^n_{L^n} \le C\|u\|^n_{W^{1,n}}.$$

Iteration mit $t = n+1,\ n+2, \ldots$ ergibt $\|u\|_{L^{p_k}} \le C_k \|u\|_{W^{1,n}}$ für eine Folge von Exponenten $p_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die Behauptung für jedes $q \ge n$. □

Wir betrachten nun auch Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 8.5.3. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $1 \le p < n$ mit Sobolev-Exponent p^*, wo $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Dann gilt $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für jedes $1 \le q \le p^*$, und die Einbettung ist kompakt für $q < p^*$.*

Bemerkung 8.5.3. Wegen Skalierungsinvarianz entsprechend Bemerkung 8.5.1 können wir für $q = p^*$ keine Kompaktheit erwarten. Sei z.B. $\Omega = B_1(0)$, $u \in C^\infty_c(B_1(0))$, und für $R \ge 1$ betrachte $u_R(x) = R^{\frac{n-p}{p}} u(Rx) \in C^\infty_c(B_{1/R}(0))$ mit $\|\nabla u_R\|_{L^p} = \|\nabla u\|_{L^p}$, $\|u_R\|_{L^{p^*}} = \|u\|_{L^{p^*}}$ und mit

$$u_R \overset{w}{\to} 0 \text{ in } W^{1,p}(B_1(0)) \quad (R \to \infty).$$

Beweis von Satz 8.5.3. i) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nach Satz 8.4.1 gibt es $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $v|_\Omega = u$, und mit Satz 8.5.1 folgt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, folgt $u \in L^q(\Omega)$, $1 \le q \le p^*$ und

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C(n,p,q,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

ii) Sei $\mathcal{F} \subset W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. Zu $u \in \mathcal{F}$ betrachte $v = Eu$ aus Satz 8.4.1. Nach Satz 8.3.1 gilt für $|h| \le 1$ die Abschätzung

$$\sup_{v=Eu,\ u\in\mathcal{F}} \|\tau_h v - v\|_{L^p(\Omega)} \le C|h| \sup_{v=Eu,\ u\in\mathcal{F}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C|h| \sup_{u\in\mathcal{F}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

wobei $\tau_h v = v(\cdot + h)$. Mit dem Satz von Fréchet-Kolmogorov, Satz 6.3.2, folgt relative Kompaktheit von $\mathcal{F}$ in $L^p(\Omega)$.

Sei nun $1 \le q < p^*$ beliebig, $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. OBdA gelte $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$. Da Ω beschränkt, können wir für $q \le p$ mit Hölder abschätzen

$$\|u_k - u\|_{L^q} \le C\,\|u_k - u\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Für $p < q < p^*$ wähle $0 < \alpha < 1$ mit $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$ und schätze ab

$$\|u_k - u\|_{L^q} \le \|u_k - u\|^\alpha_{L^p}\|u_k - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□

Korollar 8.5.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Dann gilt $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \le q < \infty$, und die Einbettung ist kompakt für jedes q.*

Beweis. Es gilt $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ für jedes $p < n$. □

8.6 Sobolev-Einbettung, $p > n$

8.6.1 Hölder-Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $0 < \alpha \le 1$.

Definition 8.6.1. *u ist* **Hölder stetig** *mit Exponent α, falls*

$$\forall x, y \in \Omega\colon\ |u(x) - u(y)| \le C\,|x-y|^{\alpha}.$$

Der Ausdruck

$$[u]_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

heisst Hölder (Halb-)Norm. Setze

$$C^{0,\alpha}(\bar\Omega) := \{u \in C^0(\bar\Omega);\ u \text{ ist Hölder stetig mit Exponent } \alpha\}.$$

Bemerkung 8.6.1. Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, so ist

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}}$$

eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

Beispiel 8.6.1. i) $u \in C^{0,1}(\bar\Omega)$, genau dann, wenn u Lipschitz stetig ist.

ii) Sei $\Omega =]0,1[$; dann ist $u(x) = x^{\alpha} \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

iii) Für $0 \le \beta \le \alpha \le 1$ gilt $C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar\Omega)$, wo $C^{0,0}(\bar\Omega) = C^0(\bar\Omega)$.

Satz 8.6.1. *$C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ ist vollständig,* $0 < \alpha \le 1$.

Beweis. Sei $(u_k) \subset C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Dann ist (u_k) auch Cauchy-Folge in $C^0(\bar\Omega)$, und es existiert $u \in C^0(\bar\Omega)$ mit

$$\|u_k - u\|_{C^0} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Behauptung 1. $u \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

Beweis. Für $x \ne y \in \Omega$ schätze ab

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{k\to\infty} |u_k(x) - u_k(y)| \le \sup_k [u_k]_{C^{0,\alpha}} |x-y|^{\alpha} \le C\,|x-y|^{\alpha}.$$

□

Behauptung 2. $u_k \to u$ $(k \to \infty)$ in $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

Beweis. Für $x \ne y \in \Omega$ schätze ab

$$\begin{aligned}\frac{|(u_k-u)(x) - (u_k-u)(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &= \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_k-u_l)(x) - (u_k-u_l)(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\ &\le \overline{\lim_{l\to\infty}} [u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}} \to 0 \quad (k\to\infty)\end{aligned}$$

gleichmässig bzgl. $x, y \in \Omega$. Nach Übergang zum Supremum bzgl. $x \neq y \in \Omega$ folgt die Behauptung. □

Somit konvergiert (u_k) in $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, wie gewünscht. □

Satz 8.6.2. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann ist für $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ die Einbettung*

$$C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar\Omega)$$

kompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{F} \subset C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ beschränkt. Dann ist $\mathcal{F}$ auch beschränkt in $C^0(\bar\Omega)$. Da für $x \neq y$ und beliebiges $u \in \mathcal{F}$ gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{v \in \mathcal{F}} [v]_{C^{0,\alpha}} |x - y|^\alpha ,$$

ist $\mathcal{F}$ zudem gleichgradig stetig und daher gemäss dem Satz von Arzéla-Ascoli, Satz 6.3.1, relativ kompakt in $C^0(\bar\Omega)$. Fixiere nun $\beta < \alpha$.

Behauptung 1. $\mathcal{F}$ ist relativ kompakt in $C^{0,\beta}(\bar\Omega)$.

Beweis. Sei $(u_k) \subset \mathcal{F}$. OBdA $u_k \to u$ in $C^0(\bar\Omega)$ $(k \to \infty)$. Zu $\delta > 0$ wähle $k_0 = k_0(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall k, l \geq k_0\colon\ \|u_k - u_l\|_{C^0} < \delta^\alpha.$$

Für $x \neq y \in \Omega$ mit $|x - y| \geq \delta$ und $k, l \geq k_0(\delta)$ schätze ab

$$\frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\beta} \leq 2 \|u_k - u_l\|_{C^0} \delta^{-\beta} \leq 2\delta^{\alpha-\beta};$$

falls $|x - y| < \delta$ schätzen wir analog ab

$$\frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\beta} \leq 2[u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}} |x - y|^{\alpha-\beta} \leq C\delta^{\alpha-\beta}.$$

Es folgt

$$[u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\beta} \leq C\delta^{\alpha-\beta}.$$

Mit $\delta \to 0$ sehen wir, dass (u_k) eine Cauchy-Folge in $C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ ist. Da $C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ nach Satz 8.6.1 vollständig ist, folgt $u \in C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ und

$$[u_k - u]_{C^{0,\beta}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□

Die Aussage des Satzes folgt. □

Bemerkung 8.6.2. Im Unterschied zum Fall $\alpha = 0$ liegt fü $0 < \alpha \leq 1$ der Raum $C^\infty(\bar\Omega)$ nicht dicht in $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

Beweis. Betrachte z.B. $\Omega =]0, 1[$, $u(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Nimm an, es existiere $(u_k) \subset C^1([0, 1])$ mit $\|u_k - u\|_{C^{0,\alpha}} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Beachte, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $0 < x < 1$ gilt

$$|u_k(x) - u_k(0)| \leq \|u_k'\|_{L^\infty} |x| =: C_k |x| .$$

Es folgt

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \frac{|u_k(x) - u_k(0)|}{|x|^\alpha} \leq C_k |x|^{1-\alpha} \to 0 \quad (x \downarrow 0)$$

und damit

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}\colon [u_k - u]_{C^{0,\alpha}} &\geq \limsup_{x\downarrow 0} \frac{|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(0)|}{|x|^\alpha} \\ &= \sup_{x\downarrow 0} \Big| \frac{u_k(x) - u_k(0)}{|x|^\alpha} - 1 \Big| = 1,\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Wir können nun den Sobolev-Einbettungssatz auf $\mathbb{R}^n$ formulieren.

Satz 8.6.3. *Sei $p > n$. Dann gilt $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, und mit einer von u unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt*

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\colon \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Zum Beweis benützen wir eine äquivalente Integral-Norm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

8.6.2 Morrey-Companato Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ setze

$$\Omega_r(x_0) = B_r(x_0) \cap \Omega.$$

Definition 8.6.2. Ω *heisst* **vom Typ** A *für ein $A > 0$, falls für alle $x_0 \in \Omega$, $0 < r < \min\{1, diam(\Omega)\} =: r_0(\Omega)$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0)) \geq A r^n.$$

Beispiel 8.6.2. Jedes $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 ist vom Typ A. Für Ω vom Typ A, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r < r_0(\Omega)$ setze

$$u_{x_0,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} u \, dx =: \fint_{\Omega_r(x_0)} u \, dx.$$

Definition 8.6.3. *Für $1 \leq p < \infty$, $\lambda > 0$ setze*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} < \infty\},$$

wobei

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x_0 \in \Omega,\ 0<r<r_0} \Big(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Satz 8.6.4. *$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ ist vollständig bzgl. der Norm*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \|u\|_{L^p} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 8.6.5. (Campanato) *Sei Ω von Typ A für ein $A > 0$, und seien $\lambda > n$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$. Dann gilt $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, und*

$$\forall u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)\colon \ \|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Satz 8.6.3 lässt sich auf Satz 8.6.5 zurückführen mit der folgenden Variante der Poincaré-Ungleichung.

Satz 8.6.6. (Poincaré) *Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$*

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx \leq C r^p \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \ dx.$$

Beweis von Satz 8.6.3. Mit Satz 8.6.6 und Satz 8.6.5 folgt

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p,p}(R^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\alpha = \frac{p-n}{p} = 1 - \frac{n}{p}$. □

Beweis von Satz 8.6.6. Sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. OBdA $x_0 = 0$, $B_r(0) = B_r$. Schätze ab mit Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx &= \int_{B_r} \Big| \fint_{B_r} (u(x) - u(y)) \, dy \Big|^p dx \\
&= C r^{-np} \int_{B_r} \Big| \int_{B_r} 1 \cdot (u(x) - u(y)) \, dy \Big|^p dx \\
&\leq C r^{-np + n(p-1)} \int_{B_r} \int_{B_r} |u(x) - u(y)|^p \, dy \, dx.
\end{aligned}$$

Da $np - n(p-1) = n$, folgt für $x, y \in B_r$ mit

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &= \Big| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(y - x)) \, dt \Big| \\
&\leq |x - y| \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)| \, dt \leq 2r \Big(\int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p \, dt \Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\int_{B_r} |u(x) - u_{x_0,r}|^p \, dx \leq C r^{p-n} \int_{B_r} \int_{B_r} \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p dt \, dx \, dy.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie in $x, y \in B_r$ erhalten wir mit Fubini und bei Substitution von $z = ty + (1-t)x \in B_{(1-t)r}(ty) \subset B_r$ bei festem $y \in B_r$ somit

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |u(x) - u_{x_0,r}|^p \,dx &\le Cr^{p-n} \int_0^{1/2} \int_{B_r} \int_{B_r} |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p \,dx\,dy\,dt \\ &\le Cr^{p-n} \int_0^{1/2} \int_{B_r} \int_{B_{(1-t)r}(ty)} |\nabla u(z)|^p \,dz\,dy\,dt \\ &= Cr^p \int_{B_r} |\nabla u(z)|^p \,dz,\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Beweis von Satz 8.6.5. Sei $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ für ein $\lambda > n$, $1 \le p < \infty$.

i) Wir konstruieren zunächst einen geeigneten Repräsentanten. Sei $x_0 \in \Omega$, $0 < r < r_0(\Omega) = \min\{1, diam(\Omega)\}$. Für $i \in \mathbb{N}$ setze $r_i = 2^{-i}r$ und betrachte $(u_{x_0,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Behauptung 1. $(u_{x_0,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis. Da Ω vom Typ A, gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|u_{x_0,r_{i+1}} - u_{x_0,r_i}\right| \le \fint_{\Omega_{r_{i+1}}(x_0)} \left|u(x) - u_{x_0,r_i}\right| \,dx \\ &\le Cr_{i+1}^{-n} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} \left|u(x) - u_{x_0,r_i}\right| \,dx \le C \fint_{\Omega_{r_i}(x_0)} \left|u(x) - u_{x_0,r_i}\right| \,dx.\end{aligned} \tag{8.6.1}$$

Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\fint_{\Omega_{r_i}(x_0)} \left|u(x) - u_{x_0,r_i}\right| \,dx \le \Big(\fint_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}|^p \,dx\Big)^{1/p}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\left|u_{x_0,r_{i+1}} - u_{x_0,r_i}\right| &\le C\Big(\fint_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}|^p \,dx\Big)^{1/p} \\ &\le Cr_i^{\frac{\lambda-n}{p}} \Big(r_i^{-\lambda} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u - u_{x_0,r_i}|^p \,dx\Big)^{1/p} \le Cr_i^{\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}\end{aligned} \tag{8.6.2}$$

mit einer nur von der Zahl A abhängigen Konstanten $C \ge 0$, und

$$\begin{aligned}\left|u_{x_0,r_{i+k}} - u_{x_0,r_i}\right| &\le \sum_{j=1}^{k} \left|u_{x_0,r_{i+j}} - u_{x_0,r_{i+j-1}}\right| \le C \sum_{j=1}^{k} r_{i+j}^{\alpha}\, [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \\ &\le Cr_i^{\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \to 0 \qquad (i \to \infty, k = k_i \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

□

Für alle $x_0 \in \Omega$ existiert somit $\bar{u}(x_0) = \lim_{i\to\infty} u_{x_0,r_i}$, und

$$\forall i \in \mathbb{N}\colon\ |\bar{u}(x_0) - u_{x_0,r_i}| = \lim_{k\to\infty} \left|u_{x_0,r_{i+k}} - u_{x_0,r_i}\right| \le Cr_i^{\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}. \tag{8.6.3}$$

Wegen Absolutstetigkeit des Integrals ist für festes $r > 0$ die Funktion $x_0 \mapsto u_{x_0,r}$ stetig. Gemäss (8.6.3) konvergiert $(u_{x_0,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen $\bar{u}$; also ist auch $\bar{u}$ stetig. Schliesslich gilt mit dem Differentiationssatz von Lebesgue

$$\bar{u}(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} u\, dx = u(x_0)$$

fast überall. Das heisst, $\bar{u}$ ist Repräsentant von u, und wir dürfen oBdA annehmen, $\bar{u} \equiv u$ überall.

ii) Wir zeigen nun $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ und $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \le C\,\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}$. Zunächst folgt mit (8.6.3) bei Wahl von $r = r_0$ die gleichmässige Abschätzung

$$\begin{aligned}\sup_{x_0} |u(x_0)| &\le \sup_{x_0} |u_{x_0,r}| + \sup_{x_0} |u(x_0) - u_{x_0,r}| \\ &\le C\,\|u\|_{L^p} + C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \le C\,\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}\,.\end{aligned}$$

Behauptung 2. $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, und für $x_0 \ne y_0 \in \Omega$ mit $0 < |x_0 - y_0| = r \le \frac{r_0}{2}$ gilt

$$|u(x_0) - u(y_0)| \le Cr^{\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Beweis. Mit (8.6.3) schätzen wir ab

$$\begin{aligned}|u(x_0) - u(y_0)| &\le |u(x_0) - u_{x_0,2r}| + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| + |u_{y_0,r} - u(y_0)| \\ &\le Cr^{\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}|\,.\end{aligned}$$

Weiter folgt wie in (8.6.1), (8.6.2) mit $\Omega_r(y_0) \subset \Omega_{2r}(x_0)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}|u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| &\le \fint_{\Omega_r(y_0)} |u - u_{x_0,2r}|\, dx \le C \fint_{\Omega_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}|\, dx \\ &\le C\Big(\fint_{\Omega_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}|^p\, dx\Big)^{1/p} \le Cr^{\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.\end{aligned} \tag{8.6.4}$$

□

Der Behauptung 2 entnehmen wir insbesondere auch die Abschätzung

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \le C\,[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}},$$

wie gewünscht. □

Satz 8.6.7. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ vom Typ A für ein $A > 0$, und seien $1 \le p < \infty$, $\lambda > n$, $\alpha = \frac{\lambda - n}{p} \le 1$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \cong C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Beweis. i) $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ folgt mit Satz 8.6.5.

ii) Da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, gilt $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Weiter gilt für $x_0 \in \Omega$, $0 < r \le r_0$ und $x, y \in \Omega_r(x_0)$ stets $|u(x) - u(y)| \le Cr^{\alpha}[u]_{C^{0,\alpha}}$, also auch

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p\, dx \le \int_{\Omega_r(x_0)} \fint_{\Omega_r(x_0)} |u(x) - u(y)|^p\, dy\, dx \le Cr^{\alpha p + n}[u]^p_{C^{0,\alpha}}.$$

Mit $r^{\alpha p+n} = r^\lambda$ folgt

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0,\ 0<r\le r_0} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \le C\ [u]_{C^{0,\alpha}},$$

wie behauptet. □

Satz 8.6.8. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $n < p < \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

für $0 \le \alpha \le \alpha^* = 1 - \frac{n}{p}$, und die Einbettung ist kompakt für $0 \le \alpha < \alpha^*$.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Diagramm

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{E\ (\text{Satz } 8.4.1)}{\to} W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \overset{(\text{Satz } 8.6.3)}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha^*}(\mathbb{R}^n)$$
$$\overset{u\mapsto u|_\Omega}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha^*}(\bar{\Omega}) \overset{(\text{kompakt für } \alpha<\alpha^*\ (\text{Satz } 8.6.2))}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

□

8.6.3 Anwendungen

Die Sätze 8.5.3 und 8.6.8 liefern eine nützliche Variante der Poincaré-Ungleichung.

Satz 8.6.9. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und von der Klasse C^1, und sei $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $C = C(n,p,\Omega)$ mit*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)\colon \int_\Omega |u - \bar{u}_\Omega|^p\, dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx,$$

wobei

$$\bar{u}_\Omega = \fint_\Omega u\ dx = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u\ dx.$$

Beweis. (indirekt) Nimm an, es gibt $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$1 = \int_\Omega |u_k - \bar{u}_{k,\Omega}|^p\, dx \ge k \int_\Omega |\nabla u_k|^p\, dx,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Folge $v_k := u_k - \bar{u}_{k,\Omega} \in W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\nabla v_k \to 0 \text{ in } L^p(\Omega) \quad (k \to \infty).$$

Nach Satz 8.5.3 ist $(v_k) \subset L^p(\Omega)$ relativ kompakt. Also existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $v \in L^p(\Omega)$ mit $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$, $k \in \Lambda$. Weiter folgt $v \in W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega |v|^p\ dx = 1,\ \bar{v}_\Omega = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} \bar{v}_{k,\Omega} = 0,$$

und

$$\nabla v = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} \nabla v_k = 0 \in \bigcap_{1\le q\le\infty} L^q(\Omega).$$

Durch wiederholte Anwendung von Satz 8.5.3 erhalten wir $v \in W^{1,q}$ für ein $q > n$. Mit Satz 8.6.8 folgt $v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, und $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ist lokal Lipschitz. Da Ω zusammenhängend ist, liefert Korollar 8.3.1 nun jedoch $v \equiv \text{const.} = \bar{v}_\Omega = 0$, und wir erhalten den gewünschten Widerspruch. □

Korollar 8.6.1. *(Dirichlet Growth-Theorem, Morrey) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $1 \le p < \infty$. Sei weiter $u \in W^{1,p}(\Omega)$, und mit Konstanten $0 < \alpha \le 1$, $M \ge 0$ gelte*

$$\int_{\Omega_r(x)} |\nabla u|^p \; dx \le M^p \; r^{n-p+p\alpha}, \tag{8.6.5}$$

gleichmässig in $x_0 \in \Omega$, $0 < r \le r_0$. Dann gilt $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, und $[u]_{C^{0,\alpha}} \le CM$.

Beweis. Die nach Satz 8.4.1 konstruierte Fortsetzung $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt offenbar ebenfalls (8.6.5). Daher dürfen wir oBdA annehmen, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Mit Satz 8.6.6 und (8.6.5) erhalten wir für jedes $x_0 \in \Omega$, $0 < r \le r_0$ die Abschätzung

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx \le Cr^p \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \le CM^p r^{n+p\alpha};$$

das heisst, $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ für $\lambda = n + p\alpha$, und

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0,\, 0<r<r_0} \Big(r^{-\lambda} \int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le CM.$$

Da $\lambda > n$ folgt mit Satz 8.6.5, dass $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ und

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \le C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \le CM.$$

□

8.6.4 Schwache und klassische Differenzierbarkeit

Für $p > n$ ist jedes $u \in W^{1,p}$ fast überall klassisch differenzierbar. Zunächst gilt

Lemma 8.6.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $n < p < \infty$. Dann existiert $C = C(n, p, \Omega)$, so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alle $y_0 \in B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ gilt*

$$|u(x_0) - u(y_0)| \le C\Big(r^p \fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{8.6.6}$$

Beweis. Nach Satz 8.6.8 gilt $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$; insbesondere ist jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ stetig, und wie in (8.6.3) gilt für alle $x_0 \in \Omega$ mit $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ die Darstellung

$$u(x_0) = \lim_{i\to\infty} u_{x_0,r_i},$$

wobei $r_i = 2^{-i}\, r$, $i \ge -1$.

Für $y_0 \in B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ schätze ab

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq |u(x_0) - u_{x_0,2r}| + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| + |u_{y_0,r} - u(y_0)|,$$

mit

$$|u(x_0) - u_{x_0,2r}| = \lim_{i\to\infty} |u_{x_0,r_i} - u_{x_0,2r}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|u_{x_0,r_i} - u_{x_0,r_{i-1}}\right|$$

wie in (8.6.3). Mit (8.6.2) und Satz 8.6.6 gilt weiter

$$\begin{aligned}|u_{x_0,r_i} - u_{x_0,r_{i-1}}| &\leq C\Big(\fint_{B_{r_{i-1}}(x_0)} |u - u_{x_0,r_{i-1}}|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\Big(r_{i-1}^p \fint_{B_{r_{i-1}}(x_0)} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\Big(2^{(1-i)(p-n)} r^p \fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{(1-i)(p-n)}{p}} < \infty$, folgt

$$|u(x_0) - u_{x_0,2r}| \leq C\Big(r^p \fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Analog erhalten wir

$$|u(y_0) - u_{y_0,r}| \leq C\Big(r^p \fint_{B_r(y_0)} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\Big(r^p \fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Schliesslich gilt mit Satz 8.6.6, nachdem wir zunächst wie in (8.6.4) abschätzen

$$\begin{aligned}|u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| &\leq \fint_{B_r(y_0)} |u - u_{x_0,2r}| \; dx \\ &\leq C\Big(\fint_{B_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\Big(r^p \fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Satz 8.6.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ für ein $p > n$. Dann ist (der stetige Repräsentant von) u in fast allen $x \in \Omega$ klassisch differenzierbar, und das klassisch definierte Differential repräsentiert die schwache Ableitung von u.*

Beweis. OBdA $p < \infty$. Sei $x_0 \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkt der schwachen Ableitung $\nabla u \in L^p(\Omega)$, das heisst,

$$\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u(x_0) - \nabla u(x)|^p \; dx \to 0 \qquad (r \to 0). \tag{8.6.7}$$

Sei $\overline{B_{2r_0}(x_0)} \subset \Omega$, $C_0 = C_0(n, p, B_{2r_0}(x_0))$ die Konstante aus Lemma 8.6.1. Betrachte die Funktion

$$v(y) = u(y) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y - x_0).$$

Für $r < r_0$, $y_0 \in B_r(x_0)$ mit $|y_0 - x_0| > \frac{r}{2}$ liefert Lemma 8.6.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{|u(y_0) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y_0 - x_0)|}{|x_0 - y_0|} &\leq 2\frac{|v(y_0)|}{r} = 2\frac{|v(y_0) - v(x_0)|}{r} \\ &\leq 2C_0 \Big(\fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla v|^p dx \Big)^{1/p} = 2C_0 \Big(\fint_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|^p dx \Big)^{1/p}\end{aligned}$$

und die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $r \to 0$ nach (8.6.7). Also ist u im Punkt x_0 klassisch differenzierbar mit Ableitung $\nabla u(x_0)$. $\square$

Kapitel 9

Regularität schwacher Lösungen

9.1 Klassische Regularität via Sobolev

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{9.1.1}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.1.2}$$

Wir erwarten $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Wie zeigt man dies? Wir würden gerne vorgehen wie im Fall $n = 1$.

Erinnerung: Sei $\Omega = I =]a, b[\subset\subset \mathbb{R}$, und sei $u \in H_0^1(I)$ schwache Lösung von (9.1.1),(9.1.2). Dann ist wegen (9.1.1) $u \in H^2(I)$ mit

$$u'' = \Delta u = -f \in L^2(I),$$

und $u \in H^3(I)$ mit $u''' = -f' \in L^2(I)$. Mit Satz 7.3.1 folgt $u \in C^2(\bar{I})$, woraus man dann auf klassischem Weg die volle Regularität $u \in C^\infty(\bar{I})$ erhält.

Falls wir analog für $n > 1$ argumentieren wollen, benötigen wir mehr schwache Ableitungen. Gemäss Definition von $W^{k,p}(\Omega)$ gilt iterativ für $k = 2, 3, ...$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega);\ \nabla u \in W^{k-1,p}(\Omega)\},\ 1 \le p \le \infty,$$

und

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\bar{\Omega});\ \nabla^k u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Satz 9.1.1. (Sobolev) *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei weiter $[x] = \max\{j \in \mathbb{N};\ j \le x\}$.*

i) Falls $kp < n$, so gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \le q \le q_0$ mit $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, und die Einbettung ist kompakt für $q < q_0$.

ii) Falls $kp = n$, so gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$, und diese Einbettungen sind kompakt.

iii) Falls $kp > n$ mit $k - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, so gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $l = [k - \frac{n}{p}] \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = k - l - \frac{n}{p}$, und die Einbettung ist kompakt für $\alpha < \alpha_0$.

iv) Falls $kp > n$ mit $k - \frac{n}{p} = l + 1 \in \mathbb{N}$, so gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $1 \leq \alpha < 1$, und diese Einbettungen sind kompakt.

Beweis. i) Mit Satz 8.5.3 folgt

$$W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha|<k} \in W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega),$$

also

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-2,p_2}(\Omega) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L^{p_k}$$

mit

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \; \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}, \ldots, \; \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

iii) Sei $l = [k - \frac{n}{p}] \geq 0$. Mit i) folgt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l+1,q}(\Omega)$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-l-1}{n}$. Da

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n} = \frac{n-(k-l)p}{np} < 0,$$

gilt $q > n$. Also folgt mit Satz 8.6.3, dass $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_0}(\Omega)$ und damit

$$W^{l+1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha_0}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$$

für

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = 1 - \frac{n}{q} = k - l - \frac{n}{p}\,.$$

Da $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,s}(\Omega)$ für $1 \leq s \leq p$, folgen ii) und iv) aus i), bzw. iii). □

Bemerkung 9.1.1. Im Fall $p = 1$ kann man mit Methoden wie in Abschnitt 8.5 die Aussage von Satz 9.1.1 verbessern. Zum Beispiel erhält man auf diesem Weg, dass $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Korollar 9.1.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Zusätzlich gelte $u \in H^k(\Omega)$ für ein $k > \frac{n}{2} + 2$. Dann gilt $u \in C^2(\bar{\Omega})$.*

Beweis. Für $k > \frac{n}{2} + 2$ und $l = 2 = p$ erhalten wir $(k-l)\,p > n$. Die Behauptung folgt aus Satz 9.1.1.iii). □

Unser Ziel im Folgenden ist es zu zeigen, dass die Annahmen in Korollar 9.1.1 für die eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (9.1.1), (9.1.2) erfüllt sind, und den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 9.1.2. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^{k+2} und sei $f \in H^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2). Dann gilt $u \in H^{k+2}(\Omega)$, und*

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C \|f\|_{H^k} \tag{9.1.3}$$

mit einer von f und u unabhängigen Konstanten $C = C(\Omega, k, n)$.

9.2 Innere Regularität

Formal erhält man H^2-Abschätzungen wie folgt. Sei $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Mit der Identität

$$\begin{aligned}|\Delta u|^2 &= \sum_{i,j} \big(\partial_i(\partial_i u \partial_j^2 u) - \partial_i u \partial_j^2 \partial_i u\big)\\ &= \underbrace{\sum_{i,j} \big(\partial_i(\partial_i u \partial_j^2 u) - \partial_j(\partial_i u \partial_i \partial_j u)\big)}_{\text{Divergenzterm}} + \underbrace{\sum_{i,j} |\partial_i \partial_j u|^2}_{=|\nabla^2 u|^2}\end{aligned}$$

und dem Divergenzsatz von Gauss folgt

$$\forall u \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 dx = \int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \int_\Omega |f|^2 dx\,, \tag{9.2.1}$$

mit $f := -\Delta u \in C_c^\infty(\Omega)$. Durch wiederholtes Anwenden von (9.2.1) kann man für jedes $u \in C_c^\infty(\Omega)$ nun auch höhere Ableitungen durch $f := -\Delta u$ abschätzen. Beispielsweise erhält man unter Beachtung der Beziehung $\Delta \nabla u = \nabla \Delta u$ für die 3. Ableitungen von u die Identität

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla^3 u|^2 dx &= \sum_{i,j,k} \int_\Omega |\partial_i \partial_j \partial_k u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla^2(\nabla u)|^2 dx\\ &\overset{(9.2.1)}{=} \int_\Omega |\Delta(\nabla u)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla \Delta u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla f|^2 dx\,.\end{aligned}$$

Analog erwarten wir für eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (9.1.1), (9.1.2) mit $f \in H^k(\Omega)$ zumindest “innere” Regularität im Sinne des folggenden Satzes.

Satz 9.2.1. *Sei $f \in H^k(\Omega)$ für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2). Dann gilt $u \in H_{loc}^{k+2}(\Omega)$, und für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \le C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \tag{9.2.2}$$

mit einer von f und u unabhängigen Konstanten $C = C(\Omega', \Omega, k, n)$.

Die Beweisidee ist sehr einfach. Durch “Abschneiden” erhalten wir aus einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (9.1.1), (9.1.2) stets eine Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ einer verwandten Gleichung, welche nun jedoch kompakten Träger hat.

Genauer sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wähle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ auf Ω'. Die Funktion $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$ löst im Distributionssinn die Gleichung

$$-\Delta v = (-\Delta u)\varphi - 2\nabla u \nabla \varphi - u\Delta\varphi =: g, \tag{9.2.3}$$

wobei

$$g = f\varphi - 2\nabla u \nabla \varphi - u\Delta\varphi \in L^2(\Omega) \tag{9.2.4}$$

mit

$$\|g\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} + C\,\|\nabla u\|_{L^2} + C\,\|u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} + C\,\|u\|_{H^1}\,. \tag{9.2.5}$$

Mit (9.2.1) erhalten wir formal die gewünschte Abschätzung (9.2.2) für $k = 0$, sofern wir wissen, dass $v \in H^2$. Genügt diese *“a-priori”* Abschätzung bereits für den Beweis von Satz 9.2.1?

9.2.1 "A-priori" und "a-posteriori" Abschätzungen

Betrachte das folgende Beispiel.

Beispiel 9.2.1. Die Funktion

$$u(x) = \log\log(1/|x|) \in H_0^1(B_{1/e}(0;\mathbb{R}^2))$$

ist unbeschränkte schwache Lösung der Gleichung

$$-\Delta u = |\nabla u|^2 \quad \text{in } \Omega = B_{1/e}(0;\mathbb{R}^2) \tag{9.2.6}$$

mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $H^2_{loc} \hookrightarrow L^\infty_{loc}$ nach Satz 8.6.8, gilt $u \notin H^2_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Die Funktion $v = e^u = \log(1/|x|)$ löst

$$0 = \Delta v = e^u(\Delta u + |\nabla u|^2) \quad \text{auf } \Omega \setminus \{0\}.$$

Weiter hat nach Beispiel 8.1.1 die Menge $K = \{0\}$ verschwindende H^1-Kapazität; das heisst, es gibt $(\psi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $0 \le \psi_k \le 1$ und mit $\psi_k \equiv 1$ in einer Umgebung von $x = 0$, so dass $\psi_k \to 0$ fast überall und $\|\nabla\psi_k\|_{L^2} \to 0$ $(k \to \infty)$. Da u die Gleichung (9.2.6) auf $\Omega\setminus\{0\}$ klassisch löst erhalten wir für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, wie gewünscht, die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \nabla u\nabla(\varphi(1-\psi_k))\, dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega(-\Delta u)\varphi(1-\psi_k)\, dx\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u|^2\varphi(1-\psi_k)\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\varphi\, dx,\end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass $\nabla u \in L^2(\Omega)$. □

Andererseits erhalten wir jedoch für jede genügend glatte Lösung der Gleichung (9.2.6) *"a-priori"* Schranken in H^2 mit Hilfe des folgenden Interpolationssatzes.

Lemma 9.2.1. *(Ladyzhenskaya, Gagliardo-Nirenberg) Sei $v \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$*

$$\int_{\mathbb{R}^2}|v|^4\varphi^2 dx \le 8\int_{supp(\varphi)}|v|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2}\big(|\nabla v|^2\varphi^2 + |v|^2|\nabla\varphi|^2\big)dx.$$

Beweis. OBdA sei $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, und sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Für $x = (x_1, x_2)$ gilt

$$(v^2\varphi)(x_1,x_2) = \Big|\int_{-\infty}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(v^2\varphi)(s,x_2)\, dx\Big| \le \int_{-\infty}^{\infty}|\nabla(v^2\varphi)|(s,x_2)\, ds;$$

analog

$$(v^2\varphi)(x_1,x_2) \le \int_{-\infty}^{\infty}|\nabla(v^2\varphi)|(x_1,t)\, dt.$$

Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|v|^4\varphi^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|(v^2\varphi)(x_1,x_2)|^2 dx_1\, dx_2\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla(v^2\varphi)|(s,x_2)\, ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla(v^2\varphi)|(x_1,t)\, dt\Big)dx_1\, dx_2\\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(v^2\varphi)|dx\Big)^2 \le \Big(\int_{\mathbb{R}^2}\big(2|\nabla v||v||\varphi| + |v|^2|\nabla\varphi|\big)dx\Big)^2,\end{aligned}$$

und mit Hölder können wir weiter abschätzen

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \big(2|\nabla v||v||\varphi| + |v|^2|\nabla\varphi|\big)\, dx\Big)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \big(2|\nabla v||\varphi| + |v||\nabla\varphi|\big)\, |v|\, dx\Big)^2$$
$$\le \int_{supp(\varphi)} |v|^2 dx \cdot \Big(\Big(\int_{\mathbb{R}^2} 4|\nabla v|^2\varphi^2 dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_{R^2} |v|^2|\nabla\varphi|^2 dx\Big)^{1/2}\Big)^2$$
$$\le 8\int_{supp(\varphi)} |v|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2\varphi^2 + |v|^2|\nabla\varphi|^2)\, dx,$$

wie gewünscht. □

Falls nun $u \in H^2_{loc} \cap H^1_0(\Omega)$ schwache Lösung von (9.2.6) ist, so folgt analog zu (9.2.3) für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ die Gleichung

$$-\Delta(u\varphi) = |\nabla u|^2\varphi - 2\nabla u \cdot \nabla\varphi - u\Delta\varphi =: g.$$

Da nach Annahme $v = \nabla u \in H^1_{loc}$, erhalten wir $g \in L^2$ mit

$$\|g\|_{L^2} \le \||\nabla u|^2\varphi\|_{L^2} + C(\varphi)\|u\|_{H^1},$$

wobei

$$\||\nabla u|^2\varphi\|_{L^2} \le C\|\nabla u\|_{L^2(supp(\varphi))}\|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} + C(\varphi)\|u\|^2_{H^1}$$

gemäss Lemma 9.2.1. Mit (9.2.2) folgt

$$\|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} \le C\|g\|_{L^2} \le C_0\|\nabla u\|_{L^2(supp(\varphi))}\|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} + C(\varphi)(1 + \|u\|^2_{H^1})$$

mit einer Konstanten $C_0 > 0$. Wähle $r > 0$, so dass

$$2C_0 \sup_{x_0} \Big(\int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^2 dx\Big)^{1/2} \le 1.$$

Für $\varphi \in C^\infty_c(B_{2r}(x_0))$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ auf $B_r(x_0)$, wo $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, folgt

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(B_r(x_0))} \le \|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} \le C(\varphi)(1 + \|u\|^2_{H^1}),$$

also die gewünschte H^2_{loc}-a-priori Abschätzung.

Aufgrund von Beispiel 9.2.1 müssen wir demnach streng unterscheiden zwischen "a-priori" Abschätzungen für "glatte" Lösungen und "a-posteriori" Regularität!

9.2.2 Beweis von Satz 9.2.1

Obige Schwierigkeiten kann man elegant umgehen, indem man Differentialoperatoren durch Differenzenoperatoren

$$D_h u = \frac{\tau_h u - u}{|h|},\ \ \tau_h u(x) = u(x+h), \quad 0 < |h| << 1,$$

ersetzt (Nirenberg). Offenbar gilt für jedes $u \in H^1$ die Beziehung

$$\nabla D_h u = D_h \nabla u \in L^2,$$

und für $\psi, \rho \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir bei geeigneter Substitution die folgende Regel zur "partiellen Integration"

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \psi D_{-h}\rho \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\rho(x-h)-\rho(x)}{|h|}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{|h|}\rho(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} D_h\psi \cdot \rho \, dx.\end{aligned} \tag{9.2.7}$$

Beweis von Satz 9.2.1. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ wie in (9.2.3), und sei $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von (9.2.3); das heisst,

$$\forall w \in H_0^1(\mathbb{R}^n)\colon \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega gw \, dx. \tag{9.2.8}$$

Wähle $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ und setze $w = D_{-h}D_h v \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$. Mit (9.2.7) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot D_{-h}(D_h\nabla v)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D_h \nabla v|^2 dx.$$

Gleichung (9.2.8) ergibt nun zusammen mit Hölder die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|D_h\nabla v\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega gw\, dx \\ &\leq \|g\|_{L^2}\|w\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}\|D_{-h}D_h v\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{9.2.9}$$

Analog zu Satz 8.3.1 gilt nun

Behauptung 1. Für $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$, $h \neq 0$ gilt $\|D_h u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$.

Beweis. Für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ schätze ab

$$\frac{\tau_h u - u}{|h|}(x) = \int_0^1 \frac{h \cdot \nabla u(x+th)}{|h|}\, dt \leq \int_0^1 |\nabla u(x+th)|\, dt.$$

Mit Minkowski folgt

$$\|D_h u\|_{L^2} \leq \int_0^1 \|\nabla u(\cdot + th)\|_{L^2} dt \leq \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Definition dicht liegt in $H_0^1(\mathbb{R}^n)$, folgt die Behauptung. □

Wir erhalten

$$\|D_{-h}D_h v\|_{L^2} \leq \|\nabla D_h v\|_{L^2} = \|D_h \nabla v\|_{L^2},$$

und mit (9.2.9) folgt

$$\forall h \neq 0\colon \|D_h\nabla v\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}.$$

Satz 8.3.1 liefert nun $\nabla v \in H^1$; das heisst, $v \in H^2$ und damit $u \in H^2(\Omega')$, mit

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq \|\nabla^2 v\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}).$$

Dies ist (9.2.2) für $k = 0$.

Der Fall $k \in \mathbb{N}$ folgt mit Induktion nach Differenzieren der Gleichung (9.1.1).

$k \mapsto k+1$: Sei $u \in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$, und nimm an, $f \in H^{k+1}(\Omega)$. Fixiere $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und setze $v = u\varphi \in H^{k+2}$ mit $supp(v) \subset\subset \Omega$.

Für irgendwelche $(k_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{i=1}^n k_i = k+1$ setze

$$v^{(k+1)} = \frac{\partial^{k+1} v}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} =: \partial^{(k+1)} v.$$

Gemäss (9.2.3) ist $v^{(k+1)} \in H^1_0(\Omega)$ schwache Lösung von

$$-\Delta v^{(k+1)} = \partial^{(k+1)} g =: g^{(k+1)},$$

wo

$$g^{(k+1)} = \partial^{(k+1)}(f\varphi) - 2\partial^{(k+1)}(\nabla u \cdot \nabla\varphi) - \partial^{(k+1)}(u\Delta\varphi) \in L^2(\Omega)$$

gemäss (9.2.4) mit

$$\|g^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{H^{k+1}(\Omega)} + C\|u\|_{H^{k+2}(supp(\varphi))}.$$

Mit (9.2.2) für $k=0$ folgt $v^{(k+1)} \in H^2$ mit

$$\|\nabla^2 v^{(k+1)}\|_{L^2} \le C\big(\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^{k+2}(supp(\varphi))}\big) \le C\big(\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\big)$$

gemäss Induktionsannahme. Das heisst, $v \in H^{k+3}(\Omega)$, und damit $u \in H^{k+3}(\Omega')$, wobei $\Omega' = \{x;\ \varphi(x) = 1\}$, und wiederum mit Induktionsannahme folgt

$$\|u\|_{H^{k+3}(\Omega')} \le \|v\|_{H^{k+3}(\Omega)} + \|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \le C\big(\|f\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\big).$$

Da $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ beliebig, folgt die Behauptung. □

9.3 Randregularität

Betrachte zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n);\ x_n > 0\}$. Sei $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \tag{9.3.1}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+, \tag{9.3.2}$$

mit $supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Definiere $\bar{u} \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\bar{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Analog defineieren wir $\bar{f}$.

Lemma 9.3.1. *$\bar{u} \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$ ist schwache Lösung von*

$$-\Delta\bar{u} = \bar{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{9.3.3}$$

mit $supp(\bar{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$, und $\|\bar{f}\|_{L^2} \le 2\|f\|_{L^2}$.

Beweis von (9.3.3)**.** Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt (mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\bar{u}\nabla\varphi\,dx &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\mathbb{R}^n_+}\big((\partial_i u\cdot\partial_i\varphi)(x',x_n) - \partial_i u(x',x_n)\,\partial_i\varphi(x',-x_n)\big)\,dx\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n_+}(\partial_n u\cdot\partial_n\varphi)(x',x_n) + \partial_n u(x',x_n)\,\partial_n\varphi(x',-x_n)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\nabla u\nabla\big(\varphi(x',x_n)-\varphi(x',-x_n)\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n_+}\nabla u\nabla\psi\,dx,\end{aligned}$$

mit $\psi(x',x_n) = \varphi(x',x_n) - \varphi(x',-x_n) \in C^\infty \cap H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$. Mit (9.3.1),(9.3.2) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\bar{u}\nabla\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n_+}\nabla u\nabla\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\bar{f}\varphi\,dx,$$

wie gewünscht. □

Mit Satz 9.2.1 folgt $\bar{u} \in H^2$, und

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \le \|\nabla^2\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{9.3.4}$$

Im Allgemeinen ist $\bar{f}$ auch für glatte f nicht regulär, und Satz 9.2.1 versagt für $k > 0$. Die zu Satz 9.2.1 analoge Aussage gilt aber doch.

Satz 9.3.1. *Sei $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$ schwache Lösung von (9.3.1), (9.3.2) mit supp$(u) \subset\subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$, und sei $f \in H^k(\mathbb{R}^n_+)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^n_+)$, und*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\mathbb{R}^n_+)} \le C(\|f\|_{H^k} + \|u\|_{H^1})$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C.

Beweis. Für $k = 0$ benutze Lemma 9.3.1 und (9.3.4).

$k = 1$: Betrachte die tangentialen Ableitungen $u_i = \partial_i u$, $1 \le i \le n-1$. Da $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$, gilt $u_i \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$, und

$$\begin{aligned}-\Delta u_i &= \partial_i f \in L^2(\mathbb{R}^n_+),\\ u_i &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+.\end{aligned}$$

Mit (9.3.4) folgt $u_i \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$, und

$$\|\partial_i\partial_j\partial_k u\|_{L^2} \le \|u_i\|_{H^2} \le C(\|f\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}),\ 1 \le i \le n-1,\ 1 \le j,k \le n.$$

Mit der Gleichung (9.3.1) kann man den noch fehlenden Term

$$\partial_n^3 u = \Delta u_n - \sum_{i=1}^{n-1}\partial_i^2 u_n = \partial_n f - \sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\partial_n u_i$$

abschätzen

$$\|\partial_n^3 u\|_{L^2} \le \|\partial_n f\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{n-1}\|\nabla^2 u_i\|_{L^2} \le C(\|f\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}).$$

Den allgemeinen Fall zeigen wir nun mittels Induktion.

$k \mapsto k+1$: Nimm an, $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^n_+)$. Betrachte eine beliebige tangentiale Ableitungen

$$u^{(k+1)} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{k_1} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}} =: \partial^{(k+1)} u \in H_0^1(\mathbb{R}^n_+)$$

mit

$$-\Delta u^{(k+1)} = \partial^{(k+1)} f =: f^{(k+1)} \in L^2.$$

Mit Lemma 9.3.1 folgt $u^{(k+1)} \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$ und

$$\|\nabla^2 u^{(k+1)}\|_{L^2} \leq C \|f^{(k+1)}\|_{L^2}.$$

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multi-Index mit

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i, \quad \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wie für $k=1$ folgt unter Benützung von (9.3.1) für $l = k+3, k+2, \dots$ iterativ

$$\begin{aligned} M_l := \sup_{|\alpha|=k+3, \alpha_n \leq l} \|\partial^\alpha u\| &\leq M_{l-1} + C\|f^{(k+1)}\|_{L^2} \leq \dots \\ &\leq M_2 + C\|f^{(k+1)}\|_{L^2} \leq C\|f^{(k+1)}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

und mit der Induktionsannahme erhalten wir $u \in H^{k+3}(\mathbb{R}^n_+)$ mit

$$\|u\|_{H^{k+3}} \leq M_{k+3} + \|u\|_{H^{k+2}} \leq C(\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^1}),$$

wie gewünscht. □

Für den allgemeinen Fall sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^{k+2}, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2) mit $f \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zu $x_0 \in \partial\Omega$ wähle eine Umgebung U von x_0 entsprechend der Definition 8.4.1, mit zugehörigem Diffeomorphismus $\Psi \in C^{k+2}(U, \mathbb{R}^n)$ von U auf $V = Q$ und mit $\Phi = \Psi^{-1} \in C^{k+2}(Q, \mathbb{R}^n)$, so dass

$$\Phi(Q_+) = U \cap \Omega, \ \Phi(Q_0) = U \cap \partial\Omega,$$

wobei $|d\Phi|, |d\Psi| \leq C$.

Fixiere $\varphi \in C_c^\infty(U)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ in einer Umgebung von x_0 und betrachte $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega)$ mit *supp*$(v) \subset\subset U$. Setze $w = v \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$.

Man erhält die Gleichung für w auf variationellem Weg. Analog zu Beispiel 5.4.2 gilt zunächst für $v \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta v = g \quad \text{in } \Omega, \tag{9.3.5}$$

wobei $g \in L^2$ wie in (9.2.3), die folgende Charakterisierung.

Lemma 9.3.2. *Die eindeutige schwache Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ von (9.3.5) erfüllt*

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega gv\, dx = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} E(w).$$

Beweis. Sei $w \in H_0^1(\Omega)$. Schreibe $w = v + \varphi$ mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Es gilt

$$E(w) = E(v+\varphi) = E(v) + \int_\Omega (\nabla v \nabla \varphi - g\varphi)\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx. \qquad (9.3.6)$$

Falls v die Gleichung (9.3.5) löst, folgt

$$E(w) = E(v+\varphi) = E(v) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx \geq E(v),$$

und "=" gilt genau dann, wenn $w = v$. □

Es gilt auch die Umkehrung von Lemma 9.3.2.

Lemma 9.3.3. *Falls $v \in H_0^1(\Omega)$ die Energie E unter allen $w \in H_0^1(\Omega)$ minimiert, so ist v schwache Lösung von* (9.3.5).

Beweis. Ersetzt man in (9.3.6) die Funktion φ durch $\epsilon\varphi$, so erhält man

$$0 = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} E(v+\epsilon\varphi) = \int_\Omega (\nabla v \nabla \varphi - g\varphi)\, dx$$

als notwendige Bedingung für eine Minimalstelle von E an der Stelle v. □

Wir ziehen nun das Energiefunktional E mittels Φ zurück. Zur Vereinheitlichung der Notation schreiben wir u anstelle von v.

Zu $u \in H_0^1(\Omega \cap U)$ mit $supp(u) \subset\subset U$ setze $\tilde{u} = u \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$ mit $supp(\tilde{u}) \subset\subset Q$. Beachte, dass dann $u = \tilde{u} \circ \Psi$ mit $\Psi = \Phi^{-1} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
E(u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\cap U} \frac{\partial \tilde{u}\circ\Psi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \tilde{u}\circ\Psi}{\partial x^i} dx - \int_{\Omega\cap U} g(\tilde{u}\circ\Psi) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega\cap U} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^k}\frac{\partial \Psi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^l}\frac{\partial \Psi^l}{\partial x^i} dx - \int_{\Omega\cap U} g(\tilde{u}\circ\Psi) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{Q_+} a^{ij}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^j}\, |det(d\Phi)|\, dy - \int_{Q_+} \tilde{g}\tilde{u}\, |det(d\Phi)| dy
\end{aligned}$$

mit $\tilde{g} = g \circ \Phi$ und mit

$$a^{ij} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^k}\frac{\partial \Psi^j}{\partial x^k} = \big(d\Psi \cdot (d\Psi)^t\big)_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n.$$

Setze

$$h_{ij} = \frac{\partial \Phi^m}{\partial y^i}\frac{\partial \Phi^m}{\partial y^j} = \big((d\Phi)^t \cdot d\Phi\big)_{ij}.$$

Beachte

$$d\Psi \underbrace{(d\Psi)^t \cdot (d\Phi)^t}_{=(d\Phi\cdot d\Psi)^t = id} d\Phi = id;$$

das heisst,

$$a^{ij}h_{jk} = \delta^i_k, \quad (a^{ij}) = (h_{ij})^{-1} =: (h^{ij}).$$

Weiter gilt

$$|det(d\Phi)| = \sqrt{det\big((d\Phi)^t \cdot d\Phi\big)} = \sqrt{det(h_{ij})} =: \sqrt{|h|}.$$

Wir deuten
$$D_h(\tilde{u}) := \frac{1}{2}\int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\,dy$$
als Dirichlet-Integral von $\tilde{u}$ bzgl. der Riemannschen Metrik $h = (h_{ij})$ auf Q_+.

Bemerkung 9.3.1. Das Dirichlet-Integral ist eine geometrische Grösse. Seien (M, g), (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Falls $S \subset\subset M$, $\tilde{S} \subset\subset N$ und falls $\Phi \in C^1$ ein Diffeomorphismus ist von einer Umgebung von $\tilde{S}$ nach M mit $\Phi(\tilde{S}) = S$ und $\Phi^* g = h$, wo

$$\forall X, Y \in T_pN\colon (\Phi^* g)(p)(X, Y) = g(\Phi(p))(d\Phi(p)X, d\Phi(p)Y),$$

dann gilt
$$D_g(u; S) = D_{\Phi^* g}(u \circ \Phi; \tilde{S}) = D_h(\tilde{u}; \tilde{S})$$
mit $\tilde{u} = u \circ \Phi$.

Sei nun wieder $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $supp(v) \subset\subset U$ Lösung von (9.3.5). Setze $\tilde{g} = g\circ\Phi$, $w = v \circ \Phi$, und definiere

$$\tilde{E}(w) = \frac{1}{2}\int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial w}{\partial y^i}\frac{\partial w}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\,dy - \int_{Q_+} \tilde{g}w\sqrt{|h|}\,dy.$$

Lemma 9.3.4. *Sei $v \in H_0^1(\Omega \cap U)$ mit $supp(v) \subset\subset U$, und setze weiter $w = v \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$. Es sind äquivalent:*

i) v ist schwache Lösung von (9.3.5)*;*

ii) es gilt
$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega \cap U)\colon E(v) \le E(v + \varphi)\ ; \tag{9.3.7}$$

iii) es gilt
$$\forall \psi \in H_0^1(Q_+)\colon \tilde{E}(w) \le \tilde{E}(w + \psi)\ ; \tag{9.3.8}$$

iv) w ist schwache Lösung der Gleichung

$$-\Delta_h w := -\frac{1}{|h|}\frac{\partial}{\partial y^i}\big(h^{ij}\sqrt{|h|}\frac{\partial w}{\partial y^j}\big) = \tilde{g} \quad in\ Q_+. \tag{9.3.9}$$

Bemerkung 9.3.2. Der Operator

$$-\Delta_h w = -\frac{1}{|h|}\frac{\partial}{\partial x^i}\big(h^{ij}\sqrt{|h|}\frac{\partial w}{\partial y^j}\big)$$

heisst Laplace-Beltrami Operator bezüglich der Metrik h.

Beweis von Lemma 9.3.4. "*i*) $\Leftrightarrow$ *ii*)": Siehe Lemma 9.3.2 und Lemma 9.3.3.

"*ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*)": Zu $\varphi \in H_0^1(\Omega\cap U)$ ist $\psi = \varphi\circ\Phi \in H_0^1(Q_+)$, und umgekehrt. Weiter gilt
$$E(v) = \tilde{E}(w),\ \ E(v + \varphi) = \tilde{E}(w + \psi).$$

"*iii*) $\Leftrightarrow$ *iv*)": Sei $\psi \in H_0^1(Q_+)$. Entwickle

$$\tilde{E}(w+\epsilon\psi) = \tilde{E}(w) + \epsilon \int_{Q_+} \big(h^{ij}\frac{\partial w}{\partial y^i}\frac{\partial \psi}{\partial y^j} - \tilde{g}\psi\big)\sqrt{|h|}\,dy$$
$$+ \frac{\epsilon^2}{2}\int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial \psi}{\partial y^i}\frac{\partial \psi}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\,dy,\ \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung (9.3.8) gilt also genau dann, wenn

$$\forall \psi \in H_0^1(Q_+)\colon \int_{Q_+} \big(h^{ij}\frac{\partial w}{\partial y^i}\frac{\partial \psi}{\partial y^j} - \tilde{g}\psi\big)\sqrt{|h|}\,dy = 0\,. \tag{9.3.10}$$

Dies ist die schwache Form von (9.3.9). □

Analog zu Satz 9.3.1 gilt nun die folgende Aussage.

Lemma 9.3.5. *Sei $w \in H_0^1(Q_+)$ mit supp$(w) \subset\subset Q$ schwache Lösung von (9.3.9), wobei $(h_{ij}) \in C^{k+1}(\bar{Q}_+)$ mit Konstanten $0 < \lambda \le \Lambda$ gleichmässig in Q_+ die Bedingung erfüllt*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\colon \lambda|\xi|^2 \le h^{ij}(y)\xi^i\xi^j \le \Lambda|\xi|^2, \tag{9.3.11}$$

und sei $\tilde{g} \in H^k(Q_+)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $w \in H^{k+2}(Q_+)$, und

$$\|w\|_{H^{k+2}} \le C\|\tilde{g}\|_{H^k}$$

mit einer von von $\tilde{g}$ und w unabhängigen Konstanten $C = C(n,\lambda,\Lambda,h)$.

Bemerkung 9.3.3. i) Eine Matrix (h_{ij}), welche die Bedingung (9.3.11) erfüllt, heisst gleichmässig elliptisch.

ii) Die Annahmen im Lemma sind erfüllt, falls Ω von der Klasse C^{k+2}.

Beweis von Lemma 9.3.5. Einsetzen von $\psi = w \in H_0^1(Q_+)$ in (9.3.10) ergibt unter Beachtung von (9.3.11) die Abschätzung

$$\lambda\int_{Q_+}|\nabla w|^2\sqrt{|h|}\,dy \le \int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial w}{\partial y^i}\frac{\partial w}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\,dy = \int_{Q_+}\tilde{g}w\sqrt{|h|}\,dy$$
$$\le C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2},$$

wobei wir im letzten Schritt die Poincaré-Ungleichung verwenden. Es folgt

$$\|w\|_{H^1} \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}. \tag{9.3.12}$$

Weiter argumentieren wir nun mit Induktion.

$k = 0$: Fixiere $1 \le i \le n-1$. Für $h \ne 0$ setze

$$\partial_i^h w = D_{he_i}w = \frac{\tau_{he_i}w - w}{|h|}.$$

Dann ist $\psi = \partial_i^{-h}\partial_i^h w \in H_0^1(Q_+)$ zulässig als Testfunktion in (9.3.10), und wir erhalten

$$\int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial w}{\partial y^i}\frac{\partial \psi}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\,dy = \int_{Q_+}\tilde{g}\psi\sqrt{|h|}\,dy$$
$$\le C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\partial_i^{-h}\partial_i^h w\|_{L^2} \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\nabla\partial_i^h w\|_{L^2}.$$

Die linke Seite ergibt bei geeigneter Substitution

$$\begin{aligned}
\int_{Q_+} h^{kl}\frac{\partial w}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^l}\big(\partial_i^{-h}\partial_i^h w\big)\sqrt{|h|}\,dy &= \int_{Q_+} \partial_i^h\big(h^{kl}\sqrt{|h|}\frac{\partial w}{\partial y^k}\big)\frac{\partial}{\partial y^l}(\partial_i^h w)\,dy \\
&\geq \int_{Q_+} h^{kl}\frac{\partial}{\partial y^k}\big(\partial_i^h w\big)\frac{\partial}{\partial y^l}\big(\partial_i^h w\big)\sqrt{|h|}\,dy - C\|h^{ij}\|_{C^1}\int_{Q_+}|\nabla w||\nabla\partial_i^h w|\,dy \\
&\geq C_0\lambda\|\nabla\partial_i^h w\|_{L^2}^2 - C\|\nabla w\|_{L^2}\|\nabla\partial_i^h w\|_{L^2},
\end{aligned}$$

wobei $C_0 = \inf_{Q_+}\sqrt{|h|} > 0$. Mit (9.3.12) folgt

$$\|\nabla\partial_i^h w\|_{L^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}, \quad \text{gleichmässig in } h \neq 0.$$

Wie in Satz 8.3.1 folgt $\partial_i w = \frac{\partial w}{\partial x^i} \in H_0^1(Q_+)$ mit

$$\|\nabla\partial_i w\|_{L^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2},\ 1 \leq i \leq n-1.$$

Mit (9.3.9) kann man auch den fehlenden Term

$$\|\nabla\partial_n w\|_{L^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}$$

abschätzen. Der Induktionsschritt $k \mapsto k+1$ verläuft vollkommen analog zu Satz 9.3.1. □

Beweis von Satz 9.1.2. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2) auf $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei $\Omega \in C^{k+2}$, $f \in H^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Einsetzen von $\varphi = u \in H_0^1(\Omega)$ in die schwache Form von (9.1.1), (9.1.2) liefert zunächst zusammen mit der Poincaré-Ungleichung die Abschätzung

$$C^{-1}\|u\|_{H^1}^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega fu\,dx \leq \|f\|_{L^2}^2\|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2\|u\|_{H^1}^2;$$

also

$$\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}. \tag{9.3.13}$$

Überdecke $\partial\Omega$ mit Umgebungen $U_1, \ldots, U_L$, für die ein C^{k+2}-Diffeomorphismus $\Phi_l \colon Q \to U_l$ existiert mit

$$\Phi_l(Q_+) = U_l \cap \Omega;\ \Phi_l(Q_0) = U_l \cap \partial\Omega,\ |d\Phi_l|, \left|d\Phi_l^{-1}\right| \leq C,\ 1 \leq l \leq L.$$

Wähle dazu $U_0 \subset\subset \Omega$ so, dass $\Omega \subset \cup_{l=0}^L U_l$, und wähle eine der Überdeckung $(U_l)_{0\leq l\leq L}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varphi_l)_{0\leq l\leq L}$ auf Ω mit $0 \leq \varphi_l \in C_c^\infty(U_l)$ und

$$\sum_{l=0}^L \varphi_l \equiv 1 \ \text{ in } \Omega.$$

Für $0 \leq l \leq L$ definiere $u_l = u\varphi_l \in H_0^1(U_l \cap \Omega)$ mit

$$-\Delta u_l = f\varphi_l - 2\nabla u\nabla\varphi_l - u\Delta\varphi_l =: g_l \tag{9.3.14}$$

und

$$supp(u_l) \subset\subset U_l, \tag{9.3.15}$$

und für $1 \le l \le L$ setze

$$w_l = u_l \circ \Phi_l, \ \tilde{g}_l = g_l \circ \Phi_l$$

mit

$$-\Delta_{h_l} w_l = \tilde{g}_l,$$

wobei $h_l = \Phi_l^*(g_{\mathbb{R}^n}$. Wiederum benutzen wir Induktion.

$k = 0:$ Mit (9.3.14) und unseren Annahmen betreffend f und u folgt $g_l \in L^2(U_l)$, $0 \le l \le L$, und daher auch $\tilde{g}_l \in L^2(Q_+)$, $1 \le l \le L$. Mit Satz 9.2.1 und (9.3.13) erhalten wir $u_0 \in H^2(U_0)$ mit

$$\|u_0\|_{H^2(U_0)} \le C(\|g_0\|_{L^2(U_0)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \le C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \le C\|f\|_{L^2}.$$

Analog ergeben Lemma 9.3.5 und (9.3.13) für jedes $1 \le l \le L$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u_l\|_{H^2(U_l)} &\le C\|w_l\|_{H^2(Q_+)} \le C\|\tilde{g}_l\|_{L^2(Q_+)} \le C\|g_l\|_{L^2(U_0)} \\ &\le C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \le C\|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Es folgt $u \in H^2(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{H^2} \le \sum_{l=0}^{L} \|u_l\|_{H^2} \le C\|f\|_{L^2}.$$

$k \mapsto k+1$: Sei $f \in H^{k+1}(\Omega)$ und nimm an, $u \in H^{k+2} \cap H_0^1(\Omega)$ erfüllt (9.1.1), (9.1.2). Mit (9.3.14) erhalten wir

$$g_l \in H^{k+1}(U_l), 0 \le l \le L,$$

sowie

$$\tilde{g}_l = g_l \circ H \in H^{k+1}(Q_+), 1 \le l \le L,$$

und $h_l = d\Phi_l^T d\Phi_l \in C^{k+2}(\bar{Q}_+)$.

Satz 9.2.1 und Lemma 9.3.5 liefern nun

$$u_0 \in H^{k+3}, \ u_l = w_l \circ \Phi_l^{-1} \in H^{k+3}, \ 1 \le l \le L,$$

und

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{H^{k+3}(U_0)} &\le C(\|g_0\|_{H^{k+1}} + \|u_0\|_{H^1}) \\ &\le C(\|f\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^{k+2}(\Omega)}) \le C\|f\|_{H^{k+1}},\end{aligned}$$

gemäss Induktionsannahme, bzw.

$$\begin{aligned}\|u_l\|_{H^{k+3}} &\le C\|w_l\|_{H^{k+3}} \le C\|\tilde{g}_l\|_{H^{k+1}} \\ &\le C\|g_l\|_{H^{k+1}} \le C(\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^{k+3}}) \le C\|f\|_{H^{k+1}}\end{aligned}$$

für jedes $1 \le l \le L$. Es folgt $u \in H^{k+3}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{H^{k+3}} \le \sum_{l=0}^{L} \|u_l\|_{H^{k+3}} \le C\|f\|_{H^{k+1}}.$$

□

9.4 Erste Anwendungen

Wir können nun endlich den noch ausstehenden Beweis von Lemma 7.1.1 erbringen. Zur Erinnerung: Für ein Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Operator $A = -\Delta \colon D_A \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, wo

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{\Omega});\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\},$$

mit Abschluss $\bar{A} \colon D_{\bar{A}} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, wobei

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\Omega);\ \exists u_k \in D_A : u_k \stackrel{L^2}{\to} u,\ -\Delta u_k \stackrel{L^2}{\to} f =: \bar{A}u\ (k \to \infty)\}.$$

Analog zu Lemma 7.5.1 gilt zunächst das folgende Resultat.

Lemma 9.4.1. *Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2 ist, so gilt $D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.*

Beweis. Es gilt $D_A \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, vgl. Korollar 8.4.3. Falls $(u_k) \subset D_A$ mit $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $f_k = -\Delta u_k \to f$ in $L^2(\Omega)$ $(k \to \infty)$, so folgt mit Satz 9.1.2

$$\|u_k - u_l\|_{H^2} \le C\|f_k - f_l\|_{L^2};$$

also $u_k \to u$ in $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, und $D_{\bar{A}} \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

Sei Schliesslich $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ beliebig. Wähle $f_k \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to -\Delta u$ in $L^2(\Omega)$ für $k \to \infty$, dazu $u_k \in H_0^1(\Omega)$ mit $-\Delta u_k = f_k$, $k \in \mathbb{N}$. Mit Satz 9.1.2 folgt $u_k \in D_A$, und $u_k \to u$ in $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$; also $u \in D_{\bar{A}}$. □

Unter der obigen Regularitätsannahme an Ω zeigen wir nun die Lemma 7.1.1 entsprechende Aussage.

Lemma 9.4.2. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2 und sei $v \in L^2(\Omega)$ mit*

$$\forall u \in D_{\bar{A}} \colon\ \left|(v, \bar{A}u)_{L^2}\right| \le C\,\|u\|_{L^2}. \tag{9.4.1}$$

Dann gilt $v \in D_{\overline{A}}$.

Beweis. Zusammen mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, liefert (9.4.1) ein $f \in L^2(\Omega)$ mit

$$\forall u \in D_{\bar{A}} \colon\ -\int_\Omega v\Delta u\, dx = \int_\Omega fu\, dx; \tag{9.4.2}$$

insbesondere gilt wegen $C_c^\infty(\Omega) \subset D_{\bar{A}}$ dann im Distributionssinn die Gleichung $-\Delta v = f \in L^2(\Omega)$. Beachte, dass auch für $u \in D_{\bar{A}}$ gemäss Lemma 9.4.1 gilt $\bar{A}u = -\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Weiter erhalten wir $v \in H_0^1(\Omega)$. Sei dazu $w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta w = f \text{ in } \Omega,\ w = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

gemäss Satz 9.1.2. Mit (9.4.2) und Lemma 9.4.1 folgt

$$\int_\Omega (w - v)\Delta u\, dx = \int_\Omega (f + \Delta w)u\, dx = 0 \tag{9.4.3}$$

für alle $u \in D_{\bar{A}}$. Sei insbesondere $u \in D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung von

$$-\Delta u = v - w \in L^2(\Omega)$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Mit (9.4.3) folgt $\|v - w\|_{L^2} = 0$; das heisst, $v = w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) = D_{\bar{A}}$. □

Mit Lemma 9.4.2 ist der Definitionsbereich des zu $\bar{A}$ adjungierten Operators mit $D_{\bar{A}}$ identisch, $\bar{A}$ also selbstadjungiert. Die Kompaktheit der Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gemäss Satz 8.5.3 zusammen mit Satz 9.1.2 und dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, Satz 6.7.2, liefert nun

Satz 9.4.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2. Dann gibt es eine L^2-orthonormale Hilbert-Basis $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators mit*

$$-\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \text{ in } \Omega,\ \varphi_i = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit Eigenwerten $0 < \lambda_i \to \infty$ $(i \to \infty)$.

Beweis. Für $f \in L^2(\Omega)$ sei $Kf = u$ die Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Der so definierte Operator $K\colon\ L^2(\Omega) \to H^2 \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist linear und stetig nach Satz 9.1.2 sowie kompakt nach Satz 8.5.3.

Schliesslich ist mit $\bar{A} = -\Delta$ auch K selbstadjungiert. Da K stetig ist, genügt es hierfür, die Symmetrie zu zeigen. Seien dazu $f, g \in L^2(\Omega)$ mit $u = Kf$, $v = Kg$. Dann gilt

$$(Kf, g)_{L^2} = \int_\Omega u(-\Delta v)\,dx = \int_\Omega (-\Delta u)v\,dx = (f, Kg)_{L^2}.$$

Da $ker(K) = \{0\}$, liefert Satz 6.7.2 eine Schar von L^2-orthonormalen Eigenvektoren $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$L^2(\Omega) = \overline{span\{\varphi_i;\ i \in \mathbb{N}\}}$$

und zugehörige Eigenwerte $\mu_i \to 0$ mit $K\varphi_i = \mu_i\varphi_i,\ \mu_i \neq 0$, wobei wegen

$$\varphi_i = -\Delta(K\varphi_i) = \mu_i(-\Delta\varphi_i) \tag{9.4.4}$$

und

$$0 < \|\varphi_i\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \big(-\Delta(K\varphi_i)\big)\varphi_i dx = \mu_i \int_\Omega (-\Delta\varphi_i)\varphi_i dx = \mu_i\|\nabla\varphi_i\|_{L^2}^2 \tag{9.4.5}$$

gilt $\mu_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Schliesslich folgt mit (9.4.4) auch die Identität

$$-\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \text{ in } \Omega$$

mit $0 < \lambda_i = \mu_i^{-1} \to \infty$ $(k \to \infty)$. Wegen

$$\varphi_i = \lambda_i K\varphi_i \in D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$$

gilt auch die Randbedingung $\varphi_i = 0$ auf $\partial\Omega$. □

Bemerkung 9.4.1. Mit dem Courant-Fischer Minimaxprinzip und (9.4.5) erhalten wir zudem die Charakterisierungen

$$\mu_i = \sup_{V \subset L^2(\Omega),\, dim(V)=i} \inf_{0 \neq f \in V} \frac{(Kf, f)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}^2}, \quad i \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\lambda_i = \inf_{V \subset H_0^1(\Omega),\, dim(V)=i} \sup_{0 \neq u \in V} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}, \quad i \in \mathbb{N},$$

vergleiche Bemerkung 6.7.3.

9.5 Variable Koeffizienten

Mit den Techniken der vorangegangenen Abschnitte können wir nun auch Randwertprobleme für elliptische Operatoren mit variablen Koeffizienten behandeln.

Satz 9.5.1. *Sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *von der Klasse* C^{k+2}*, und seien* $a_{ij} = a_{ji} \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$*,* $1 \leq i, j \leq n$ *mit*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \colon \lambda \left|\xi\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi^i \xi^j \leq \Lambda \left|\xi\right|^2, \tag{9.5.1}$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda$*. Dann besitzt für jedes* $f \in H^k(\Omega)$ *das Randwertproblem*

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = f \text{ in } \Omega \tag{9.5.2}$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{9.5.3}$$

genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$*, und* $u \in H^{k+2}(\Omega)$ *mit*

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C \, \|f\|_{H^k}.$$

Beweis. Definiere

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) \colon (u, v)_a := \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx.$$

Wegen (9.5.1) gilt

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \colon \lambda \, \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (u, u)_a \leq \Lambda \, \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Mit der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.2, folgt, dass $(\cdot, \cdot)_a$ ein zum Standardskalarprodukt äquivalentes Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ definiert. Mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, folgt die Existenz genau einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (9.5.2), (9.5.3) in dem Sinne, dass gilt

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \colon (u, v)_a = \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Für die höhere Regularität verwenden wir Lemma 9.3.5. Definiere dazu die "Metrik" $g = (g_{ij})$ mit $g^{-1} = (g^{ij})$, wo $g^{ij} = a_{ij}$. Dann geht (9.5.2) über in die Gleichung

$$-\Delta_g u := -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\big) = f - g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\log \sqrt{|g|}\big) \frac{\partial u}{\partial x_j} \; .$$

Beachte, dass nach Annahme gilt $g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\log \sqrt{|g|}\big) \in C^k$.

Da der Laplace-Beltrami-Operator $-\Delta_g$ gemäss Bemerkung 9.3.1 und Lemma 9.3.4 unter einem Diffeomorphismus $H \in C^{k+2}(Q; \mathbb{R}^n)$ übergeht in $-\Delta_h$ mit $h = H^* g \in C^{k+1}$, wo

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \colon h(p)(X,Y) = g(H(p))\big(dH(p)X, dH(p)Y\big),$$

erhält man mit Induktion nach k mittels Lemma 9.3.5 sowohl innere als auch Randregularität. □

9.6 L^p-Theorie

Für $1 < p < \infty$ gelten Sätze analog zu Satz 9.5.1 und Satz 9.2.1; das heisst, für $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ mit Abschätzungen. Hierfür benötigt man jedoch Hilfsmittel der harmonischen Analysis, insbesondere die sogenannte "Calderòn-Zygmund Ungleichung".

Kapitel 10

Schauder-Theorie

In diesem Abschnitt behandeln wir Existenz- und Regularitätssätze in Hölderräumen, wobei wir dem Zugang von Campanato folgen, wie er im Buch [6] von Giaquinta entwickelt wird.

10.1 Motivation

Betrachte des Randwertproblem

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) = -\frac{\partial}{\partial x_i} f_i + h \quad \text{in } \Omega, \tag{10.1.1}$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{10.1.2}$$

wo $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ und (a_{ij}) mit $a_{ij} = a_{ji}$ gleichmässig elliptisch; das heisst, mit Konstanten $0 < \lambda < \Lambda$ gilt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \colon \lambda \left|\xi\right|^2 \leq a_{ij}(x)\xi^i \xi^j \leq \Lambda \left|\xi\right|^2, \tag{10.1.3}$$

gleichmässig in $x \in \Omega$.

Bemerkung 10.1.1. i) Später werden wir die allgemeinere Form (10.4.1) der Gleichung (10.1.1) betrachten.

ii) Zu $f_1, \ldots, f_n, h \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ mit (10.1.3) gibt es genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (10.1.1), (10.1.2).

Beweis. OBdA $u_0 = 0$. (Betrachte sonst $\tilde{u} = u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{f}_i = f_i - a_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$). Die im Beweis von Satz 9.5.1 eingeführte Bilinearform $(\cdot,\cdot)_a$ definiert ein äquivalentes Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$. Die Behauptung folgt mit Satz 4.3.2. $\square$

Für genügend glatte Daten f, h und a_{ij} erwarten wir klassische Regularität $u \in C^2(\bar{\Omega})$ der in Bemerkung 10.1.1.ii) konstruierten schwachen Lösung. Diese erhalten wir mit den Methoden des vorangegangenen Abschnitts, falls $a_{ij} \in C^{k+1}$, $f_i \in H^{k+1}$, $h_i \in H^k$ für ein $k > \frac{n}{2}$, da unter diesen Annahmen nach

Satz 9.5.1 zunächst gilt $u \in H^{k+2}(\Omega)$ und $H^{k+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ gemäss Korollar 9.1.1. Derartige Regularitätsanforderungen an die Daten scheinen aber sehr einschränkend und wenig natürlich. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist daher, diese Bedingungen soweit wie möglich abzuschwächen. Wir betrachten dafür zunächst vereinfachte Formen der Gleichung (10.1.1).

10.2 Campanato-Abschätzungen

Sei $v \in H^1$ schwache Lösung von

$$A^{(0)}v = -\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial v}{\partial x_j}\big) = 0 \text{ in } B_R(0) \subset \mathbb{R}^n, \tag{10.2.1}$$

wobei $a_{ij}^{(0)} = a_{ji}^{(0)}$ konstant und elliptisch mit (10.1.3). Nach einer linearen Transformation geht (10.2.1) über in (9.1.1), und mit Satz 9.2.1 folgt $v \in C^\infty(B_R(0))$. Für $0 < r < R$ setze

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{0,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))}\int_{B_r(0)} v(x)\, dx.$$

Satz 10.2.1. *Für $v \in H^1(B_R(0))$ mit (10.2.1) gilt*

i)

$$\int_{B_r(0)} |v|^2\, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R(0)} |v|^2\, dx, \quad 0 < r \le R; \tag{10.2.2}$$

ii)

$$\int_{B_r(0)} |v - \bar{v}_r|^2\, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} |v - \bar{v}_R|^2\, dx, \quad 0 < r \le R. \tag{10.2.3}$$

Beweis. OBdA sei $R = 1$; betrachte sonst $\tilde{v}(x) = v(Rx)$, $x \in B_1(0)$. Zudem genügt es, $r \le \frac{1}{4}$ zu betrachten. (Wähle $C \ge 4^n$.)

i) Sei zunächst $A^{(0)} = -\Delta$. Mit Satz 9.2.1 und dem Sobolev-Einbettungssatz, Satz 9.1.1, erhalten wir für $k > \frac{n}{2} - 2$

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^\infty(B_{1/4}(0))} &\le C\,\|v\|_{H^{k+2}(B_{1/4}(0))}\\ &\le C\big(\,\|\Delta v\|_{H^k(B_{1/2}(0))} + \|v\|_{H^1(B_{1/2}(0))}\big) = C\,\|v\|_{H^1(B_{1/2}(0))}\,.\end{aligned}$$

Wähle $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Dann gilt

$$0 = \int_{B_1(0)} (-\Delta v)v\varphi^2\, dx = \int_{B_1(0)} |\nabla v|^2\, \varphi^2\, dx + 2\int_{B_1(0)} \nabla v\varphi \cdot v\nabla\varphi\, dx.$$

Mit der Youngschen Ungleichung

$$2\,|a \cdot b| \le \frac{|a|^2}{2} + 2|b|^2$$

für $a = \nabla v \varphi,\ b = v \nabla \varphi \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$\Big|2 \int_{B_1(0)} \nabla v \varphi \cdot v \nabla \varphi \, dx\Big| \le \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2 dx + 2 \int_{B_1(0)} |v|^2 |\nabla \varphi|^2 dx$$

und damit

$$\int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2 dx \le 4 \int_{B_1(0)} |v|^2 |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Nach Wahl von φ ergibt dies die Abschätzung

$$\|v\|^2_{H^1(B_{1/2}(0))} \le \|\nabla v\|^2_{L^2(B_{1/2}(0))} + \|v\|^2_{L^2(B_{1/2}(0))} \le C \int_{B_1(0)} |v|^2 \, dx. \quad (10.2.4)$$

Für $0 < r < 1/4$ folgt

$$\int_{B_r(0)} |v|^2 \, dx \le Cr^n \|v\|^2_{L^\infty(B_{1/4}(0))} \le Cr^n \|v\|^2_{H^1(B_{1/2}(0))} \le Cr^n \int_{B_1(0)} |v|^2 \, dx,$$

wie gewünscht.

ii) Betrachte $w = v - \bar{v}_1$. Mit der Poincaré'schen Ungleichung, Lemma 7.1.2, folgt

$$\int_{B_r(0)} |v - \bar{v}_r|^2 \, dx = \int_{B_r(0)} |w - \bar{w}_r|^2 \, dx \le Cr^2 \int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Da mit w auch die Komponenten von ∇w harmonisch sind, folgt für $0 < r < R = 1/2$ mit (10.2.2) und (10.2.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 &\le Cr^n \int_{B_{1/2}(0)} |\nabla w|^2 \, dx \le Cr^n \int_{B_1(0)} |w|^2 \, dx \\ &= Cr^n \int_{B_1(0)} |v - \bar{v}_1|^2 \, dx, \end{aligned}$$

also (10.2.3).

iii) Sei nun $a^{(0)} = (a^{(0)}_{ij})$ mit $a^{(0)}_{ij} = a^{(0)}_{ji}$ elliptisch. Nach einer Rotation R gilt $Ra^{(0)}R^t = (\lambda_i \delta_{ij})$ mit $0 < \lambda \le \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n \le \Lambda$. Nach einer Streckung S der Koordinaten-Achsen erhalten wir $SR\, a^{(0)} R^t S^t = id$.

Sei $T = SR \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nach Bemerkung 9.3.1 ist $w = v \circ T^{-1}$ harmonisch auf $T\big(B_1(0)\big)$. Sei $0 < \delta \le 1$ maximal mit

$$B_\delta(0) \subset T\big(B_1(0)\big) \subset B_{1/\delta}(0).$$

Dann folgt auch

$$B_{\delta r}(0) \subset T\big(B_r(0)\big) \subset B_{r/\delta}(0), \quad 0 < r < 1.$$

Mit (10.2.2) für $A^{(0)} = -\Delta$ erhalten wir für $0 < r < \delta^2/4$:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |v|^2 \, dx &\le C \int_{B_{r/\delta}(0)} |w|^2 \, dx \\ &\le Cr^n \delta^{-2n} \int_{B_\delta(0)} |w|^2 \, dx \le C(\delta) r^n \int_{B_1(0)} |v|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Für (10.2.3) erfolgt die Abschätzung analog. □

Eine zu Satz 10.2.1 analoge Aussage gilt für Lösungen $v \in H^1(B_R^+(0))$ von (10.2.1) auf

$$B_R^+(0) = \{(x', x_n) \in B_R(0);\ x_n > 0\}$$

mit

$$v = 0 \ \text{ auf } \partial\mathbb{R}_+^n \cap B_R(0). \tag{10.2.5}$$

Satz 10.2.2. *Sei $v \in H^1(B_R^+(0))$ Lösung von* (10.2.1), (10.2.5), $0 < r < R$. *Dann gilt*

i)

$$\int_{B_r^+(0)} |v|^2\, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} |v|^2\, dx. \tag{10.2.6}$$

ii)

$$\int_{B_r^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^2 dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^2 dx,\ 1 \le i \le n-1,$$

iii)

$$\int_{B_r^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|^2 dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n} \int_{B_R^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|^2 dx,$$

iv)

$$\int_{B_r^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_n} - \overline{\Big(\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big)}_r\Big|^2 dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_n} - \overline{\Big(\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big)}_R\Big|^2 dx.$$

Bemerkung 10.2.1. Setzen wir v fort auf $B_R(0)$ mittels

$$v(x', x_n) = -v(x', -x_n),\ x_n < 0,$$

mit

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_n) = -\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_n),\ 1 \le i \le n-1,$$

also auch

$$\overline{\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)}_r = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = 0,\ 1 \le i \le n-1,$$

und mit

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', -x_n),$$

so können wir ii) und iv) zusammenfassen zu

v)

$$\int_{B_r(0)} \big|\nabla v - (\overline{\nabla v})_r\big|^2 \ dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} \big|\nabla v - (\overline{\nabla v})_R\big|^2 \ dx.$$

Im Allgemeinen ist das so ergänzte v keine Lösung von $A^{(0)}v = 0$ in $B_R(0)$.

Beweis von Satz 10.2.2. i) Sei zunächst $A^{(0)} = -\Delta$. Setze v fort zu $v \in H^1(B_R(0))$ mit $v(x', x_n) = -v(x', -x_n)$. Dann ist v schwach harmonisch mit

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} v \, dx = 0.$$

Die Behauptung folgt mit Satz 10.2.1.

Für allgemeine $A^{(0)}$ verfahren wir analog zum Beweis von Satz 10.2.1. Wähle eine lineare Tranformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $w = v \circ T^{-1}$ harmonisch auf $T(B_R^+(0)) =: \Omega$ und dazu $\delta > 0$ maximal mit $B_{\delta R}(0) \subset T(B_R(0))$. Für $0 < r < \delta R$ folgt die Behauptung mit i). Für $\delta R < r < R$ ist die Behauptung wahr für genügend grosses $C > 0$.

ii) Die Abschätzung (10.2.6) gilt auch für jede tangentiale Ableitung $\partial v / \partial x_i$, $1 \le i \le n-1$.

iii) Zur Abschätzung von $\partial v / \partial x_n$ betrachte wieder $w = v \circ T^{-1}$ mit $\Delta w = 0$ in $T(B_R^+(0))$. Setze w antisymmetrisch fort auf $B_{\delta R}(0) \subset T(B_R(0))$ und benutze Satz 10.2.1. Für $0 < r < \delta R$ erhalten wir auf diesem Wege die Abschätzung

$$\int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 \, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R(0)} |\nabla w|^2 \, dx$$

sowie

$$\int_{B_r(0)} \big|\nabla w - (\overline{\nabla w})_r\big|^2 dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} \big|\nabla w - (\overline{\nabla w})_R\big|^2 dx.$$

Es folgt

$$\int_{B_r^+(0)} |\nabla v|^2 \, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^+(0)} |\nabla v|^2 \, dx, \; 0 < r < R,$$

wie geünscht.

iv) Zum Beweis der noch fehlenden Abschätzung benutzen wir die folgende Minimaleigenschaft des Mittelwerts.

Behauptung. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für jedes $x_0 \in \Omega$, $0 < r < 1$ die Abschätzung

$$\int_{\Omega_r(x_0)} \big|f - \bar{f}_{r,x_0}\big|^2 \, dx = \min_{a \in \mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - a|^2 \, dx.$$

Beweis. Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - a_0|^2 \, dx = \min_{a \in \mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - a|^2 \, dx.$$

Mit

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{da}\Big|_{a=a_0} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - a|^2 \, dx = \int_{\Omega_r(x_0)} (a_0 - f) \, dx$$

folgt die Behauptung. □

Somit erhalten wir mit Satz 10.2.1 für $0 < r < \delta^2 R$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^+(0)} \left|\nabla v - (\overline{\nabla v})_r\right|^2 dx &= \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r^+(0)} |\nabla v - a|^2 \, dx \\
&\le C \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r/\delta}(0)} |\nabla w - a|^2 \, dx = C \int_{B_{r/\delta}(0)} \left|\nabla w - (\overline{\nabla w})_{r/\delta}\right|^2 dx \\
&\le C \Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_{\delta R}(0)} \left|\nabla w - (\overline{\nabla w})_R\right|^2 dx \\
&= C \Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\delta R}(0)} |\nabla w - a|^2 \, dx \\
&\le C \Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} \left|\nabla v - (\overline{\nabla v})_R\right|^2 dx,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis von zu (10.2.2), (10.2.3), (10.2.6) analogen Abschätzungen für Lösungen $u \in H^1$ der Gleichung

$$A^{(0)} u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h. \tag{10.2.7}$$

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz.

Lemma 10.2.1. *Sei $h \in L^2(B_R^{(+)}(0))$, $w \in H_0^1(B_R^{(+)}(0))$. Dann gilt für jedes $\delta > 0$ die Abschätzung*

$$\Big|\int_{B_R^{(+)}(0)} hw \, dx\Big| \le \delta \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 \, dx + C\delta^{-1} R^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2 \, dx.$$

Beweis. Mit der Youngschen Ungleichung $2\,|ab| \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $\varepsilon = \delta R^{-2}$, schätzen wir ab

$$\Big|\int_{B_R^{(+)}(0)} hw \, dx\Big| \le \|h\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \le \delta R^{-2} \|w\|_{L^2}^2 + \delta^{-1} R^2 \|h\|_{L^2}^2 .$$

Gemäss der Poincaré'schen Ungleichung, Lemma 7.1.2, gilt weiter

$$\|w\|_{L^2}^2 = \int_{B_R^{(+)}(0)} |w|^2 \, dx \le C R^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Die Behauptung folgt. □

Lemma 10.2.2. *Sei $u \in H^1(B_R(0))$, bzw. sei $u \in H^1(B_R^+(0))$ mit (10.2.5) Lösung von (10.2.7) auf $B_R^{(+)}(0)$, wobei $f = (f_i)$, $h \in L^2(B_R^{(+)}(0))$. Dann gelten für $0 < r < R$ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla u|^2 \, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla u|^2 \, dx + C \int_{B_R^{(+)}(0)} \left|f - \bar f_R\right|^2 dx \\
+ C R^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2 \, dx
\end{aligned}$$

sowie, mit der Konvention aus Bemerkung 10.2.1,

$$\int_{B_r(0)} \left|\nabla u - (\overline{\nabla u})_r\right|^2 dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} \left|\nabla u - (\overline{\nabla u})_R\right|^2 dx$$
$$+ C \int_{B_R^{(+)}(0)} |f - \bar f_R|^2 dx + CR^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2\, dx.$$

Beweis. Zerlege $u = v + w$, wobei $A^{(0)}v = 0$ und $w \in H_0^1(B_R^{(+)}(0))$. Mit Satz 10.2.1 und Satz 10.2.2 folgt

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla u|^2\, dx &\le 2\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla v|^2\, dx + 2\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\, dx \\
&\le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla v|^2\, dx + 2\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\, dx \\
&\le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla u|^2\, dx + C\int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^{(+)}(0)} (A^0 w) w\, dx &= \int_{B_R^{(+)}(0)} \Big(-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_j}\Big)\Big) w\, dx \\
&= \int_{B_R^{(+)}(0)} a_{ij}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\, dx \ge \lambda \left\|\nabla w\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

wegen $A^{(0)}w = A^{(0)}u = h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ aus Lemma 10.2.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\lambda \left\|\nabla w\right\|_{L^2}^2 &\le \int_{B_R^{(+)}(0)} (A^{(0)}w) w\, dx = \int_{B_R^{(+)}(0)} (h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}) w\, dx \\
&\le \frac{\lambda}{4}\left\|\nabla w\right\|_{L^2}^2 + CR^2 \left\|h\right\|_{L^2}^2 + \int_{B_R^{(+)}(0)} \big(f_i - (\bar f_i)_R\big)\frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx \\
&\le \frac{\lambda}{2}\left\|\nabla w\right\|_{L^2}^2 + C\int_{B_R^{(+)}(0)} |f - \bar f_R|^2 dx + CR^2 \left\|h\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Mit (10.2.3), bzw. Bemerkung 10.2.1.v) folgt die 2. Behauptung analog. □

10.3 Morrey-Campanato-Räume

Wie kann man die im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Abschätzungen nutzen?

Definition 10.3.1. (Morrey) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \le \nu \le n$. Setze*

$$L^{2,\nu}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega);\ [f]_{L^{2,\nu}}^2 = \sup_{x_0\in\Omega,\ 0<r<1} \big(r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2\, dx\big) < \infty\}$$

mit Norm

$$\|f\|_{L^{2,\nu}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + [f]_{L^{2,\nu}(\Omega)}.$$

Bemerkung 10.3.1. i) Es gilt $L^{2,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

ii) Weiter gilt $L^{2,\nu}(\Omega) = \{0\}$ für $\nu > n$.

Lemma 10.3.1. *Sei Ω vom Typ A für ein $A > 0$, und sei $0 \le \nu < n$. Dann gilt*

$$L^{2,\nu}(\Omega) \cong \mathcal{L}^{2,\nu}.$$

Beweis. i) Seien $f \in L^{2,\nu}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r < 1$. Mit der Minimaleigenschaft des Mittels folgt

$$\int_{\Omega_r(x_0)} \left|f - \bar{f}_{r,x_0}\right|^2 \, dx \le \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 \, dx \le r^\nu \|f\|^2_{L^{2,\nu}},$$

also

$$[f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}} \le \|f\|_{L^{2,\nu}}.$$

ii) Sei $f \in \mathcal{L}^{2,\nu}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r < 1$. Schätze ab

$$⨍_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 dx \le 2 ⨍_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 dx + 2|\bar{f}_{r,x_0}|^2.$$

Setze $r_i = 2^i r$, $i \in \mathbb{N}_0$. Wähle $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $2 > r_{i_0} \ge 1$. Dann gilt

$$|\bar{f}_{r,x_0}| \le \sum_{i=1}^{i_0} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| + |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|$$

und

$$\begin{aligned} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| &\le C\Big(⨍_{\Omega_{r_{i-1}}(x_0)} |f - \bar{f}_{r_i,x_0}|^2 dx\Big)^{1/2} \\ &\le C\Big(⨍_{\Omega_{r_i}(x_0)} |f - \bar{f}_{r_i,x_0}|^2 dx\Big)^{1/2} \le C r_i^{\frac{\nu-n}{2}} [f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}. \end{aligned}$$

Da $\nu < n$, konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^\infty r_i^{\frac{\nu-n}{2}} = r^{\frac{\nu-n}{2}} \sum_{i=1}^\infty 2^{i\frac{\nu-n}{2}} = C r^{\frac{\nu-n}{2}}.$$

Es folgt

$$\Big(\sum_{i=1}^{i_0} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}|\Big)^2 \le C r^{\nu-n} [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\nu}}.$$

Zusammen mit der Abschätzung

$$r^{n-\nu} |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|^2 \le |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|^2 \le C \int_\Omega |f|^2 \, dx$$

ergibt dies

$$\begin{aligned} r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 \, dx &\le 2r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 dx + C r^{n-\nu} |\bar{f}_{r,x_0}|^2 \\ &\le C[f]^2_{\mathcal{L}^{2,\nu}} + C\|f\|^2_{L^2} \le C\|f\|^2_{\mathcal{L}^{2,\nu}}, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 10.3.2. Für $\nu = n$ gilt die Aussage nicht, da einerseits gemäss Bemerkung 10.3.1.i) gilt $L^{2,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, während wir andererseits aber in Beispiel 8.1.2.ii) und Satz 8.6.6 gezeigt haben, dass

$$\mathcal{L}^{2,n}(\Omega) \supset W^{1,n}(\Omega) \ni \log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) \notin L^\infty(\Omega).$$

Lemma 10.3.2. *Sei $\phi\colon]0, R_0] \to [0,\infty[$ monoton wachsend mit*

$$\phi(r) \le A\Big(\big(\frac{r}{R}\big)^\alpha + \varepsilon\Big)\phi(R) + BR^\beta, \quad 0 < r < R \le R_0, \tag{10.3.1}$$

wobei $0 < \beta < \alpha$, $A, B \in \mathbb{R}$. Dann existieren $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A,\alpha,\beta) > 0$ und $C = C(A,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$, so dass für $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ folgt

$$\phi(r) \le C\Big(\big(\frac{r}{R}\big)^\beta \phi(R) + Br^\beta\Big), \quad 0 < r < R \le R_0.$$

Beweis. OBdA sei $A \ge 1$. Wähle Zahlen γ, $\tau > 0$ mit $\beta < \gamma < \alpha$, $0 < \tau < 1$, so dass

$$2A\tau^\alpha = \tau^\gamma.$$

Setze $\varepsilon_0 := \tau^\alpha$ und nimm an, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$. Für $0 < R \le R_0$, $r = \tau R$ ergibt (10.3.1) die Abschätzung

$$\phi(\tau R) \le 2A\tau^\alpha \phi(R) + BR^\beta = \tau^\gamma \phi(R) + BR^\beta.$$

Iteration ergibt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\phi(\tau^{k+1}R) &\le \tau^\gamma \phi(\tau^k R) + B(\tau^k R)^\beta \\
&\le \tau^{2\gamma}\phi(\tau^{k-1}R) + \tau^\gamma B(\tau^{k-1}R)^\beta + B(\tau^k R)^\beta \\
&\dots \\
&\le \tau^{(k+1)\gamma}\phi(R) + B\sum_{l=0}^{k} \tau^{l\gamma}\tau^{(k-l)\beta}R^\beta \\
&= \tau^{(k+1)\gamma}\phi(R) + B\sum_{l=0}^{k} (\tau^{\gamma-\beta})^l (\tau^k R)^\beta.
\end{aligned}$$

Zu $0 < r < \tau^2 R$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^{k+2}R < r \le \tau^{k+1}R$. Mit der Monotonie von ϕ, der Ungleichung $\tau^{(k+1)\gamma} \le \tau^{(k+1)\beta}$, und unter Beachtung der Konvergenz der Reihe $C_0 := \sum_{l=0}^{\infty} (\tau^{\gamma-\beta})^l < \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi(r) &\le \phi(\tau^{k+1}R) \le \tau^{(k+1)\beta}\phi(R) + BC_0(\tau^k R)^\beta \\
&\le \tau^{-\beta}\Big(\frac{r}{R}\Big)^\beta \phi(R) + BC_0\tau^{-2\beta}r^\beta \le C\Big(\big(\frac{r}{R}\big)^\beta \phi(R) + Br^\beta\Big),
\end{aligned}$$

wobei $C = \max\{\tau^{-\beta}, C_0\tau^{-2\beta}\}$. Die Behauptung folgt. □

Satz 10.3.1. *Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, bzw. $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ mit $u = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ Lösung von (10.2.7) mit supp(u) $\subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\mathbb{R}^n_{(+)})$, $h \in L^{2,\nu}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ mit $0 < \mu = \nu + 2 < n + 2$. Dann gilt*

$$\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\mathbb{R}^n_{(+)}),$$

und

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\mu}} \le C(\|u\|_{H^1} + [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}).$$

Beweis. Zu zeigen ist für $x_0 \in \mathbb{R}^n_{(+)}$, $0 < r < 1$ die Abschätzung

$$r^{-\mu} \int_{B_r(x_0)(\cap\mathbb{R}^n_+)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2 dx \le C(\|u\|^2_{H^1} + [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}). \quad (10.3.2)$$

Wie eine elementargeometrische Betrachtung zeigt, genügt es für $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, die Fälle $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n_+$, bzw. $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ zu betrachten.

Setze

$$\phi(r) = \int_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2 dx,$$

wobei wir wie in Lemma 10.2.2 im Falle $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, die Funktion u antisymmetrisch ergänzen. Für $0 \le r < R \le 1$ gilt wegen der Minimaleigenschaft des Mittels

$$\phi(r) \le \int_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2 dx \le \phi(R).$$

Weiter ergibt Lemma 10.2.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\phi(r) &\le C\big(\frac{r}{R}\big)^{n+2}\phi(R) + C\int_{B_R^{(+)}(x_0)} |f - \bar{f}_R|^2 dx + CR^2 \int_{B_R^{(+)}(x_0)} |h|^2\, dx \\ &\le C\big(\frac{r}{R}\big)^{n+2}\phi(R) + CR^\mu [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + CR^{2+\nu}\, \|h\|^2_{L^{2,\nu}}\,.\end{aligned}$$

Mit Lemma 10.3.2 folgt für $\mu < n + 2$ und $0 < r < R = 1$ die Ungleichung

$$\phi(r) \le Cr^\mu \phi(1) + Cr^\mu\big([f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|^2_{L^{2,\nu}}\big).$$

Nach Division durch r^μ erhalten wir (10.3.2). □

Bemerkung 10.3.3. Speziell für $\mu = \nu + 2 = n + 2\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ ergibt Satz 10.3.1 zusammen mit Satz 8.6.5, dass $\nabla u \in C^{0,\alpha}$. Da weiter für $f \in C^{0,\alpha}$ gemäss Satz 8.6.7 auch gilt $f \in \mathcal{L}^{2,\mu}$, können wir die Regularitätsabschätzung in Satz 10.3.1 auch in der Form schreiben

$$\|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}} \le C(\|u\|_{H^1} + [f]_{C^{0,\alpha}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}).$$

10.4 A-priori Abschätzungen in Hölder-Normen

Betrachte nun die Gleichung

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) + cu = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h, \quad (10.4.1)$$

wobei $a_{ij} = a_{ji}$ gleichmässig elliptisch und mit weiteren, noch zu spezifizierenden Regularitätsannahmen.

Lemma 10.4.1. *i) Sei $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \alpha < 1$ Lösung von (10.4.1), wobei $a_{ij}, f_i \in C^\alpha$, $c, h \in C^0$, und $supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann existieren Konstanten $C, \delta > 0$ nur abhängig von $a_{ij}(0) =: a_{ij}^{(0)}$, so dass*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}\big),$$

falls gilt

$$\sup_{x \in supp(u)} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)| < \delta.$$

ii) Eine analoge Aussage gilt, falls $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ Lösung von (10.4.1) mit $u \equiv 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ und $supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Schreibe (10.4.1) äquivalent als

$$\begin{aligned} A^{(0)}u &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) = (A^{(0)}u - Au) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\big((a_{ij}^{(0)} - a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h - cu = -\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f}_i + \tilde{h}, \end{aligned} \tag{10.4.2}$$

mit $\tilde{h} = h - cu \in C^0$, $\tilde{f}_i = (a_{ij}^{(0)} - a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j} + f_i \in C^\alpha$, $1 \le i \le n$.

Setze $\mu = n + 2\alpha$, $\nu = \mu - 2 = n - 2 + 2\alpha < n$. Dann gilt $C^\alpha \cong \mathcal{L}^{2,\mu}$ gemäss Satz 8.6.7, bzw. $C^0 \hookrightarrow L^\infty \hookrightarrow L^{2,\nu}$ auf $supp(u)$, und wir können die rechte Seite von (10.4.2) auffassen als $\tilde{f}_i \in \mathcal{L}^{2,\mu}$, bzw. $\tilde{h} \in L^{2,\nu}$. Mit Satz 10.3.1 und Bemerkung 10.3.3 folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{C^\alpha} &\le C\big(\|u\|_{H^1} + \|\tilde{f}\|_{C^\alpha} + \|\tilde{h}\|_{L^{2,\nu}}\big) \\ &\le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}\big) + C_1\delta\,\|\nabla u\|_{C^\alpha} + C\,\|u\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Für $\delta < \frac{C_1}{2}$ folgt

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}\big) + C\,\|u\|_{C^1}.$$

Die Behauptung erhalten wir, indem wir das nachfolgende Lemma 10.4.2 mit $X = C^{1,\alpha}(\Omega)$, $Y = C^1(\overline{\Omega})$, $Z = H^1(\Omega)$ anwenden für ein $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $supp(u) \subset \Omega$. □

Lemma 10.4.2. (Ehrling, Gagliardo, Nirenberg) *Seien X, Y, Z Banachräume mit stetigen Einbettungen $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, wobei $X \hookrightarrow Y$ kompakt. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Konstante $C(\epsilon)$ mit*

$$\forall x \in X\colon\ \|x\|_Y \le \epsilon\,\|x\|_X + C(\epsilon)\,\|x\|_Z.$$

Beweis. Nimm widerspruchsweise an, es existieren $(x_k) \subset X$, $\epsilon > 0$ mit

$$1 = \|x_k\|_Y \ge \epsilon\,\|x_k\|_X + k\,\|x_k\|_Z, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_k) \subset X$ beschränkt, und $\|x_k\|_Z \le \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Da $X \hookrightarrow Y$ kompakt, gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $y \in Y$ mit $x_k \to y$ in Y $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Da $Y \hookrightarrow Z$, gilt auch $x_k \to y$ in Z $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Jedoch gilt

$$\|y\|_Z = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} \|x_k\|_Z = 0;$$

das heisst, $y = 0$, und mit

$$1 = \|x_k\|_Y \to 0 \quad (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

folgt der gewünschte Widerspruch. □

Analog zu Lemma 10.4.1 gilt

Lemma 10.4.3. *i) Sei $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \alpha < 1$ Lösung von (10.4.1), wobei $a_{ij}, f_i \in C^{1,\alpha}$, $c, h \in C^\alpha$, und mit supp$(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Weiter sei $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}(0)$. Dann existieren Konstanten $C, \delta = \delta(a_{ij}^{(0)}) > 0$, so dass*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\, \|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\,\big),$$

falls gilt

$$\sup_{supp(u)} \left| a_{ij} - a_{ij}^{(0)} \right| < \delta.$$

ii) Eine analoge Aussage gilt, falls $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u \equiv 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ und mit supp$(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Differenziere (10.4.2) in Richtung x_k, wobei $1 \le k \le n-1$ im Falle ii). Dann ist $U_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ Lösung von

$$A^{(0)} U_k = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_k} - \delta_{ik}\tilde{h}\Big)$$

mit $U_k \equiv 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ im Falle von ii), wobei

$$\tilde{f}_i = f_i + (a_{ij}^{(0)} - a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C^{1,\alpha}, \quad \tilde{h} = h - cu \in C^\alpha.$$

Mit Satz 10.3.1 folgt

$$\begin{aligned}\|\nabla U_k\|_{C^\alpha} &\le C\big(\|U_k\|_{H^1} + \|\tilde{f}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\tilde{h}\|_{C^\alpha}\big)\\ &\le C\big(\,\|u\|_{H^2} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\,\big) + C_1\delta\,\|u\|_{C^{2,\alpha}} + C\,\|u\|_{C^2}\,.\end{aligned}$$

Im Falle i) folgt nach Summation über k für $C_1\delta < \frac{1}{2n}$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\,\|u\|_{H^2} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\,\big) + C\,\|u\|_{C^2}\,,$$

Mit Lemma 10.4.2 erhalten wir zudem

$$\|u\|_{H^2} + \|u\|_{C^2} \le \epsilon\,\|u\|_{C^{2,\alpha}} + C\,\|u\|_{H^1}\,,$$

und damit die Behauptung.

Im Fall ii) benutzen wir zunächst (10.4.1), um abzuschätzen

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial U_n}{\partial x_n}\right\|_{C^\alpha} &\le C\,\|Au\|_{C^\alpha} + C\sum_{k=1}^{n-1}\|\nabla U_k\|_{C^\alpha} + C\,\|u\|_{C^{1,\alpha}}\\ &\le C\big(\,\|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\,\big) + C\big(\,\|u\|_{H^2} + \delta\,\|u\|_{C^{2,\alpha}} + \|u\|_{C^2}\,\big).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wie im Fall i). □

Um zu Lemma 10.4.3 vergleichbare Abschätzungen für Lösungen von (10.4.1) auf Gebieten $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zu erhalten, benötigen wir eine geometrische Interpretation der Divergenz. Sei $f = (f^1, \dots, f^n)$ ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty : \int_\Omega d\varphi \cdot f\; dx = -\int_\Omega \varphi\; div_{g_{\mathbb{R}^n}} f\; dx,$$

wobei $d\varphi \cdot f = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} f^i$, und mit

$$div_{g_{\mathbb{R}^n}} f = \frac{\partial f^i}{\partial x^i}.$$

Analog erklären wir für ein Vektorfeld f auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) die Divergenz bzgl. g durch

$$\int_U d\varphi \cdot f\sqrt{|g|}\; dx =: -\int_U \varphi\; div_g f\sqrt{|g|}\; dx$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(U)$ auf einer Koordinatenumgebung U, mit

$$div_g f := \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial(\sqrt{|g|}f^i)}{\partial x^i}\;.$$

Diese Definition ist "natürlich": Falls $H\colon N \to M$ ein Diffeomorphismus einer Koordinaten-Umgebung $V \subset N$ auf die Koordinaten-Umgebung $U \subset M$ ist mit $H^*g = h$, und falls $\varphi \in C_c^\infty(U)$, so gilt mit $H^*\varphi = \varphi \circ H$, $H^*f = (dH)^{-1} f \circ H$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\int_M d\varphi \cdot f\sqrt{|g|}\; dx &= \int_N d(H^*\varphi)\cdot H^*f\sqrt{|h|}\; dy = -\int_N H^*\varphi\; div_h(H^*f)\sqrt{|h|}\; dy\\ &= -\int_M \varphi\; div_g f\sqrt{|g|}\; dx = -\int_N H^*\varphi\; H^*(div_g f)\sqrt{|h|}\; dx\end{aligned}$$

Da $\varphi \in C_c^\infty(U)$ beliebig ist, folgt

$$(div_g f)\circ H = H^*(div_g f) = div_h(H^*f) = div_{H^*g}\big((dH)^{-1} f \circ H\big). \qquad (10.4.3)$$

Satz 10.4.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$ für ein $0 < \alpha < 1$, Weiter seien $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ gleichmässig elliptisch, $c \in C^\alpha(\Omega)$.*

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass für jedes $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, jedes $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ und jedes $h \in C^\alpha(\Omega)$ für jede Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ von (10.4.1) mit $u = u_0$ auf $\partial\Omega$ gilt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\,\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}}\,\big).$$

Beweis. OBdA sei $u_0 = 0$. Betrachte sonst $\tilde{u} = u - u_0$, $\tilde{f}_i = f_i + a_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}$, $1 \le i \le n$, mit

$$||\tilde{f}||_{C^{1,\alpha}} \le ||f||_{C^{1,\alpha}} + C||u_0||_{C^{2,\alpha}}.$$

Sei $\delta > 0$ die kleinste der in Lemma 10.4.1 und Lemma 10.4.3 auftretenden Konstanten $\delta(a_{ij}) > 0$. Überdecke $\bar{\Omega}$ mit offenen Mengen $U_l \subset\subset \mathbb{R}^n$, $1 \le l \le L$, so dass für $U_l \subset \Omega$ gilt

$$\sup_{x,y \in U_l} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| < \delta, \tag{10.4.4}$$

und so, dass für $U_l \not\subset \Omega$ ein $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $H_l \colon\ Q \to U_l$ existiert mit

$$H_l(Q_+) = U_l \cap \Omega, \quad H_l(Q_0) = U_l \cap \partial\Omega \tag{10.4.5}$$

sowie mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{x,y \in Q} |h_{ij}(x) - h_{ij}(y)| < \delta \tag{10.4.6}$$

wobei $(h_{ij}) = (h_{l,ij}) = H_l^*(a_{ij}(x_l))$ für ein $x_l \in U_l$. Die Bedingungen (10.4.4) und (10.4.6) kann man durch Verfeinern einer gegebenen Überdeckung stets erreichen.

Schliesslich sei (φ_l) eine Zerlegung der Eins bezüglich (U_l).

Zerlege

$$u = \sum_{l=1}^{L} u_l \ \text{ mit } u_l = u\varphi_l,\ 1 \le l \le L.$$

i) Sei $U_l \subset \Omega$. Dann löst $u_l = u\varphi_l$ die Gleichung

$$\begin{aligned} Au_l &= (Au)\varphi_l - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}u\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\Big) - a_{ij}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\Big(f_i\varphi_l + a_{ij}u\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\Big)}_{=\tilde{f}_{l,i}} + \underbrace{h\varphi_l + f_i\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - a_{ij}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}}_{=\tilde{h}_l} \end{aligned} \tag{10.4.7}$$

mit $supp(u_l) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Lemma 10.4.3 ergibt

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{C^{2,\alpha}} &\le C\big(\|u_l\|_{H^1} + ||\tilde{f}_l||_{C^{1,\alpha}} + ||\tilde{h}_l||_{C^\alpha}\big) \\ &\le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\big) + C\,\|u\|_{C^{1,\alpha}}. \end{aligned}$$

ii) Sei $U_l \not\subset \Omega$. Wie in (10.4.7) erhalten wir die Gleichung

$$Au_l = -\frac{\partial \tilde{f}_{l,i}}{\partial x_i} + \tilde{h}_l$$

mit

$$\tilde{f}_{l,i} = f_i\varphi_l + a_{ij}u\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}, \quad \tilde{h}_l = h\varphi_l + f_i\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - a_{ij}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Um diese Gleichung mittels H_l zu transformieren, fixieren wir $a_{ij}^{(l)} = a_{ij}(x_l)$ für ein $x_l \in U_l$ und definieren

$$A^{(l)}u_l := -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(l)}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\Big).$$

Mit

$$A^{(l)}u_l - Au_l = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big((a_{ij}^{(l)} - a_{ij})\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\Big) - cu_l$$

erhalten wir dann die Gleichung

$$A^{(l)}u_l = A^{(l)}u_l - Au_l - \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f}_{l,i} + \tilde{h}_l = -\frac{\partial}{\partial x_i}g_{l,i} + j_l,$$

wobei

$$g_{l,i} = \tilde{f}_{l,i} + (a_{ij}^{(l)} - a_{ij})\frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \quad j_l = \tilde{h}_l - cu_l.$$

Gemäss Bemerkung 9.3.1 und (10.4.3) erfüllt $v_l = u_l \circ H_l \in C^{2,\alpha}(Q_+)$ die Gleichung

$$-\Delta_{h_l}v_l = -\frac{1}{\sqrt{|h_l|}}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\sqrt{|h_l|}h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j}\Big) = -div_{h_l}(H_l^* g_l) + j_l \circ H_l;$$

das heisst, es gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j}\Big) &= h_l^{ij}\frac{\partial(\log\sqrt{|h_l|})}{\partial y_i}\frac{\partial v_l}{\partial y_j} - \frac{1}{\sqrt{|h_l|}}\frac{\partial}{\partial y_i}\big(\sqrt{|h_l|}(H_l^* g_l)_i\big) + j_l \circ H_l \\
&= \frac{\partial(\log\sqrt{|h_l|})}{\partial y_i}\Big(h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j} - (H_l^* g_l)_i\Big) - \frac{\partial}{\partial y_i}(H_l^* g_l)_i + j_l \circ H_l \\
&= -\frac{\partial}{\partial y_i}g_{l,i}^* + j_l^*
\end{aligned}$$

mit

$$g_l^* = H_l^* g_l = dH_l^{-1}g_l \circ H_l, \quad j_l^* = j_l \circ H_l + \frac{\partial(\log\sqrt{|h_l|})}{\partial y_i}\Big(h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j} - (H_l^* g_l)_i\Big).$$

Weiter gilt

$$v_l = 0 \text{ auf } Q_0, \ supp(v_l) \subset Q \subset\subset \mathbb{R}^n.$$

Lemma 10.4.3 ergibt

$$\begin{aligned}
\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} &\le C\,\|v_l\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\,\|v_l\|_{H^1} + \|g_l^*\|_{C^{1,\alpha}} + \|j_l^*\|_{C^\alpha}\,\big) \\
&\le C\big(\,\|u_l\|_{H^1} + \|g_l\|_{C^{1,\alpha}} + \|j_l\|_{C^\alpha} + \|u_l\|_{C^{1,\alpha}}\,\big) \\
&\le C\big(\,\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_l\|_{C^{1,\alpha}}\,\big) + C_1\delta\,\|u_l\|_{C^{2,\alpha}}
\end{aligned}$$

mit einer von l unabhängigen Konstanten C_1. Wähle $\delta \le C_1/2$. Es folgt

$$\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\,\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}\,\big), \ 1 \le l \le L.$$

Nach Summation über l erhalten wir

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le \sum_{l=1}^{L}\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\,\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}\,\big).$$

Mit Lemma 10.4.2 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 10.4.1. i) Analoge Abschätzungen gelten für $C^{2,\alpha}$-Lösungen u der Gleichung

$$-\Delta_g u = -div_g f + h$$

auf einer geschlossenen (kompakt, ohne Rand) Mannigfaltigkeit (M, g).

ii) Dasselbe gilt für Operatoren

$$Au = -a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + cu$$

mit gleichmässig elliptischen Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji} \in C^\alpha$. Schreibe dazu mit einer geeigneten Überdeckung (U_l) von Ω

$$Au = A^{(l)}u + (Au - A^{(l)}u) \text{ in } U_l,\ 1 \le l \le L,$$

wobei

$$A^{(l)}u = -a_{ij}^{(l)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(l)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$$

mit $a_{ij}^{(l)} = a_{ij}(x_l)$ für ein $x_l \in U_l \cap \Omega$. Der Störterm lässt sich abschätzen

$$\|Au - A^{(l)}u\|_{C^\alpha} \le \Big\|(a_{ij} - a_{ij}^{(l)})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{C^\alpha} \le C\,\|u\|_{C^2} + \delta\,\|u\|_{C^{2,\alpha}}\,,$$

wobei wir zu vorgegebenem $\delta_0 > 0$ durch Wahl einer genügend feinen Überdeckung (U_l) von Ω erreichen können, dass

$$\delta = \sup_{x \in U_l \cap \Omega,\ 1 \le l \le L} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_l)| < \delta_0.$$

Für genügend kleines $\delta_0 > 0$ liefert Satz 10.4.1 die gewünschte $C^{2,\alpha}$-Abschätzung.

10.5 Existenzsätze

Betrachte zunächst die Aufgabe

$$\begin{aligned} A^{(0)}u = -\Delta u = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h \ \text{ in } \Omega, \\ u = u_0 \ \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.5.1}$$

Satz 10.5.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^{k+2}, $k > \frac{n}{2} + \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in C^{2,\alpha}$, $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^{1,\alpha}$, $h \in C^\alpha$ genau eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ von (10.5.1), und*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\,\|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}}\big) \tag{10.5.2}$$

Beweis. OBdA sei $u_0 = 0$. (Sonst betrachte $\tilde{u} = u - u_0$, $\tilde{f} = f - \nabla u_0$.) Weiter gelte oBdA $f = 0$. (Sonst betrachte $\tilde{h} = h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in C^\alpha$.)

Sei $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ glättender Kern wie in Lemma 7.3.3, $h_\epsilon = h * \rho_\epsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\epsilon > 0$. Nach Satz 9.1.2 gibt es zu h_ϵ eine eindeutige Lösung $u_\epsilon \in \cap_{k\in\mathbb{N}} H^{k+2} \cap H_0^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u_\epsilon &= h_\epsilon \quad \text{in } \Omega \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.5.3}$$

Für $k > \frac{n}{2} + \alpha$ ergibt Satz 9.1.1, dass $u_\epsilon \in C^{2,\alpha}$, und gemäss Satz 10.4.1 gilt

$$\|u_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\|u_\epsilon\|_{H^1} + \|h_\epsilon\|_{C^\alpha} \big).$$

Weiter folgt aus (10.5.3) mit Lemma 7.1.2 die Abschätzung

$$c_0^{-1} \|u_\epsilon\|_{H^1}^2 \le \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (-\Delta u_\epsilon) u_\epsilon \, dx \le \|h_\epsilon\|_{L^2} \|u_\epsilon\|_{L^2} \le \|h_\epsilon\|_{L^2} \|u_\epsilon\|_{H^1} \, ;$$

das heisst, es gilt

$$\|u_\epsilon\|_{H^1} \le C \|h_\epsilon\|_{L^2} \le C \|h_\epsilon\|_{C^\alpha} \, .$$

Zudem gilt $\|h_\epsilon\|_{C^\alpha} \le \|h\|_{C^\alpha}$, denn einerseits können wir abschätzen

$$\|h_\epsilon\|_{L^\infty} = \sup |h * \rho_\epsilon| \le \|h\|_{L^\infty} \, ;$$

andererseits erhalten wir

$$[h_\epsilon]_{C^\alpha} \le \sup_{x_1 \ne x_2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(x_1 - y) - h(x_2 - y)| \, \rho_\epsilon(y)}{|x_1 - x_2|^\alpha} \, dy \le [h]_{C^\alpha}.$$

Mit Satz 8.6.2 folgt $u_\epsilon \to u$ in C^2 für eine geeignete Folge $\epsilon \to 0$, und $u \in C^{2,\alpha}$ löst

$$\begin{aligned} -\Delta u &= h \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.1.2 ist u eindeutig bestimmt. □

Satz 10.5.2. *Die Aussage von Satz 10.5.1 bleibt richtig für den Operator*

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big) + cu$$

statt $A^{(0)} = -\Delta$, *sofern* $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}$ *gleichmässig elliptisch,* $0 \le c \in C^\alpha$.

Bemerkung 10.5.1. Die Eigenfunktionen $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$ des Laplace-Operators erfüllen

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi_i - \lambda_i \varphi_i &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \varphi_i &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 10.5.2 gilt also nicht für beliebige $c \in C^\alpha$.

Beweis von Satz 10.5.2. Wie vorher genügt es, $u_0 \equiv 0$ und $f \equiv 0$ zu betrachten. Wir benutzen die "Kontinuitätsmethode": Für $0 \le t \le 1$ setze

$$A^{(t)} u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(t)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big) + c^{(t)} u$$

mit $a_{ij}^{(t)} = (1-t)\delta_{ij} + ta_{ij} = a_{ji}^{(t)}$, $c^{(t)} = tc$.

Offenbar ist $(a_{ij}^{(t)})$ gleichmässig elliptisch mit Konstanten $0 < \lambda \le \Lambda$ unabhängig von t, und $c^{(t)} \ge 0$. Für $u \in C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned}\lambda \left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 &\le \int_\Omega a_{ij}^{(t)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx \le \int_\Omega (A^{(t)}u)u\, dx \\ &\le \|A^{(t)}u\|_{L^2}\left\|u\right\|_{L^2} \le C\|A^{(t)}u\|_{C^\alpha}\left\|u\right\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Mit der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.2, erhalten wir die Abschätzung

$$\left\|u\right\|_{H^1} \le C\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 \le C_1\|A^{(t)}u\|_{C^\alpha} \tag{10.5.4}$$

mit einer von $t \in [0,1]$ unabhängigen Konstanten C_1. Zusammen mit Satz 10.5.1 folgt

$$\left\|u\right\|_{C^{2,\alpha}} \le C_2\|A^{(t)}u\|_{C^\alpha}, \tag{10.5.5}$$

wobei die Konstante C_2 unabhängig von t gewählt werden kann.

Setze nun

$$X = C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega), \quad Y = C^\alpha(\Omega),$$

und betrachte

$$I = \{t \in [0,1];\ A^{(t)}:\ X \to Y \text{ surjektiv}\}.$$

Wir zeigen: $I = [0,1]$; insbesondere gilt dann $1 \in I$, und die Behauptung folgt. Beachte $I \ne \emptyset$, da $0 \in I$ nach Satz 10.5.1.

Behauptung 1. *I ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(t_k) \subset I$ mit $t_k \to t$ $(k \to \infty)$. Zu vorgegebenem $h \in Y$ seien $u_k \in X$ mit $A^{(t_k)}u_k = h$. Dann ist $(u_k) \subset C^{2,\alpha}$ wegen (10.5.5) beschränkt. Gemäss Satz 8.6.2 konvergiert eine Teilfolge $u_k \to u$ in C^2, und $u \in C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega)$ löst $A^{(t)}u = h$. □

Behauptung 2. *I ist relativ offen in $[0,1]$.*

Beweis. Sei $t_0 \in I$, und sei $h \in Y$ gegeben. Setze $R := (C_1 + C_2)\left\|h\right\|_{C^\alpha}$, mit den Konstanten C_1, C_2 aus (10.5.4), bzw. (10.5.5). Für $t \in [0,1]$, $v \in \overline{B_{2R}(0;X)}$ sei $u = \Phi^{(t)}v \in X$ die Lösung von

$$A^{(t_0)}u = A^{(t_0)}v - A^{(t)}v + h \in C^\alpha = Y.$$

Mit (10.5.4) und (10.5.5) erhalten wir die Abschätzung

$$\left\|u\right\|_X = \left\|u\right\|_{C^{2,\alpha}} + \left\|u\right\|_{H^1} \le (C_1 + C_2)\|A^{(t_0)}u\|_{C^\alpha}.$$

Da

$$\begin{aligned}\|A^{(t_0)}v - A^{(t)}v\|_{C^\alpha} &= |t - t_0| \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\Big((\delta_{ij} - a_{ij})\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big) + cv \right\|_{C^\alpha} \\ &\le C\,|t - t_0|\left\|v\right\|_{C^{2,\alpha}},\end{aligned}$$

folgt

$$\left\|u\right\|_X \le C_3\,|t - t_0|\left\|v\right\|_X + (C_1 + C_2)\left\|h\right\|_{C^\alpha} \le C_3\,|t - t_0|\left\|v\right\|_X + R \le 2R,$$

sofern $t \in [0,1]$ so gewählt ist, dass $|t - t_0| < \frac{1}{2C_3} =: \delta$.

Weiter gilt für $v_1, v_2 \in \overline{B_{2R}(0;X)}$, $|t - t_0| < \delta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\Phi^{(t)}(v_1) - \Phi^{(t)}(v_2)\|_X &\leq (C_1 + C_2)\|(A^{(t_0)} - A^{(t)})(v_1 - v_2)\|_{C^\alpha} \\ &\leq C_3\,|t - t_0|\,\|v_1 - v_2\|_X \leq \frac{1}{2}\,\|v_1 - v_2\|_X\,;\end{aligned}$$

das heisst, für $t \in [0,1]$ mit $|t - t_0| < \delta$ definiert $\Phi^{(t)}$ eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $M = \overline{B_{2R}(0;X)}$. Also existiert für derartige t genau ein Fixpunkt $u \in \overline{B_{2R}(0;X)}$ von $\Phi^{(t)}$, und $A^{(t)}u = h$. Das heisst, $B_\delta(t_0) \cap [0,1] \subset I$, und I ist relativ offen. □

Da $I \neq \emptyset$ und da $[0,1]$ zusammenhängend, folgt mit den Behauptungen 1 und 2, dass $I = [0,1]$, und der Satz ist bewiesen. □