

# Funktionalanalysis I und II

Prof. Dr. Michael Struwe

Herbstsemester 2013/Frühlingssemester 2014

ETH Zürich



# Worum geht es?

Grob gesagt, geht es in dieser Vorlesung um die Auflösung linearer Gleichungssysteme der Art

$$Ax = y,$$

wobei  $A: X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung ist zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen  $X$  und  $Y$  und wo zu gegebenem  $y \in Y$  eine Lösung  $x \in X$  gesucht wird.

**Beispiel** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $f \in L^2(\Omega)$ . Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

kann man auffassen als Gleichung der Form  $Au = f$  mit  $X = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $Y = L^2(\Omega)$ ,  $A: H^2 \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\Omega)$ .

Zusätzlich zur linearen Struktur des Problems bedarf es im Fall unendlicher Dimension weiterer analytischer und geometrischer Strukturen, insbesondere spielen Vollständigkeit, Kompaktheit, beziehungsweise Konvexität eine Rolle. Je nachdem ist daher der “richtige” Rahmen für die mathematische Behandlung ein normierter Vektorraum (Linearität) oder ein metrischer Raum (Vollständigkeit, Kompaktheit), vielleicht auch ein “lokal konvexer topologischer Vektorraum”, in dieser Vorlesung jedoch meist ein Banachraum oder sogar ein Hilbertraum.

Wie das Beispiel zeigt, genügen für die Anwendungen die klassischen Funktionenräume allein nicht. In der Vorlesung “Funktionalanalysis II” werden die für die Behandlung partieller Differentialgleichungen fundamentalen Sobolev-Räume eingeführt und die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen entwickelt

Die Vorlesung stützt sich auf die grosse verfügbare Lehrbuchliteratur, vor allem jedoch auf die nachfolgend aufgeführten Texte. Das hier vorliegende Skript zu meiner Vorlesung im akademischen Jahr 2019 ist eine überarbeitete und leicht erweiterte Fassung des Skriptums zu meinen gleichnamigen Vorlesungen der Jahre 2007 und 2013. Auch für die vorliegende neue Fassung erhielt ich wieder zahlreiche hilfreiche Kommentare von Studierenden, Assistierenden und Kollegen, die ich sehr dankbar aufgenommen habe. Insbesondere danke ich Alessandro Carlotto für seine detaillierten und sorgfältigen Hinweise.

Michael Struwe

Zürich, Dezember 2019



# Literaturverzeichnis

- [1] Adams, Robert A.: *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.
- [2] Alt, Hans Wilhelm: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1985.
- [3] Bachmann, George; Narici, Lawrence: *Functional analysis*, Academic Press, 1966.
- [4] Brezis, Haim: *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.
- [5] Dunford, Nelson; Schwartz, Jacob: *Linear operators*, Wiley, 1988.
- [6] Evans, Lawrence Craig: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, 2. Auflage, American Mathematical Society, 2010.
- [7] Giaquinta, Mariano: *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.
- [8] Rudin, Walter: *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [9] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis*, Springer, 4. Auflage, 2002.
- [10] Yosida, Kosaku: *Functional analysis*, Nachdruck der 6. Auflage von 1980, Springer, Classics in Mathematics, 1995.
- [11] Zehnder, Eduard: *Skript zur Vorlesung über Funktionalanalysis*, Mitschrift von Christian Frei: <http://christianfrei.gmxhome.de/>



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Funktionalanalysis I</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Vollständigkeit, Baire-Kategorie</b>	<b>5</b>
1.1	Ein “nichtlineares” Problem . . . . .	5
1.2	Metrische Räume . . . . .	5
1.3	Baire-Kategorie . . . . .	7
1.4	Erste Anwendung . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>15</b>
2.1	Normierte Räume . . . . .	15
2.2	Stetige lineare Abbildungen . . . . .	21
2.3	Quotientenraum . . . . .	25
2.4	Hilberträume . . . . .	27
2.5	Produkte . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Prinzipien der Funktionalanalysis</b>	<b>33</b>
3.1	Gleichmässige Beschränktheit . . . . .	33
3.2	Der Satz von der offenen Abbildung . . . . .	34
3.3	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen . . . . .	37
3.4	Abschliessbare Operatoren . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Der Satz von Hahn-Banach, Konvexität</b>	<b>45</b>
4.1	Der Satz von Hahn-Banach . . . . .	45
4.2	Dualraum . . . . .	48
4.3	Dualität im Hilbertraum . . . . .	51
4.4	Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ , $1 \leq p < \infty$ . . . . .	55

4.5	Trennungssätze . . . . .	59
4.6	Schwache Konvergenz und Konvexität . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Reflexivität und Schwache Kompaktheit</b>	<b>69</b>
5.1	Reflexivität . . . . .	69
5.2	Separabilität . . . . .	71
5.3	Schwache Folgenkompaktheit . . . . .	73
5.4	Variationsrechnung . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Lineare Gleichungen, Spektraltheorie</b>	<b>81</b>
6.1	Duale Operatoren . . . . .	81
6.2	Operatoren mit abgeschlossenem Bild . . . . .	82
6.3	Kompaktheit . . . . .	85
6.4	Adjungierter Operator im Hilbertraum . . . . .	88
6.5	Spektrum und Resolvente . . . . .	90
6.6	Spektraltheorie im Hilbertraum . . . . .	97
6.7	Kompakte, selbstadjungierte Operatoren . . . . .	101
<b>II</b>	<b>Funktionalanalysis II</b>	<b>107</b>
<b>7</b>	<b>Sobolev-Räume</b>	<b>109</b>
7.1	Zugänge zum Dirichlet-Problem . . . . .	109
7.1.1	Lösung mittels Banach's closed range theorem . . . . .	109
7.1.2	Lösung mittels Riesz'schem Darstellungssatz . . . . .	112
7.2	Schwache Ableitung, Sobolev - Räume . . . . .	113
7.3	Sobolev-Räume auf einem Intervall . . . . .	117
7.4	Lösung des Modellproblems auf $I$ . . . . .	125
7.4.1	Dirichlet-Problem . . . . .	125
7.4.2	Neumann-Problem . . . . .	126
7.4.3	Varianten des Neumann-Problems . . . . .	127
7.5	Der Laplace-Operator auf $I$ . . . . .	129
<b>8</b>	<b>Sobolev-Räume im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>133</b>
8.1	Erste Beispiele . . . . .	133



8.2	Approximation von Sobolev-Funktionen . . . . .	135
8.3	Weitere Eigenschaften von $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	138
8.4	Fortsetzung von $W^{1,p}$ -Funktionen, Spursatz . . . . .	142
8.5	Sobolev-Einbettung, $p < n$ . . . . .	151
8.6	Sobolev-Einbettung, $p > n$ . . . . .	155
8.6.1	Hölder-Räume . . . . .	155
8.6.2	Companato Räume . . . . .	158
8.6.3	Schwache und klassische Differenzierbarkeit . . . . .	163
8.6.4	Allgemeine Poincaré-Ungleichung . . . . .	164
8.6.5	Allgemeiner Sobolev-Einbettungssatz . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Regularität schwacher Lösungen</b> . . . . .	<b>167</b>
9.1	Klassische Regularität via Sobolev . . . . .	167
9.2	Innere Regularität . . . . .	169
9.3	Regularität am Rande eines Halbraums . . . . .	170
9.4	Randregularität für allgemeine Gebiete . . . . .	172
9.4.1	Transformation der Gleichung (9.4.1) . . . . .	173
9.4.2	Regularität schwacher Lösungen von (9.4.5) . . . . .	176
9.4.3	Beweis von Satz 9.1.1 . . . . .	177
9.4.4	Variable Koeffizienten . . . . .	179
9.5	Erste Anwendungen . . . . .	180
9.6	“A-priori” und “a-posteriori” Abschätzungen . . . . .	182
9.7	$L^p$ -Theorie . . . . .	184
<b>10</b>	<b>Schauder-Theorie</b> . . . . .	<b>185</b>
10.1	Motivation . . . . .	185
10.2	Campanato-Abschätzungen . . . . .	186
10.3	Morrey-Campanato-Räume . . . . .	191
10.4	A-priori Abschätzungen in Hölder-Normen . . . . .	194
10.5	Existenzsätze . . . . .	200



Teil I

# Funktionalanalysis I



# Kapitel 1

## Vollständigkeit, Baire-Kategorie

### 1.1 Ein “nichtlineares” Problem

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , und für jedes  $x \in [0, 1]$  existiere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Ist  $f$  dann in mindestens einem Punkt  $x_0$  stetig? – und liegt damit, durch Iteration des Arguments in Teilintervallen der Länge  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die Menge der Stetigkeitspunkte von  $f$  sogar dicht in  $[0, 1]$ ?

Baire fand die geniale Lösung dieses Problems auf dem Umweg über das für die Funktionalanalysis äusserst fruchtbare Konzept der Baire Kategorie .

### 1.2 Metrische Räume

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum; das heisst,  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Eigenschaften

- i)  $d(x, y) \geq 0$ , “=” gdw.  $x = y$  (Definitheit),
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie),
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreiecks-Ungleichung).

**Beispiel 1.2.1.** i) Jede Teilmenge eines normierten Raums  $(X, \|\cdot\|)$  kann in kanonischer Weise als metrischer Raum mit Metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

aufgefasst werden; zum Beispiel  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

ii) Sei  $S = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}}; x_k \in \mathbb{R}\}$  der Raum aller Zahlenfolgen in  $\mathbb{R}$ . Durch

$$d((x_k), (y_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

wird eine Metrik auf  $S$  erklärt.

Wir wiederholen kurz die wichtigsten topologischen Begriffe:

i)  $\Omega \subset M$  heisst **offen**, falls gilt

$$\forall x \in \Omega \exists r > 0: B_r(x) = \{y \in M; d(x, y) < r\} \subset \Omega$$

ii)  $A \subset M$  heisst **abgeschlossen**, falls  $A^c = M \setminus A$  offen ist.

Für  $\Omega \subset M$  sind ferner definiert:

iii)  $\overset{\circ}{\Omega} = \bigcup_{G \subset \Omega, G \text{ offen}} G$ : der **offene Kern** von  $\Omega$ ,

iv)  $\overline{\Omega} = \bigcap_{A \supset \Omega, A \text{ abgeschlossen}} A = \left( (\Omega^c)^{\circ} \right)^c$ : die **abgeschlossene Hülle** von  $\Omega$ ,

v)  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$ : der **Rand** von  $\Omega$ . Somit wird  $\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$  disjunkt zerlegt.

vi)  $\Omega \subset M$  heisst **dicht**, falls  $\overline{\Omega} = M$ , das heisst, falls

$$\forall B = B_r(x) \subset M: B \cap \Omega \neq \emptyset. \quad (1.2.1)$$

vii)  $\Omega \subset M$  heisst **nirgend dicht**, falls  $\overline{\Omega} = \emptyset$ , das heisst, falls

$$\forall B = B_r(x) \subset M: B \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset. \quad (1.2.2)$$

**Beispiel 1.2.2.** Eine endliche Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ist nirgend dicht,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  ist dicht.

Für das folgende ist insbesondere von Bedeutung:

**Satz 1.2.1.** Sei  $U \subset M$ ,  $A = U^c = M \setminus U$ . Es sind äquivalent:

i)  $U$  ist offen und dicht;

ii)  $A$  ist abgeschlossen und nirgend dicht.

**Beweis.**  $i) \Rightarrow ii)$ : Sei  $U$  offen und dicht. Dann ist  $A = U^c$  abgeschlossen, und für jede Kugel  $B = B_r(x) \subset M$  gilt

$$B \setminus \overline{A} = B \setminus A = B \cap U \neq \emptyset.$$

$ii) \Rightarrow i)$ : Sei  $A$  abgeschlossen und nirgend dicht. Dann ist  $U = A^c$  offen, und für jede Kugel  $B = B_r(x) \subset M$  gilt

$$B \cap U = B \setminus A = B \setminus \overline{A} \neq \emptyset.$$

□

Diese Begriffe sind natürlich bereits auf der Stufe eines topologischen Raumes erklärt. Falls  $(M, d)$  metrisch ist, so gibt es äquivalente Kriterien mit Folgen in  $M$ ; zum Beispiel gilt

**Satz 1.2.2.**  $A \subset M$  ist abgeschlossen, gdw. für alle Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A$  und  $x \in M$  gilt:

$$x_k \rightarrow x \ (k \rightarrow \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Ein erst auf der Stufe metrischer Räume definierter Begriff ist der Begriff einer Cauchy-Folge und der Begriff der Vollständigkeit.

**Definition 1.2.1.**  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine **Cauchy-Folge** in  $M$ , falls

$$d(x_k, x_l) \rightarrow 0 \ (k, l \rightarrow \infty).$$

**Definition 1.2.2.**  $(M, d)$  heisst **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M$  konvergiert.

**Beispiel 1.2.3.** i)  $C^0([0, 1])$  mit der von der Supremumsnorm

$$\|f\|_{C^0} = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$$

induzierten Metrik ist vollständig.

ii) Die Räume  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , sowie  $C^m(\bar{\Omega})$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , sind vollständig.

iii) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$  mit kompakten  $K_j \subset K_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $C^0(\Omega)$  mit der Metrik

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g\|_{C^0(K_j)}}{1 + \|f - g\|_{C^0(K_j)}}$$

analog zu Beispiel 1.2.1 ii) vollständig. (Die von  $d$  induzierte Topologie auf  $C^0(\Omega)$  heisst **compact-open topology**.)

## 1.3 Baire-Kategorie

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $M \neq \emptyset$ .

**Satz 1.3.1.** Falls  $(M, d)$  vollständig ist, so gelten die folgenden (äquivalenten) Aussagen

i) Sei  $U_j \subset M$  offen und dicht,  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$  dicht in  $M$ .

ii) Falls  $(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^\circ \neq \emptyset$  mit abgeschlossenen  $A_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , so gibt es mindestens ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_{j_0}^\circ \neq \emptyset$ . Insbesondere gilt:

iii) Falls  $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  mit abgeschlossenen  $A_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , so gibt es mindestens ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_{j_0}^\circ \neq \emptyset$ .

**Beispiel 1.3.1.** Die Beispiele

$$\text{i) } M = \mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

und

$$\text{ii) } M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$$

mit  $A_x = \{x\} = \overline{A_x}$  und  $\overset{\circ}{A_x} = \emptyset$  zeigen, dass in Teil ii) des Satzes die Annahmen der Abzählbarkeit der Familie  $(A_j)$  und die Vollständigkeit von  $M$  notwendig sind.

**Beweis.** i) Aufgrund der Charakterisierung (1.2.1) dichter Mengen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen.

**Behauptung:** Für  $x \in M, r > 0$  gilt stets  $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$ .

**Beweis.** Seien  $x \in M, r > 0, B = B_r(x)$ . Konstruiere  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  induktiv, wie folgt.

a) Da  $U_1$  dicht und offen, gilt

$$U_1 \cap B \neq \emptyset, U_1 \cap B \text{ offen.}$$

Wähle  $x_1 \in U_1 \cap B, 0 < r_1 < \frac{1}{2}$  mit

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{2r_1}(x_1) \subset U_1 \cap B. \quad (1.3.1)$$

b) Seien  $x_1, \dots, x_{j-1} \in M, r_1, \dots, r_{j-1}$  bereits bestimmt. Beachte, dass wie oben gilt

$$U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \neq \emptyset, \quad U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \text{ offen.}$$

Wähle  $x_j \in U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}), 0 < r_j < 2^{-j}$  mit

$$\overline{B_{r_j}(x_j)} \subset B_{2r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}). \quad (1.3.2)$$

Dann erhalten wir für alle  $j > k \in \mathbb{N}$  die Kette von Inklusionen

$$x_j \in B_{r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset \dots \subset B_{r_k}(x_k), \quad (1.3.3)$$

also insbesondere

$$d(x_j, x_k) \leq r_k < 2^{-k} \rightarrow 0 \quad (j \geq k \rightarrow \infty);$$

das heisst,  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge. Da  $(M, d)$  vollständig, existiert

$$x^* = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j,$$

und nach Grenzübergang  $j \rightarrow \infty$  in (1.3.3) folgt mit (1.3.2)

$$\forall k: x^* \in \overline{B_{r_k}(x_k)} \subset U_k.$$

Insbesondere erhalten wir  $x^* \in U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ . Für  $k = 1$  liefert (1.3.1) zudem  $x^* \in U_1 \cap B \subset B$ , also

$$x^* \in U \cap B \neq \emptyset,$$

wie gewünscht. □



$i) \Rightarrow iii)$ : (indirekt) Widerspruchswise nehmen wir an

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

mit abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen  $A_j, j \in \mathbb{N}$ . Setze

$$U_j = A_j^c = M \setminus A_j, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 1.2.1 ist  $U_j$  offen und dicht,  $j \in \mathbb{N}$ . Nach Annahme gilt jedoch

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = \emptyset$$

im Widerspruch zu i).

$iii) \Rightarrow ii)$ : Betrachte den vollständigen metrischen Raum  $(L, d) = (\overline{B_r(x)}, d)$ , wo  $B_{2r}(x) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  und benutze iii), angewandt auf die Mengen  $L \cap A_j, j \in \mathbb{N}$ .

$ii) \Rightarrow i)$ : Sei  $U_j$  offen und dicht,  $j \in \mathbb{N}, U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ . Widerspruchswise nehmen wir an, dass  $B = M \setminus \overline{U} \neq \emptyset$ . Die Mengen  $A_j = U_j^c, j \in \mathbb{N}$ , sind abgeschlossenen und nirgends dicht, und mit  $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme ii).  $\square$

**Bemerkung 1.3.1.** Die Äquivalenz der Aussagen i) - iii) des Satzes gilt ohne die Annahme, dass  $M$  vollständig ist.

**Definition 1.3.1.** (Baire Kategorie)

i)  $A \subset M$  heisst **mager** oder von **1. Baire Kategorie**, falls  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  mit nirgends dichten Mengen  $A_j, j \in \mathbb{N}$ ;  $Kat(A) = 1$ .

ii)  $A \subset M$  heisst **fett** oder von **2. Baire Kategorie**, falls  $A$  nicht von 1. Baire Kategorie ist;  $Kat(A) = 2$ .

iii)  $\Omega \subset M$  heisst **residuell**, falls  $\Omega^c = A$  mager ist.

**Beispiel 1.3.2.** i)  $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \subset \mathbb{R}$  ist mager.

ii) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

iii) Abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind mager.

**Frage:** Gibt es überhaupt fette Mengen?

**Satz 1.3.2.** (Baire) Sei  $(M, d)$  vollständig,  $M \neq \emptyset$ . Dann gilt:

i)  $Kat(M) = 2$

ii)  $Kat(A) = 1 \Rightarrow Kat(A^c) = 2$ , und  $A^c$  ist dicht in  $M$ .

iii)  $\emptyset \neq U$  offen  $\Rightarrow Kat(U) = 2$ .

**Beweis.** i) Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3.1 iii).

ii) Falls  $Kat(A) = Kat(A^c) = 1$ , so wäre  $Kat(M) = 1$  gemäss Beispiel 1.3.1 iii), also  $Kat(A^c) = 2$ . Sei

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$$

mit nirgends dichten  $A_j, j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $U_j = (\overline{A_j})^c$  offen und dicht, und nach Satz 1.3.1 i) ist

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \right)^c \subset \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = A^c$$

dicht.

iii) Wäre  $Kat(U) = 1$ , so wäre gemäss ii) die Menge  $U^c = A = \overline{A}$  dicht, also  $A = M, U = \emptyset$ .  $\square$

“Typische” Beispiele magerer, beziehungsweise fetter Mengen sind somit die Teilmengen  $\mathbb{Q}$ , beziehungsweise  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  von  $M = \mathbb{R}$ . Beachte, dass gilt

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset.$$

Jedoch scheint es einen Zusammenhang mit dem Lebesgueschen Mass zu geben. Ist diese intuitive Vorstellung richtig?

**Fragen:** Sind Lebesgue-Nullmengen  $A \subset \mathbb{R}$  (im Baireschen Sinne) “mager”? Haben magere Mengen  $A \subset \mathbb{R}$  stets verschwindendes Lebesgue-Mass?

Beide Fragen sind mit “Nein” zu beantworten, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 1.3.3.** Sei  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q}$ , und für  $j \in \mathbb{N}$  sei

$$U_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ]q_k - 2^{-(j+k+1)}, q_k + 2^{-(j+k+1)}[$$

mit

$$\mathcal{L}^1(U_j) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-(j+k)} = 2^{-j}.$$

Die Mengen  $U_j$  sind offen und wegen

$$\overline{U_j} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

auch dicht. Nach Satz 1.2.1 ist  $A_j = U_j^c$  nirgends dicht,  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  mager und daher  $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = A^c$  fett nach Satz 1.3.2, jedoch gilt  $\mathcal{L}^1(U) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^1(U_j) = 0$ .

## 1.4 Erste Anwendung

Der Satz von Baire ist grundlegend für die Theorie linearer Gleichungen in Banach-Räumen. Als erste Anwendung stellen wir hier jedoch die Lösung des nichtlinearen Problems aus Abschnitt 1 vor.

**Satz 1.4.1.** (Baire) Sei  $(M, d)$  vollständig,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und es existiere der punktweise Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R}$$

für jedes  $x \in M$ . Dann ist

$$R = \{x; f \text{ ist stetig an der Stelle } x\}$$

eine residuelle Menge, insbesondere also dicht in  $M$ .

**Beweis.** Für  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  setze

$$P_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$$

und weiter

$$R_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P_{n,\varepsilon})^\circ.$$

Beachte, dass  $R_\delta \subset R_\varepsilon$  für  $\delta \leq \varepsilon$ .

**Behauptung.**  $U := \bigcap_{j=1}^{\infty} R_{1/j} = R$ , die Menge der Stetigkeitspunkte von  $f$ .

**Beweis.** “ $R \subset U$ ”. Sei  $f$  in  $x_0$  stetig. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $r_0 > 0$ ,  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ,  $r_n > 0$  ( $n \geq n_0$ ) mit

$$\sup_{x \in B_{r_0}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$$

und

$$\sup_{n \geq n_0} |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

sowie

$$\sup_{x \in B_{r_n}(x_0)} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$$

Dann folgt für  $n \geq n_0$ ,  $r < \min\{r_0, r_n\}$ :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B_r(x_0);$$

also  $B_r(x_0) \subset P_{n,\varepsilon}$ ,  $x_0 \in \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon} \subset R_\varepsilon$ . Also  $x_0 \in U$ .

“ $U \subset R$ ”. Sei  $f$  in  $x_0$  unstetig. Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  mit der Eigenschaft

$$\text{osc}_{B_r(x_0)} f = \sup_{B_r(x_0)} f - \inf_{B_r(x_0)} f > 3\varepsilon, \forall r > 0.$$

Zu  $n \in \mathbb{N}$  wähle  $r_n > 0$  mit

$$\text{osc}_{B_{r_n}(x_0)} f_n < \varepsilon, \forall r < r_n.$$

Schätze ab für  $r < r_n$

$$\begin{aligned} 2 \sup_{B_r(x_0)} |f_n - f| &\geq \sup_{x,y \in B_r(x_0)} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \\ &\geq \text{osc}_{B_r(x_0)} f - \text{osc}_{B_r(x_0)} f_n > 2\varepsilon; \end{aligned}$$

das heisst

$$x_0 \notin \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit  $x_0 \notin R_\varepsilon$  für  $\varepsilon < \varepsilon_0(x_0)$ , daher auch  $x_0 \notin U$ .  $\square$

**Behauptung.**  $R_\varepsilon$  ist offen und dicht für jedes  $\varepsilon > 0$ .

**Beweis.** Offenbar ist  $R_\varepsilon$  offen,  $\varepsilon > 0$ . Betrachte für  $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$  die Menge

$$F_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Beachte, dass mit  $f_{n+k}(x) \rightarrow f(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) folgt  $F_{n,\varepsilon} \subset P_{n,\varepsilon}$ . Wegen  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt zudem  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} = M, \forall \varepsilon > 0$ . Weiter ist

$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen. Also gilt  $\partial F_{n,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon} \setminus \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ , und mit  $(\partial F_{n,\varepsilon})^\circ \subset \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$  folgt  $(\partial F_{n,\varepsilon})^\circ = \emptyset$ .

Setze  $A_{n,\varepsilon} = \partial F_{n,\varepsilon}$ . Dann ist  $A_{n,\varepsilon}$  abgeschlossen und nirgends dicht und liefert die magere Menge

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{n,\varepsilon} \setminus \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon} \supset M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon} = M \setminus R_\varepsilon.$$

Satz 1.3.2 liefert die Behauptung.  $\square$

Setze nun

$$U_j = R_{1/j}, A_j = R_{1/j}^c.$$

Dann ist  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  mager, also

$$R = U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = A^c$$

residuell, insbesondere dicht nach Satz 1.3.2 ii).  $\square$

Umgekehrt kann man fragen, wann sich eine Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  punktweise durch stetige Funktionen  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , approximieren lässt.

**Beispiel 1.4.1.** Die Funktion  $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$  ist nirgends stetig, also nicht punktweise durch stetige  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , approximierbar.

Weiter kann man fragen, unter welchen Bedingungen eine Funktion  $f \in L^1([0, 1])$  einen Vertreter  $\tilde{f}$  mit obiger Eigenschaft besitzt. Kandidaten für  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wären in diesem Falle

a) die Mittel (der durch  $f \equiv 0$  ausserhalb forgesetzten Funktion  $f$ ), mit

$$f_n(x) = n \int_{x-\frac{1}{2n}}^{x+\frac{1}{2n}} f(y) dy \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

für fast alle  $x \in [0, 1]$  und insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt, oder

b) die **Fourier-Reihe** der periodisch auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzten Funktion  $f$ . OBdA sei die Periode auf  $2\pi$  gestreckt. Setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und definiere

$$f_n(x) = \sum_{|k| \leq n} a_k e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Vergleiche dazu das Konvergenzkriterium von Dini:

**Satz 1.4.2.** (*Dini*) Falls für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| dt < \infty,$$

so gilt für die obige Fourier-Reihe

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Vergleiche Wheeden-Zygmund: *Measure and integral*, Theorem 12.28, S. 224. Eine weitere Anwendung liefert

**Satz 1.4.3.** (*Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit*) Sei  $(M, d)$  vollständig,  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie stetiger Funktionen  $f_\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ , und sei  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  **punktweise beschränkt** in dem Sinne, dass

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(x)| < \infty, \quad \forall x \in M.$$

Dann gibt es eine offene Kugel  $B \subset M$  mit

$$\sup_{\lambda \in \Lambda, x \in B} |f_\lambda(x)| < \infty;$$

das heisst,  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ist auf  $B$  **gleichmässig beschränkt**.

**Beweis.** Für  $k \in \mathbb{N}$  definiere die abgeschlossene Menge

$$A_k = \{x \in M; \forall \lambda \in \Lambda: |f_\lambda(x)| \leq k\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{\{x; |f_\lambda(x)| \leq k\}}_{\text{abgeschlossen, da } f_\lambda \text{ stetig}}$$

mit  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = M$ . Da  $M$  vollständig, gibt es gemäss Satz 1.3.1 iii) ein  $k_0$  mit  $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$ . Wähle  $B \subset A_{k_0}$ .  $\square$

Falls die Funktionen  $f_\lambda$  lineare Abbildungen auf einem Vektorraum sind, erhält man aus Satz 1.4.3 ein Kriterium für die gleichmässige Beschränktheit der  $f_\lambda$  auf einer Kugel um 0, das heisst für die gleichmässige Stetigkeit der  $f_\lambda$ . Es liegt daher nahe, nun auch die lineare Struktur einzubeziehen.



# Kapitel 2

## Lineare Abbildungen

### 2.1 Normierte Räume

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum,  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm auf  $X$ ; das heisst,

- i)  $\|x\| \geq 0$ , “=” gdw.  $x = 0$  (Definitheit),
- ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  (positive Homogenität),
- iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung).

Mit der von  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ist  $X$  dann auch ein metrischer Raum.

**Definition 2.1.1.**  $(X, \|\cdot\|)$  heisst ein **Banachraum**, falls  $X$  bezüglich  $d$  vollständig ist.

**Bemerkung 2.1.1.** i) Die Norm ist (Lipschitz-)stetig auf  $X$ , da

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

ii) Die Vektorraumoperationen sind ebenfalls stetig (Übung).

**Beispiel 2.1.1.** i) Sei  $M$  eine Menge,  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Raum. Dann ist

$$B(M, X) = \{f: M \rightarrow X; \sup_{t \in M} \|f(t)\|_X < \infty\}$$

ein Vektorraum mit der Norm

$$\|f\|_{B(M, X)} = \sup_{t \in M} \|f(t)\|_X.$$

ii)  $B(M, X)$  ist vollständig, wenn  $X$  vollständig ist.

**Beweis.** i) Mit den punktweise definierten Vektorraum-Verknüpfungen

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda f)(t) = \lambda f(t), t \in M$$

wird  $B(M, X)$  zu einem Vektorraum. Dabei benutzen wir auch die Dreiecks-Ungleichung und die Homogenität der Norm. Die Eigenschaften i) und ii) einer Norm sind trivialerweise erfüllt; bezüglich iii) beachte

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{B(M, X)} &= \sup_{t \in M} \|f(t) + g(t)\|_X \leq \sup_{t \in M} (\|f(t)\|_X + \|g(t)\|_X) \\ &\leq \|f\|_{B(M, X)} + \|g\|_{B(M, X)}. \end{aligned}$$

ii) Falls  $X$  vollständig ist, so sind Cauchy-Folgen  $(f_k)$  in  $B(M, X)$  punktweise konvergent, denn für jedes  $t \in M$  ist wegen

$$\|f_j(t) - f_k(t)\|_X \leq \|f_j - f_k\|_{B(M, X)} \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty)$$

auch die Folge  $(f_k(t))$  eine Cauchy-Folge und es existiert  $f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$  mit

$$\begin{aligned} \|f - f_k\|_{B(M, X)} &= \sup_{t \in M} \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j(t) - f_k(t)\|_X \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f_k\|_{B(M, X)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $f \in B(M, X)$ . □

Als Anwendung von Beispiel 2.1.1 zeigen wir, dass sich jeder metrische Raum  $(M, d)$  "isometrisch" in einen vollständigen metrischen Raum  $(M^*, d^*)$  einbetten lässt.

Seien  $(M, d), (M^*, d^*)$  metrische Räume,  $\Phi: M \rightarrow M^*$ .

**Definition 2.1.2.**  $\Phi$  heisst **Isometrie**, falls gilt

$$d^*(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in M.$$

**Bemerkung 2.1.2.** Eine Isometrie  $\Phi: M \rightarrow M^*$  ist (Lipschitz) stetig und injektiv, und  $\Phi^{-1}: \Phi(M) \rightarrow M$  ist (Lipschitz) stetig.

**Satz 2.1.1.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum  $(M^*, d^*)$  und eine Isometrie  $\Phi: M \rightarrow M^*$ .

**Bemerkung 2.1.3.** i) Wir bezeichnen in diesem Falle den Raum  $\tilde{M} := \overline{\Phi(M)}$  als **Vervollständigung** von  $M$ , (versehen mit der Metrik  $\tilde{d} = d^*|_{\tilde{M} \times \tilde{M}}$ ).

ii) Man kann zeigen, dass die Vervollständigung bis auf Isometrien eindeutig ist.

**Beweis von Satz 2.1.1.** Wähle  $M^* = B(M, \mathbb{R})$  mit der von  $\|\cdot\|_{B(M, \mathbb{R})}$  induzierten Metrik  $d^*$ . Nach Beispiel 2.1.1 ist  $(M^*, d^*)$  vollständig.

Fixiere ein  $x^* \in M$ . Definiere nun  $\Phi: M \rightarrow B(M, \mathbb{R})$  durch

$$\Phi: x \mapsto f_x(z) = d(x, z) - d(x^*, z).$$



Beachte

$$\forall z \in M: |f_x(z)| = |d(x, z) - d(x^*, z)| \leq d(x, x^*);$$

also  $f_x \in B(M, \mathbb{R})$ . Analog folgt

$$\begin{aligned} \|f_x - f_y\|_{B(M, \mathbb{R})} &= \sup_{z \in M} |f_x(z) - f_y(z)| \\ &= \sup_{z \in M} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \end{aligned}$$

und

$$\|f_x - f_y\|_{B(M, \mathbb{R})} \geq |f_x(x) - f_y(x)| = d(x, y).$$

Also ist  $\Phi$  eine Isometrie. □

Seien  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  Normen auf  $X$ .

**Definition 2.1.3.**  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  heißen **äquivalent**, falls mit einer Konstanten  $C > 0$  gilt

$$\forall x \in X: C^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1. \quad (2.1.1)$$

**Beispiel 2.1.2.** i) Auf  $\mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) ist jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm; also sind je zwei Normen auch zueinander äquivalent.

**Beweis.** Die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 1\}$$

ist kompakt, und jede Norm  $\|\cdot\|_1$  ist bezüglich der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  stetig, da für  $x = x_0 + \xi$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  mit einer Konstanten  $C > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \|x\|_1 - \|x_0\|_1 \right| &\leq \|x_1 - x_0\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\xi_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|e_i\|_1 \leq C \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq Cn \|\xi\|. \end{aligned}$$

Also existieren

$$\max_{x \in S^{n-1}} \|x\|_1 = C_1, \quad \min_{x \in S^{n-1}} \|x\|_1 = C_2^{-1} > 0.$$

Mit  $C = \max\{C_1, C_2\}$  folgt (2.1.1). □

ii) Die Normen auf  $C^0([0, 1])$ ,

$$\|f\|_1 = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|, \quad \|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

sind nicht äquivalent, da für  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$f_n(t) = t^n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

gilt

$$\|f_n\|_1 = 1, \|f_n\|_2 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Hingegen lässt sich das Ergebnis aus Beispiel 2.1.2 i) auf jeden Vektorraum endlicher Dimension übertragen.

**Satz 2.1.2.** *Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum  $X$  sind je zwei Normen äquivalent.*

**Beweis.** Wir führen die Aussage auf den Fall  $X = \mathbb{R}^n$ , beziehungsweise  $X = \mathbb{C}^n$  zurück. OBdA sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wähle eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  für  $X$ . Dann ist die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow X, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$$

linear und injektiv, mit der Rangformel also auch surjektiv. Seien  $\|\cdot\|_1^X, \|\cdot\|_2^X$  Normen auf  $X$ . Definiere

$$\|x\|_1 = \|\Phi(x)\|_1^X, x \in \mathbb{R}^n,$$

und analog  $\|x\|_2$ . Die Eigenschaften i), ii) einer Norm folgen aus der Definitheit und Homogenität von  $\|\cdot\|_1^X$ , da  $\Phi$  linear ist und injektiv. Mit der Linearität von  $\Phi$  folgt ebenso für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die Dreiecksungleichung

$$\|x+y\|_1 = \|\Phi(x) + \Phi(y)\|_1^X \leq \|\Phi(x)\|_1^X + \|\Phi(y)\|_1^X = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

aus derjenigen für  $\|\cdot\|_1^X$ , und ebenso für  $\|\cdot\|_2^X$ . Nach Beispiel 2.1.2 i) gibt es  $C > 0$  mit

$$C^{-1}\|\Phi(x)\|_1^X = C^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 = \|\Phi(x)\|_2^X \leq C\|x\|_1 = C\|\Phi(x)\|_1^X.$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Da  $\Phi$  surjektiv, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.1.3.** *Endlich-dimensionale Teilräume eines normierten Raumes sind vollständig, insbesondere abgeschlossen.*

**Beweis.** Sei  $Y \subset X$  ein endlich-dimensionaler Untervektorraum des normierten Raumes  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $\dim_{\mathbb{R}}(Y) = n$ . Sei  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  wie im Beweis von Satz 2.1.2,  $\|x\| = \|\Phi(x)\|_X$  die induzierte Norm in  $\mathbb{R}^n$ .

Cauchy-Folgen  $(y_k) \subset Y$  werden unter  $\Phi^{-1}$  abgebildet auf Cauchy-Folgen  $(x_k)$  im  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ . Wegen Beispiel 2.1.2.i) sind dies auch Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der euklidischen Metrik. Da  $\mathbb{R}^n$  vollständig ist, existiert der Limes  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ , und  $y_k \rightarrow y := \Phi(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Somit ist  $Y$  vollständig.

Abgeschlossenheit erhält man mit dem Folgenkriterium gemäss Satz 1.2.2.  $\square$

Für  $\infty$ -dimensionale Unterräume ist das Ergebnis der Satz 2.1.3 im allgemeinen nicht richtig.

**Beispiel 2.1.3.** Betrachte  $C^0([0, 2])$  als Unterraum von  $(L^1([0, 2]), \|\cdot\|_{L^1})$ . Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([0, 2])$  mit

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in  $L^1([0, 2])$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ , wobei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1; \end{cases}$$

jedoch gilt  $f \notin C^0([0, 2])$ .

Abstrakt kann man auch wie folgt argumentieren:  $C^0([0, 2])$  ist ein strikt in  $L^1([0, 2])$  enthaltener Teilraum, jedoch gilt  $L^1([0, 2]) = \overline{C^0([0, 2])}$ .

Wir wiederholen den Begriff der Kompaktheit in metrischen Räumen  $(M, d)$ .

**Definition 2.1.4.**  $K \subset M$  heisst (folgen-) **kompakt**, falls jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$  eine in  $K$  konvergente Teilfolge besitzt.

In  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$  gilt das einfache Kriterium:  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt genau dann, wenn  $K$  beschränkt und abgeschlossen ist. Vergleichbare Kompaktheitskriterien in  $C^0(\overline{\Omega})$  oder  $L^p(\Omega)$  werden wir später kennenlernen; siehe Satz 6.3.1, bzw. Satz 6.3.2.

In metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit ferner äquivalent zur ‘‘Heine-Borel-Eigenschaft’’ oder Überdeckungskompaktheit.

**Definition 2.1.5.**  $K \subset M$  heisst **überdeckungskompakt**, falls jede offene Überdeckung  $(U_\iota)_{\iota \in I}$  von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Die ‘‘Heine-Borel-Eigenschaft’’ benutzt man zur Definition von Kompaktheit in topologischen Räumen.

Schliesslich kann man endlich-dimensionale Vektorräume auch wie folgt charakterisieren.

**Satz 2.1.4.** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i)  $\dim(X) < \infty$ .

ii) Die Einheitssphäre  $S = \{x \in X; \|x\| = 1\}$  in  $X$  ist kompakt.

**Beweis.** i)  $\Rightarrow$  ii): Sei  $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n$ ,  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow X$  der Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 2.1.2,  $\|\cdot\|_1$  die durch  $\Phi$  induzierte Norm auf  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\Phi^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 = 1\} =: S_1.$$

Wegen Beispiel 2.1.2.i) ist  $S_1 \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.  $\Phi$  ist stetig. Damit ist auch  $\Phi(S_1) = S$  kompakt.

ii)  $\Rightarrow$  i): (indirekt) Sei  $\dim_{\mathbb{R}}(X) = \infty$ . Wir konstruieren eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $S$ , die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Falls die Norm auf  $X$  von einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  induziert wird, das heisst, falls

$$\forall x \in X: \|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

so erhält man eine geeignete Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , indem man aus einer Folge linear unabhängiger Vektoren  $y_k$  mit dem Gram-Schmidtschen<sup>1</sup> Verfahren eine Folge orthonormaler Vektoren erzeugt mit

$$\|x_k\| = 1, \quad (x_i, x_k) = 0 \quad (i \neq k),$$

also auch

$$\|x_i - x_k\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_k\|^2 - 2(x_i, x_k) = 2 \quad (i \neq k).$$

Somit kann  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge haben.

In einem allgemeinen normierten Raum erhält man analog eine geeignete Folge durch Anwendung des folgenden Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.1.1.** (Franz Riesz): Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum,  $Y \subset X$  ein abgeschlossener linearer Unterraum,  $Y \neq X$ .

Dann gibt es für jedes  $\varepsilon \in ]0, 1[$  ein  $x \in X \setminus Y$  mit

$$i) \|x\| = 1,$$

$$ii) d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \varepsilon.$$

**Beweis.** Wähle  $x^* \in X \setminus Y$ . Da  $Y$  abgeschlossen, gilt

$$d := d(x^*, Y) = \inf_{y \in Y} \|x^* - y\| > 0.$$

Wähle  $y^* \in Y$  mit

$$d \leq \|x^* - y^*\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Setze

$$x = \frac{x^* - y^*}{\|x^* - y^*\|}$$

mit  $\|x\| = 1$  und

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \left\| \frac{x^* - y}{\|x^* - y^*\|} \right\| = \frac{d}{\|x^* - y^*\|} > 1 - \varepsilon.$$

$\square$

**Beweis von Satz 2.1.4 ii)  $\Rightarrow$  i) (vollendet).** Seien  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge linear unabhängiger Vektoren,  $Y_k = \text{span}\{y_l; l \leq k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 2.1.3 ist  $Y_k$  für jedes  $k$  abgeschlossen. Wähle  $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$  und für  $k \geq 2$  wähle  $x_k \in Y_k \setminus Y_{k-1}$  mit

$$\|x_k\| = 1, \quad d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}$$

gemäss Lemma 2.1.1. Dann gilt für  $k > l$  stets

$$\|x_k - x_l\| \geq d(x_k, Y_l) \geq d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}.$$

Also ist  $S$  nicht kompakt.  $\square$

<sup>1</sup>siehe zum Beispiel Werner, S. 202

## 2.2 Stetige lineare Abbildungen

Seien  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Vektorräume,  $A: X \rightarrow Y$  linear.

**Satz 2.2.1.** *Es sind äquivalent:*

- i)  $A$  ist stetig in  $0 \in X$ ;
- ii)  $A$  ist stetig in jedem Punkt  $x_0 \in X$ ;
- iii)  $A$  ist gleichmässig stetig auf  $X$ ;
- iv)  $A$  ist Lipschitz stetig;
- v)  $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$ .

**Beweis.**  $v) \Rightarrow iv)$ : Mit der Linearität von  $A$  folgt für  $x_1 \neq x_2 \in X$

$$\begin{aligned} \|Ax_1 - Ax_2\|_Y &= \|A(x_1 - x_2)\|_Y = \|x_1 - x_2\|_X \left\| A \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|_X} \right\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

$iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$  ist klar.

$i) \Rightarrow v)$ : (indirekt) Sei  $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \infty$ . Wähle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit

$$\|x_n\|_X \leq 1, \quad 0 < \|Ax_n\|_Y \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann gilt

$$z_n = \frac{x_n}{\|Ax_n\|_Y} \rightarrow 0 \text{ in } X \quad (n \rightarrow \infty);$$

jedoch folgt mit der Linearität von  $A$

$$\|Az_n\|_Y = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur angenommenen Stetigkeit in  $0 \in X$ . □

Zusammen mit Satz 2.1.2 folgt:

**Satz 2.2.2.** *Sei  $X$  endlich-dimensional,  $A: X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $A$  (Lipschitz) stetig.*

**Beweis.**  $\|x\|_* := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$  definiert eine Norm, die von  $A$  induzierte "Graphennorm" auf  $X$ . Nach Satz 2.1.2 gibt es  $C > 0$  mit

$$\forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq \|x\|_* \leq C\|x\|_X.$$

□

Satz 2.2.2 gilt nicht mehr, falls  $X$  unendlich-dimensional ist.

**Beispiel 2.2.1.** Sei  $X = Y = C^0([0, 1])$ ,  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1}$ ,  $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{C^0}$ ,  $A = id$ . Analog zu Beispiel 2.1.2.ii) gilt

$$\sup_{\|f\|_{L^1} \leq 1} \|f\|_{C^0} = \infty;$$

also ist  $A$  nicht stetig.

Setze

$$L(X, Y) = \{A: X \rightarrow Y; A \text{ ist linear und stetig}\}.$$

$L(X, Y)$  ist ein Vektorraum mit Norm

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

und es gilt

$$\forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq \|A\|_{L(X, Y)} \|x\|_X.$$

Falls  $X = Y$  (mit derselben Norm), so setze

$$L(X, X) = L(X).$$

**Satz 2.2.3.** *i) Seien  $X, Y, Z$  normierte Vektorräume,  $A \in L(X, Y), B \in L(Y, Z)$ . Dann gilt  $BA \in L(X, Z)$ , und*

$$\|BA\|_{L(X, Z)} \leq \|A\|_{L(X, Y)} \|B\|_{L(Y, Z)}.$$

*ii) Die obige Abbildung  $A, B \mapsto BA$  ist stetig.*

**Beweis.** i) Für  $x \in X$  schätze ab

$$\begin{aligned} \|(BA)x\|_Z &= \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\|_{L(Y, Z)} \|Ax\|_Y \\ &\leq \|B\|_{L(Y, Z)} \|A\|_{L(X, Y)} \|x\|_X. \end{aligned}$$

ii) Stetigkeit der Verkettung folgt aus

$$BA - B_0A_0 = (B - B_0)A + B_0(A - A_0)$$

mit i). □

Falls  $X = Y$ , so können wir  $L(X)$  wegen Satz 2.2.3 als Algebra auffassen. Insbesondere sind die Potenzen  $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k\text{-mal}}$  eines  $A \in L(X)$  definiert.

Für die Existenz von **Potenzreihen** benötigen wir die Vollständigkeit.

**Satz 2.2.4.** *Ist  $Y$  ein Banach-Raum, so ist auch  $L(X, Y)$  ein Banach-Raum.*

**Beweis.** Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $L(X, Y)$ , das heisst,

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A_n x - A_l x\|_Y \rightarrow 0 \quad (n, l \rightarrow \infty).$$

Dann ist  $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge für jedes  $x \in X$  mit  $\|x\|_X \leq 1$ , wegen der Linearität also auch für beliebiges  $x \in X$ . Falls  $Y$  vollständig ist, existiert der punktweise Limes

$$Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, \quad x \in X.$$

$A$  ist linear wegen der Linearität von  $A_n$  und Stetigkeit der Vektorraum-Operationen, und aus

$$\|Ax\|_Y = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n x) \right\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\|_Y \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|_{L(X, Y)} \|x\|_X$$

folgt die Beschränktheit und damit wegen Satz 2.2.1 auch die Stetigkeit von  $A$ . Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\|_Y &= \left\| \lim_{l \rightarrow \infty} (A_l x - A_n x) \right\|_Y = \lim_{l \rightarrow \infty} \|(A_l - A_n)(x)\|_Y \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \|A_l - A_n\|_{L(X,Y)} \|x\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

und daher nach Übergang zum Supremum bezüglich  $\|x\|_X \leq 1$

$$\|A - A_n\|_{L(X,Y)} \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \|A_l - A_n\|_{L(X,Y)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Vergleiche den Beweis von ii) in Beispiel 2.1.1.  $\square$

Analog zum Kriterium der absoluten Konvergenz für die Konvergenz von Reihen in  $\mathbb{R}$  gilt der folgende Satz.

**Satz 2.2.5.** Sei  $Y$  ein Banach-Raum,  $A_j \in L(X, Y)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , und es gelte

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} < \infty.$$

Dann existiert

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_j \in L(X, Y).$$

**Beweis.** Sei  $S_n = \sum_{j=1}^n A_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Da

$$\|S_n - S_l\|_{L(X,Y)} \leq \sum_{j=l+1}^n \|A_j\|_{L(X,Y)} \rightarrow 0 \quad (n \geq l \rightarrow \infty),$$

ist  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L(X, Y)$ , nach Satz 2.2.4 also konvergent.  $\square$

Wir betrachten nun speziell Potenzreihen in  $L(X)$ .

**Beispiel 2.2.2.** i) Sei  $X$  ein Banach-Raum,  $A \in L(X)$ . Dann existiert die Reihe  $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in L(X)$ .

**Beweis.** Mit der Abschätzung  $\|A^k\|_{L(X)} \leq \|A\|_{L(X)}^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_{L(X)} \leq \exp(\|A\|_{L(X)}) < \infty.$$

$\square$

ii) Sei  $X$  ein Banach-Raum,  $A \in L(X)$ ,  $\|A\|_{L(X)} < 1$ . Dann existiert die **Neumann-Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \in L(X)$ , und es gilt (mit  $1 = A^0 = id$ )

$$(1 - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (1 - A) = 1; \quad (2.2.1)$$

das heisst, die Abbildung  $1 - A$  ist invertierbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1 - A)^{-1}.$$

**Beweis.** Konvergenz der Reihe  $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , folgt analog zu i) mit dem Konvergenzkriterium für die geometrische Reihe. Die Identität (2.2.1) folgt aus

$$(1 - A)S_n = S_n(1 - A) = S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 + (S_n - S_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

□

**Satz 2.2.6.** Sei  $X$  ein normierter Raum,  $A \in L(X)$ . Dann existiert

$$r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|_{L(X)}.$$

$r_A$  heisst **Spektralradius** von  $A$ .

**Beispiel 2.2.3.** Sei  $A \in L(X)$ , und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $A$  mit Eigenvektor  $0 \neq x_\lambda \in X$ . Mit

$$A^n x_\lambda = \lambda A^{n-1} x_\lambda = \dots = \lambda^n x_\lambda$$

folgt dann  $\|A^n\|_{L(X)} \geq |\lambda|^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und  $r_A \geq |\lambda|$ .

**Beweis von Satz 2.2.6.** Beachte, dass Satz 2.2.3 ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|A^n\|_{L(X)}^{1/n} \leq \|A\|_{L(X)}.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$\|A^k\|_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{n > 1} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon.$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  schreibe  $n = kl + m$ ,  $m < k$ . Mit Satz 2.2.3 folgt

$$\begin{aligned} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} &\leq \|A^{kl}\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \|A^m\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \|A^k\|_{L(X)}^{\frac{l}{n}} \|A\|_{L(X)}^{\frac{m}{n}} \\ &\rightarrow \|A^k\|_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{j \in \mathbb{N}} \|A^j\|_{L(X)}^{\frac{1}{j}} + \varepsilon \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{n \geq 1} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}},$$

wie gewünscht. □

Als Folgerung notieren wir abschliessend:



**Satz 2.2.7.** Sei  $X$  ein Banach-Raum,  $A \in L(X)$  mit  $r_A < 1$ . Dann konvergiert die Neumann-Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} A^j \in L(X)$ , und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (1 - A)^{-1} \in L(X).$$

**Beweis.** Die Konvergenz der Reihe folgt aus Satz 2.2.5 mit dem Wurzelkriterium. Die Behauptung folgt dann wie in Beispiel 2.2.2.ii).  $\square$

Setze

$$Gl(X) = \{A \in L(X); A \text{ invertierbar und } A^{-1} \in L(X)\}.$$

**Bemerkung 2.2.1.** In Abschnitt 3.2 werden wir sehen, dass für bijektive Abbildungen  $A \in L(X)$  eines Banachraums  $X$  die Inverse automatisch stetig ist.

Aus Satz 2.2.7 folgt nun

**Satz 2.2.8.** Sei  $X$  ein Banach-Raum. Dann ist  $Gl(X)$  offen in  $L(X)$ .

**Beweis.** Sei  $A_0 \in Gl(X)$ ,  $A \in L(X)$  mit

$$\|A - A_0\|_{L(X)} < \|A_0^{-1}\|_{L(X)}^{-1}.$$

Wir zeigen  $A \in Gl(X)$ . Schreibe dazu

$$A = A_0 + (A - A_0) = A_0(1 + A_0^{-1}(A - A_0)).$$

Satz 2.2.3 liefert die Abschätzung

$$\|A_0^{-1}(A - A_0)\|_{L(X)} \leq \|A_0^{-1}\|_{L(X)} \|A - A_0\|_{L(X)} < 1.$$

Mit Satz 2.2.7 folgt

$$(1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1} \in L(X),$$

und mit Satz 2.2.3 erhalten wir

$$A^{-1} = (1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1} A_0^{-1} \in L(X),$$

wie gewünscht.  $\square$

## 2.3 Quotientenraum

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $Y \subset X$  ein linearer Unterraum. Definiere die Äquivalenzrelation

$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$

mit Äquivalenzklassen

$$[x] = x + Y.$$

Beachte, dass  $[\alpha x] = \alpha[x]$  für  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , wobei wir für  $\alpha = 0$  identifizieren

$$0 = 0[x] = [0] = Y;$$

weiter gilt  $[x_1 + x_2] = [x_1] + [x_2]$ ; das heisst

$$X/Y := \{[x]; x \in X\}$$

ist ein Vektorraum. Es sei  $\pi$  die kanonische Quotientenabbildung

$$\pi: X \ni x \mapsto [x] \in X/Y.$$

**Satz 2.3.1.** Sei  $\|\cdot\|_X$  Norm auf  $X$ ,  $Y \subset X$  abgeschlossen,  $Y \neq X$ . Dann ist

$$\|[x]\|_{X/Y} := \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X = \text{dist}(x, Y)$$

eine Norm auf  $X/Y$ , und  $\pi$  ist stetig mit

$$\|\pi\|_{L(X, X/Y)} = 1.$$

Falls  $(X, \|\cdot\|_X)$  vollständig ist, so auch  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ .

**Bemerkung 2.3.1.** Auf die Abgeschlossenheit von  $Y$  kann man nicht verzichten. Falls  $Y \subset X$  ein dichter Unterraum ist, so gilt  $\inf_{y \in Y} \|x - y\|_X = 0$ ,  $x \in X$ .

**Beweis von Satz 2.3.1.** i) Zum Beweis der Definitheit sei  $\|[x]\|_{X/Y} = 0$  für ein  $x \in X$ . Dann gibt es eine Folge  $(y_k) \subset Y$ , so dass  $\|x - y_k\|_X \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Mit der Abgeschlossenheit von  $Y$  folgt  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in Y$ , also  $[x] = [0]$ .

Die Homogenität der Norm  $\|\cdot\|_{X/Y}$  ist offensichtlich.

Schliesslich zeigen wir die Dreiecks-Ungleichung. Zu  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  wähle  $y_1, y_2 \in Y$  mit

$$\|x_1 - y_1\|_X + \|x_2 - y_2\|_X \leq \|[x_1]\|_{X/Y} + \|[x_2]\|_{X/Y} + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|[x_1] + [x_2]\|_{X/Y} &= \|[x_1 + x_2]\|_{X/Y} \leq \|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\|_X \\ &\leq \|x_1 - y_1\|_X + \|x_2 - y_2\|_X \leq \|[x_1]\|_{X/Y} + \|[x_2]\|_{X/Y} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \downarrow 0$  folgt die Behauptung.

ii) Mit  $\|\pi(x)\|_{X/Y} = \|[x]\|_{X/Y} \leq \|x\|_X$  folgt sofort  $\|\pi\|_{L(X, X/Y)} \leq 1$ .

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $x = x_\varepsilon \in X \setminus Y$  gemäss dem Lemma 2.1.1 von Riesz mit

$$\|x\|_X = 1, \text{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon.$$

Mit

$$\text{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X = \|[x]\|_{X/Y}$$

folgt

$$\|\pi\|_{L(X, X/Y)} \geq \frac{\|[x]\|_{X/Y}}{\|x\|_X} > 1 - \varepsilon.$$

iii) Zum Beweis der Vollständigkeit des Raumes  $X/Y$  im Falle eines Banachraums  $X$  sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  mit  $\|[x_k] - [x_l]\|_{X/Y} \rightarrow 0$  ( $k, l \rightarrow \infty$ ). Es genügt zu

zeigen, dass für eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  der Limes  $[x] = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} [x_k]$  existiert. ObdA dürfen wir daher annehmen, dass

$$\|[x_k] - [x_{k-1}]\|_{X/Y} < 2^{-k}, \quad k > 1.$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  wähle induktiv  $y_k \in Y$ ,  $z_k \in X$  wie folgt. Setze  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = x_1$ , und für  $k > 1$  wähle  $y_k \in Y$  so, dass für  $z_k = x_k - y_k \in X$  mit  $[z_k] = [x_k]$  gilt

$$\begin{aligned} \|z_k - z_{k-1}\|_X &< \|[z_k] - [z_{k-1}]\|_{X/Y} + 2^{-k} \\ &= \|[x_k] - [x_{k-1}]\|_{X/Y} + 2^{-k} < 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Dann ist  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge, und es existiert  $z = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k \in X$ . Mit

$$\|[x_k] - [z]\|_{X/Y} = \|[z_k] - [z]\|_{X/Y} \leq \|z_k - z\|_X \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.4 Hilberträume

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum,  $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Definition 2.4.1.**  $(\cdot, \cdot)$  heisst **Skalarprodukt** auf  $X$ , falls gilt

i)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ,  $\forall x, y \in X$ ,

ii)  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in X$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ,

iii)  $(x, x) \geq 0$ ,  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

**Bemerkung 2.4.1.** i) Mit i) und ii) erhalten wir im Falle des Skalarkörpers  $\mathbb{C}$  auch

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(x, y)} = \overline{\alpha}(x, y)$$

für alle  $x, y \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

ii) Falls  $X$  ein Raum mit Skalarprodukt ist, so definiert

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X,$$

die **kanonische Norm** in  $X$ .

**Beweis.** Die Definitheit und die positive Homogenität sind klar. Die Dreiecksungleichung folgt mit der nachstehenden Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 2.4.1, aus der Rechnung

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$\square$

**Lemma 2.4.1.** (Cauchy-Schwarz) Es gilt

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

**Beweis.** OBdA gelte  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Setze  $t = \overline{(x, y)}$  und beachte, dass damit  $(x, y - tx) = 0$ . Mit

$$1 = \|y\|^2 = \|tx + (y - tx)\|^2 = |t|^2\|x\|^2 + \|y - tx\|^2 \geq |t|^2 = |(x, y)|^2$$

folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.4.2.** Der Raum  $(X, (\cdot, \cdot))$  heisst **Hilbertraum** falls  $X$  bzgl.  $\|\cdot\|$  vollständig ist.

**Beispiel 2.4.1.** i)  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  sind Hilberträume mit dem üblichen Skalarprodukt.

ii) Der Raum  $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$  ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2} = \int_0^1 f \bar{g} dt .$$

Zu  $Y \subset X$  sei

$$Y^\perp = \{z \in X; \forall y \in Y : (z, y) = 0\}.$$

**Lemma 2.4.2.**  $Y^\perp$  ist abgeschlossener linearer Unterraum,  $Y^\perp = (\overline{\text{span } Y})^\perp$ .

**Beweis.** Linearität von  $Y^\perp$  folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarprodukts. Falls weiter  $(z_k) \subset Y^\perp$  mit  $z_k \rightarrow z$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so gilt

$$\forall y \in Y : (z, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (z_k, y) = 0.$$

Also ist  $Y^\perp$  abgeschlossen nach Satz 1.2.2. Analog erhält man  $Y^\perp = (\overline{\text{span } Y})^\perp$ .  $\square$

**Bemerkung 2.4.2.** i) Falls  $\overline{Y} = X$ , so gilt  $Y^\perp = \{0\}$ .

ii) Offenbar gilt

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1^\perp \supset Y_2^\perp.$$

**Beweis.** i) Sei  $z \in Y^\perp$ . Falls  $\overline{Y} = X$ , so gibt es  $(y_k) \subset Y$  mit  $y_k \rightarrow z$  ( $k \rightarrow \infty$ ), also

$$\|z\|^2 = (z, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (z, y_k) = 0.$$

$\square$

**Lemma 2.4.3.** Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  Hilbertraum,  $Y \subset X$  ein abgeschlossener linearer Unterraum,  $Y \neq X$ . Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in X$  genau ein  $y_0 \in Y$  mit der Eigenschaft

$$\forall y \in Y : (x_0 - y_0, y) = 0,$$

und

$$\|x_0 - y_0\| = \text{dist}(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|.$$

(Der Punkt  $y_0$  ist der "Fusspunkt des Lotes" von  $x_0$  auf  $Y$ .)

**Beweis.** Zu vorgegebenem  $x_0 \in X$  wähle  $y_k \in Y$  mit

$$\|x_0 - y_k\| \rightarrow \text{dist}(x_0, Y) =: d \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Behauptung 1.** Es existiert  $y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in Y$ , und  $\|x_0 - y_0\| = d$ .

**Beweis.** Benutze die Parallelogramm-Identität

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

mit  $a = x_0 - y_k$ ,  $b = x_0 - y_l$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2 \lim_{k, l \rightarrow \infty} (\|x_0 - y_k\|^2 + \|x_0 - y_l\|^2) \\ &= \lim_{k, l \rightarrow \infty} (4\|x_0 - \frac{y_k + y_l}{2}\|^2 + \|y_k - y_l\|^2) \\ &\geq 4d^2 + \limsup_{k, l \rightarrow \infty} \|y_k - y_l\|^2. \end{aligned}$$

Also ist  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge. Da  $Y$  abgeschlossen, folgt die Behauptung.  $\square$

**Behauptung 2.**  $\forall y_0 \in Y: \|x_0 - y_0\| = d \Leftrightarrow (x_0 - y_0) \perp Y$ .

**Beweis.** Fixiere  $y_0 \in Y$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Mit der Identität

$$\|x_0 - y_0\|^2 = d^2 \leq \|x_0 - y_0 + ty\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t \text{Re}(x_0 - y_0, y) + t^2 \|y\|^2$$

für alle  $y \in Y$ ,  $t \in \mathbb{R}$  folgt

$$\forall y \in Y: 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \|x_0 - y_0 + ty\|^2 = 2 \text{Re}(x_0 - y_0, y).$$

“ $\Leftarrow$ ”: Für jedes  $0 \neq y \in Y$  definiert die Funktion  $t \mapsto f(t) := \|x_0 - y_0 + ty\|^2$  ein quadratisches Polynom in  $t$  mit  $f'' > 0$ . Falls  $(x_0 - y_0) \perp Y$ , so gilt zudem  $f'(0) = 0$ , und  $f(0) = \|x_0 - y_0\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2$  für jedes  $z = y_0 + ty \in Y$ .  $\square$

Seien  $y_0, y_1 \in Y$  mit  $(x_0 - y_0) \perp Y$ ,  $(x_0 - y_1) \perp Y$ , nach Behauptung 2 also  $\|x_0 - y_0\| = d = \|x_0 - y_1\|$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d^2 &= \|x_0 - y_1\|^2 = \|x_0 - y_0 - (y_1 - y_0)\|^2 \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + \|y_1 - y_0\|^2 = d^2 + \|y_1 - y_0\|^2, \end{aligned}$$

also  $y_1 = y_0$ .  $\square$

**Korollar 2.4.1.** Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum,  $Y \subset X$  ein abgeschlossener linearer Unterraum,  $Y \neq X$ , und sei  $x_0 \in X \setminus Y$ . Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung  $x_0 = y_0 + z$  mit  $y_0 \in Y$ ,  $z \in Y^\perp$  und

$$\|z\| = \text{dist}(x_0, Y).$$

Mit Lemma 2.4.3 erhalten wir sofort auch den folgenden Satz.

**Satz 2.4.1.** Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum,  $Y \subset X$  ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gilt

$$X = Y \oplus Y^\perp$$

und jedes  $x \in X$  hat eine eindeutige Zerlegung

$$x = x^\parallel + x^\perp, \text{ wobei } x^\parallel \in Y, x^\perp \in Y^\perp,$$

mit

$$\|x\|^2 = \|x^\parallel\|^2 + \|x^\perp\|^2.$$

Insbesondere ist die Orthogonalprojektion  $\pi_Y: X \rightarrow Y$  mit  $\pi_Y(x) = x^\parallel$  stetig, und  $X/Y$  ist isometrisch zu  $Y^\perp$ .

**Bemerkung 2.4.3.** Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum. Dann hat gemäss Satz 2.4.1 jeder abgeschlossene lineare Unterraum  $Y \subset X$  das topologische Komplement  $Y^\perp$  mit stetigen Projektionen

$$\pi_1: X \ni x \mapsto x^\parallel \in Y, \pi_2 = id - \pi_1: X \ni x \mapsto x^\perp \in Y^\perp.$$

Für eine beliebige Menge  $Y \subset X$  setze weiter

$$Y^{\perp\perp} = (Y^\perp)^\perp \supset Y. \quad (2.4.1)$$

Mit Lemma 2.4.2 erhalten wir sofort  $Y^{\perp\perp} \supset \overline{\text{span } Y}$ . Wie das folgende Lemma zeigt, sind diese Mengen sogar gleich.

**Lemma 2.4.4.** Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum. Dann gilt  $Y^{\perp\perp} = \overline{\text{span } Y}$ . Insbesondere ist  $Y^{\perp\perp} = Y$  für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum  $Y \subset X$ .

**Beweis.** Setze  $W := \overline{\text{span } Y}$ . Nach Lemma 2.4.2 gilt  $W^\perp = Y^\perp$ , also auch

$$W^{\perp\perp} = Y^{\perp\perp} \supset \overline{\text{span } Y} = W.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass  $W^{\perp\perp} \subset W$ . Andernfalls gibt es  $y \in W^{\perp\perp} \setminus W$ , und nach Lemma 2.4.3) dürfen wir oBdA annehmen, dass  $y \perp W$ . Das heisst,  $y \in W^\perp \cap W^{\perp\perp}$ ; also  $(y, y) = 0$  im Widerspruch zur Wahl von  $y$ .  $\square$

## 2.5 Produkte

Analog zu  $\mathbb{R}^n$  kann man für Vektorräume  $(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \leq i \leq n$ , den Produktraum  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  definieren mit Elementen

$$x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in X_i (1 \leq i \leq n).$$

Wie in  $\mathbb{R}^n$  kann man aus den Normen  $\|\cdot\|_i$  der  $X_i$  verschiedene Normen für  $X$  ableiten, zum Beispiel für  $1 \leq p < \infty$  die Norm

$$\|x\|_{p,X} := \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^p \right)^{1/p},$$

oder die Norm

$$\|x\|_{\infty, X} := \max_i \|x_i\|_i.$$

Diese sind wegen Beispiel 2.1.2 alle äquivalent, und die Projektionen

$$\pi_i: X \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \in X_i$$

sind stetig,  $1 \leq i \leq n$ .  $X$  ist vollständig, falls alle  $X_i$  dies sind.





## Kapitel 3

# Prinzipien der Funktionalanalysis

### 3.1 Gleichmässige Beschränktheit

Wie angekündigt, liefert der Satz 1.4.3 von Baire im Kontext linearer Abbildungen auch Information “im Grossen”. Seien  $X, Y$  normierte Räume.

**Satz 3.1.1.** (*Banach-Steinhaus*) Sei  $X$  vollständig,  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  in  $L(X, Y)$  punktweise beschränkt, das heisst

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda x\|_Y < \infty, \forall x \in X.$$

Dann folgt

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda\|_{L(X, Y)} < \infty;$$

das heisst  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ist gleichmässig beschränkt.

**Beweis.** Für  $\lambda \in \Lambda$  definiere die stetige Abbildung  $f_\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_\lambda(x) = \|A_\lambda x\|_Y, x \in X.$$

Nach Annahme ist  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  punktweise beschränkt.

Da  $X$  vollständig ist, existiert nach Satz 1.4.3 eine Kugel  $B = B_r(x_0) \subset X$  mit

$$\sup_{\lambda \in \Lambda, z \in B} |f_\lambda(z)| < \infty.$$

Es folgt für  $\|x\|_X < 1$ :

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\|_Y &= \frac{1}{r} \|A_\lambda(x_0 + rx) - A_\lambda(x_0)\|_Y \\ &\leq \frac{1}{r} \|A_\lambda(x_0 + rx)\|_Y + \frac{1}{r} \|A_\lambda x_0\|_Y \\ &\leq \frac{1}{r} \sup_{\lambda \in \Lambda, z \in B_r(x_0)} |f_\lambda(z)| + \frac{1}{r} \sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda x_0\|_Y =: M, \end{aligned}$$

gleichmässig in  $\lambda \in \Lambda$  und  $x \in X$  mit  $\|x\|_X < 1$ ; also

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda\|_{L(X,Y)} \leq M.$$

□

**Anwendung 3.1.1.** Sei  $X$  vollständig,  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$  punktweise gegen  $A: X \rightarrow Y$  konvergent. Dann ist  $A$  linear und stetig mit

$$\|A\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} < \infty.$$

**Beweis.** Nach Satz 3.1.1 gilt  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|A_j\|_{L(X,Y)} < \infty$ . Wähle eine geeignete Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  mit

$$\|A_j\|_{L(X,Y)} \xrightarrow{(j \rightarrow \infty, j \in \Lambda)} \liminf_{j \rightarrow \infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} =: M < \infty.$$

Diese Teilfolge konvergiert natürlich ebenfalls punktweise gegen  $A$ . Offenbar ist  $A$  linear, und es gilt

$$\|Ax\|_Y = \lim_{j \rightarrow \infty, j \in \Lambda} \|A_j x\|_Y \leq \lim_{j \rightarrow \infty, j \in \Lambda} \|A_j\|_{L(X,Y)} \|x\|_X = M \|x\|_X$$

für alle  $x \in X$ . □

Die Vollständigkeit von  $X$  ist wichtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.1.1.** Sei  $X = C^0([0, 1])$ ,  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1}$ , und definiere  $A_j: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A_j f := j \int_{1-1/j}^1 f(t) dt$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Offenbar gilt

$$|A_j f| \leq j \|f\|_{L^1}, j \in \mathbb{N};$$

also ist  $A_j: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $\|A_j\|_{L(X, \mathbb{R})} \leq j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt

$$\forall f \in X: A_j f \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} Af := f(1);$$

jedoch ist  $A: X \rightarrow \mathbb{R}$  unstetig. Wähle dazu  $f_n(t) = t^n$  mit  $\|f_{n-1}\|_{L^1} = 1/n$  und  $Af_n = f_n(1) = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Vorsehen wir jedoch  $X = C^0([0, 1])$  mit der Norm  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{C^0}$ , so können wir abschätzen

$$|A_j f| \leq \|f\|_{C^0}, j \in \mathbb{N},$$

und für  $A$  mit  $Af = f(1)$  gilt  $A \in L(X, \mathbb{R})$ .

## 3.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $A: X \rightarrow Y$  linear.

**Definition 3.2.1.** *A heisst **offen**, falls das Bild jeder offenen Menge  $U \subset X$  offen ist in  $Y$ .*

**Satz 3.2.1.** (Satz von der offenen Abbildung): Seien  $X, Y$  Banachräume,  $A \in L(X, Y)$ . Dann gilt:

i) Ist  $A$  surjektiv, so ist  $A$  offen.

ii) Ist  $A$  bijektiv, so gilt  $A^{-1} \in L(Y, X)$ .

**Beweis.** i) Wir führen den Beweis in 3 Schritten.

**Behauptung 1.**  $\exists r > 0: B_{2r}(0; Y) \subset \overline{A(B_1(0; X))}$ .

**Beweis.** Da  $A$  surjektiv, folgt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k(0; X)).$$

Da  $Y$  vollständig ist, gibt es nach Satz 1.3.1 iii) ein  $k_0$  mit

$$\overline{A(B_{k_0}(0; X))}^{\circ} \neq \emptyset,$$

und es gibt  $y_0 = A(x_0) \in Y, r_0 > 0$  mit

$$B_{r_0}(y_0; Y) \subset \overline{A(B_{k_0}(0; X))}.$$

Sei  $l_0 \geq \|x_0\|_X, l_0 \in \mathbb{N}$ . Dann folgt aus

$$B_{r_0}(y_0; Y) = Ax_0 + B_{r_0}(0; Y)$$

mit der Linearität von  $A$

$$\begin{aligned} B_{r_0}(0; Y) &\subset \overline{A(B_{k_0}(0; X))} - Ax_0 = \overline{A(B_{k_0}(0; X) - x_0)} \\ &\subset \overline{A(B_{k_0+l_0}(0; X))} = (k_0 + l_0) \overline{A(B_1(0; X))}. \end{aligned}$$

Wähle  $r = \frac{r_0}{2(k_0+l_0)}$ . □

Beachte, dass nach Behauptung 1 gilt

$$\forall s > 0: B_{sr}(0; Y) \subset \overline{A(B_{s/2}(0; X))}.$$

**Behauptung 2.**  $B_r(0; Y) \subset A(B_1(0; X))$ .

**Beweis.** Fixiere  $y \in B_r(0; Y)$ . Wir konstruieren iterativ eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X < 1$  und

$$\sum_{k=1}^n Ax_k \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da  $X$  vollständig ist, existiert  $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in B_1(0; X)$ , und mit der Stetigkeit von  $A$  folgt

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = y.$$

Wähle  $x_1 \in B_{1/2}(0; X)$  mit

$$\|Ax_1 - y\|_Y < \frac{r}{2}.$$

Setze  $y_1 = y - Ax_1 \in B_{r/2}(0; Y)$ .

Seien für  $k \geq 1$  Punkte  $x_1, \dots, x_k$  sowie  $y_1, \dots, y_k$  bereits bestimmt mit

$$\|x_l\|_X < 2^{-l}, \quad y_l = y_{l-1} - Ax_l \in B_{2^{-l}r}(0; Y), \quad 1 \leq l \leq k.$$

Wähle  $x_{k+1} \in B_{2^{-k-1}}(0; X)$ , so dass

$$y_{k+1} := y_k - Ax_{k+1} \in B_{2^{-k-1}r}(0; Y).$$

Dann folgt  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X < 1$  und

$$y - \sum_{k=1}^n Ax_k = y_1 - \sum_{k=2}^n Ax_k = \dots = y_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

wie gewünscht.  $\square$

**Behauptung 3.**  $A$  ist offen.

**Beweis.** Sei  $U \subset X$  offen,  $x_0 \in U$ ,  $y_0 = Ax_0$ . Wähle  $s > 0$  mit  $B_s(x_0; X) \subset U$ . Dann folgt mit Behauptung 2 sofort

$$\begin{aligned} B_{rs}(y_0; Y) &= y_0 + B_{rs}(0; Y) \subset Ax_0 + A(B_s(0; X)) \\ &= A(B_s(x_0; X)) \subset A(U). \end{aligned}$$

$\square$

i)  $\Rightarrow$  ii) Falls  $A$  bijektiv und offen, so ist für jede offene Menge  $U \subset X$  das Urbild  $(A^{-1})^{-1}(U) = A(U)$  von  $U$  unter  $A^{-1}$  offen,  $A^{-1}$  also stetig.  $\square$

**Beispiel 3.2.1.** i) Sei  $X = Y$  mit Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ , und es gelte mit einer Konstanten  $C \in \mathbb{R}$

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X. \quad (3.2.1)$$

Ist  $X$  vollständig sowohl bezüglich  $\|\cdot\|_1$  als auch bezüglich  $\|\cdot\|_2$ , so ist die Abbildung  $A = id: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  offen, und die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  sind äquivalent.

**Beweis.** Wegen (3.2.1) ist  $A$  stetig. Falls  $X$  vollständig ist bezüglich  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ , so folgt mit Satz 3.2.1 auch die Stetigkeit von  $A^{-1}$ ; das heisst, es gilt  $\|x\|_1 \leq C'\|x\|_2, \forall x \in X$ .  $\square$

ii) Betrachte insbesondere  $X = C^0([0, 1])$  mit den Normen  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{C^0}$ ,  $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^1}$ . Die Abbildung  $A = id$  ist stetig aber nicht offen; sonst wären die Normen  $\|\cdot\|_{C^0}$  und  $\|\cdot\|_{L^1}$  auf  $C^0([0, 1])$  äquivalent.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Vollständigkeit von  $Y$  in Satz 3.2.1 nötig ist. Analog sieht man ein, dass auch die Vollständigkeit von  $X$  im allgemeinen notwendig ist. Betrachte dazu das Beispiel

iii) Sei  $X = Y = l^2$ ,  $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{l^2}$ , und definiere eine Norm  $\|\cdot\|_1$  auf  $X$ , wie folgt: Erweitere das System linear unabhängiger Vektoren  $e_i = (\delta_{ik})_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, 2, 3, \dots$  zu einer algebraischen Basis ("Hamel-Basis")  $(b_\iota)_{\iota \in I}$  mit  $\|b_\iota\|_{l^2} = 1, \iota \in I$ . Dann hat jedes  $x \in X$  genau eine Darstellung

$$x = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota b_\iota,$$

wobei nur **endlich** viele  $\alpha_\iota \neq 0$ . Setze

$$\|x\|_1 = \sum_{\iota \in I} |\alpha_\iota|, \forall x = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota b_\iota \in X.$$

Beachte, dass für  $x = \sum_\iota \alpha_\iota b_\iota$  stets gilt

$$\|x\|_{l^2} \leq \sum_\iota |\alpha_\iota| \|b_\iota\|_{l^2} = \|x\|_1;$$

das heisst  $A = id: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  ist stetig. Jedoch gilt für  $x_k = \underbrace{(1/\sqrt{k}, \dots, 1/\sqrt{k}, 0, \dots)}_{k\text{-mal}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k e_i$

$$\|x_k\|_{l^2} = 1, \|x_k\|_1 = \sqrt{k}, k \in \mathbb{N};$$

also sind die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_{l^2}$  nicht äquivalent,  $A^{-1}$  also nicht stetig und damit  $A$  nicht offen, und der Raum  $(l^2, \|\cdot\|_1)$  ist nicht vollständig.

**Beispiel 3.2.2.** Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  Banach-Raum,  $Y \subset X$  abgeschlossen,  $Y \neq X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/Y$  die kanonische Projektion.  $\pi$  ist stetig und surjektiv, der Raum  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$  vollständig nach Satz 2.3.1. Nach Satz 3.2.1 ist  $\pi$  daher offen, und die offenen Mengen in  $X/Y$  sind **genau** die Mengen  $\{\pi(U); U \subset X \text{ offen}\}$ .

### 3.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  linear, wobei  $D(A) \subset X$  ein linearer Unterraum ist.

Betrachte den **Graph von  $A$** , also den linearen Raum

$$\Gamma_A = \{(x, Ax); x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

**Definition 3.3.1.**  $A$  heisst **abgeschlossen**, falls  $\Gamma_A$  abgeschlossen ist in  $X \times Y$ .

Dabei verstehen wir  $X \times Y$  in üblicher Weise mit einer Norm, zum Beispiel mit der Norm

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y, \forall x \in X, y \in Y.$$

**Beispiel 3.3.1.** Falls  $A \in L(X, Y)$  mit  $D(A) = X$ , so ist  $A$  abgeschlossen.

**Beweis.** Betrachte eine Folge  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Gamma_A$  mit

$$x_k \rightarrow x, y_k = Ax_k \rightarrow y (k \rightarrow \infty).$$

Da  $A$  stetig ist, folgt  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_k = Ax$ ; das heisst,  $(x, y) \in \Gamma_A$ . Also ist  $\Gamma_A$  abgeschlossen, und damit  $A$ .  $\square$

Falls  $X$  und  $Y$  vollständig sind, so ist für lineare Abbildungen  $A: X \rightarrow Y$  die Stetigkeit sogar äquivalent zur Abgeschlossenheit.

**Satz 3.3.1.** (Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien  $X, Y$  Banach-Räume,  $A: X \rightarrow Y$  linear. Dann sind äquivalent:

i)  $A \in L(X, Y)$ ;

ii)  $A$  ist abgeschlossen.

**Beweis.** i)  $\Rightarrow$  ii) siehe Beispiel 3.3.1.

ii)  $\Rightarrow$  i) Betrachte  $\Gamma_A$ , versehen mit der von der Norm  $\|\cdot\|_{X \times Y}$  auf  $X \times Y$  induzierten Norm. Falls  $X, Y$  vollständig sind, so gilt dies auch für  $X \times Y$ . Ist daher  $\Gamma_A$  abgeschlossen in  $X \times Y$ , so ist  $(\Gamma_A, \|\cdot\|_{X \times Y})$  ein Banach-Raum.

Die Projektionen

$$\pi_X: \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto x \in X, \quad \pi_Y: \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto Ax \in Y$$

sind stetig,  $\pi_X: \Gamma_A \rightarrow X$  zudem surjektiv und injektiv. Nach dem Satz 3.2.1 von der offenen Abbildung folgt  $\pi_X^{-1} \in L(X, \Gamma_A)$ , und wir erhalten

$$A = \pi_Y \circ \pi_X^{-1} \in L(X, Y)$$

mit Satz 2.2.3. □

**Bemerkung 3.3.1.** Satz 3.3.1 vereinfacht den Nachweis der Stetigkeit einer linearen Abbildung  $A: X \rightarrow Y$  erheblich. Statt der **zwei** Bedingungen

$$x_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} x \Rightarrow \begin{cases} Ax_k \rightarrow y \ (k \rightarrow \infty) \\ y = Ax \end{cases}$$

genügt es für Banach-Räume  $X$  und  $Y$ , die **eine** Bedingung zu prüfen

$$x_k \rightarrow x, \quad Ax_k \rightarrow y \ (k \rightarrow \infty) \Rightarrow Ax = y.$$

**Beispiel 3.3.2.** (Hellinger-Töplitz) Sei  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ein Hilbert-Raum, und sei  $A: H \rightarrow H$  linear und symmetrisch; das heisst,

$$\forall x, y \in H: (Ax, y)_H = (x, Ay)_H.$$

Dann ist  $A$  stetig.

**Beweis.** Wir zeigen,  $\Gamma_A$  ist abgeschlossen. Betrachte  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  in  $H \times H$  mit

$$x_k \rightarrow x, \quad y_k = Ax_k \rightarrow y \ (k \rightarrow \infty).$$

Es folgt für alle  $z \in H$

$$(y, z)_H \xleftarrow{(k \rightarrow \infty)} (y_k, z)_H = (Ax_k, z)_H = (x_k, Az)_H \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} (x, Az)_H = (Ax, z)_H;$$

das heisst,

$$\forall z \in H: (Ax - y, z)_H = 0.$$

Bei Wahl von  $z = Ax - y$  folgt  $Ax = y$ ; das heisst,  $\Gamma_A$  ist abgeschlossen. □

Der Graph  $\Gamma_A$  kann auch abgeschlossen sein, wenn  $D(A)$  ein echter Teilraum von  $X$  und der Operator  $A$  unbeschränkt ist.

**Beispiel 3.3.3.** Sei  $X = C^0([0, 1])$ , versehen mit der Supremumsnorm,  $A = \frac{d}{dt}$  mit  $D(A) = C^1([0, 1]) \subset X$ .

**Behauptung 1.**  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  ist nicht stetig.

**Beweis.** Betrachte  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C^1([0, 1])$  mit  $f_n(t) = t^n$ ,  $Af_n = nf_{n-1}$ , und

$$\|f_n\|_{C^0} = 1, \|Af_n\|_{C^0} = n\|f_{n-1}\|_{C^0} = n, n \in \mathbb{N};$$

also

$$\sup_{f \in D(A), \|f\|_{C^0} \leq 1} \|Af\|_{C^0} = \infty.$$

□

**Behauptung 2.**  $A$  ist abgeschlossen.

**Beweis.** Falls für Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C^0([0, 1])$  gilt

$$f_n \xrightarrow{C^0} f, g_n = \frac{df_n}{dt} \xrightarrow{C^0} g \quad (n \rightarrow \infty),$$

so folgt mit einem elementaren Satz der Analysis  $f \in C^1([0, 1])$ ,  $g = \frac{df}{dt} = Af$ ; das heisst,  $\Gamma_A$  ist abgeschlossen. □

Im Satz 3.2.1 ii) von der offenen Abbildung können wir nun die Annahme der Stetigkeit von  $A$  durch die Annahme der Abgeschlossenheit ersetzen und diesen Satz auf unbeschränkte Operatoren erweitern.

**Satz 3.3.2.** (Satz von der stetigen Inversen) Seien  $X, Y$  Banach-Räume, und sei  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  linear, abgeschlossen, injektiv und surjektiv. Dann gibt es ein  $B = A^{-1} \in L(Y, X)$  mit  $AB = id|_Y$ ,  $BA = id|_{D(A)}$ .

**Beweis.** Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 ist jetzt die stetige Projektion  $\pi_Y: \Gamma_A \rightarrow Y$  bijektiv, und  $\pi_Y^{-1} \in L(Y, \Gamma_A)$ ; also  $B := \pi_X \circ \pi_Y^{-1} \in L(Y, X)$ , und  $B = A^{-1}: Y \rightarrow D(A)$ . □

**Beispiel 3.3.4.** Für den Operator  $A$  aus Beispiel 3.3.3 wähle als neuen Definitionsbereich

$$D(A) = C_0^1([0, 1]) = \{f \in C^1([0, 1]); f(0) = 0\}.$$

Dann ist  $A = \frac{d}{dt}: D(A) \subset C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$  surjektiv und injektiv mit der stetigen Inversen

$$B: f \mapsto F(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

## 3.4 Abschliessbare Operatoren

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $\Gamma \subset X \times Y$  ein linearer Unterraum.

**Definition 3.4.1.**  $\Gamma$  heisst ein **linearer Graph**, falls gilt

$$(x, y_1) \in \Gamma, (x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2,$$

oder, dazu äquivalent, falls gilt

$$(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0.$$

**Bemerkung 3.4.1.** Falls  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  linear, so ist  $\Gamma_A$  offenbar ein linearer Graph.

Umgekehrt induziert ein linearer Graph  $\Gamma \subset X \times Y$  genau eine lineare Abbildung  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  mit  $\Gamma = \Gamma_A$ , gegeben durch

$$D(A) = \pi_X(\Gamma), \quad Ax = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap \Gamma), \quad x \in D(A).$$

Seien  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y, B: D(B) \subset X \rightarrow Y$  linear mit Graphen  $\Gamma_A, \Gamma_B \subset X \times Y$ .

**Definition 3.4.2.**  $B$  heisst **Erweiterung** von  $A, B \supset A$ , falls  $\Gamma_A \subset \Gamma_B$ , oder – dazu äquivalent – falls

$$D(A) \subset D(B) \text{ und } B|_{D(A)} = A.$$

**Definition 3.4.3.**  $A$  heisst **abschliessbar**, falls  $\overline{\Gamma_A}$  ein linearer Graph ist. Der zugehörige Operator  $\overline{A} \supset A$  mit  $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A} \supset \Gamma_A$  heisst **Abschluss** von  $A$ .

**Bemerkung 3.4.2.** i) Falls  $A$  abschliessbar ist, so ist  $\overline{A}$  die kleinste abgeschlossene Erweiterung (im Sinne der Inklusion der Graphen) von  $A$ .

ii) Es gilt  $D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}$ , genauer

$$D(\overline{A}) = \{x \in X; \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A), y \in Y: (x_k, Ax_k) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} (x, y)\}.$$

Im Allgemeinen gilt  $D(\overline{A}) \neq \overline{D(A)}$ . So sind die Operatoren in Beispiel 3.3.3 oder in Beispiel 3.4.3 später in diesem Abschnitt abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich, dieser ist jedoch jeweils ein strikter Unterraum des Grundraumes.

**Satz 3.4.1.**  $A$  ist abschliessbar genau dann, wenn für  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma_A$  gilt:

$$(x_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0 \wedge y_k = Ax_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} y) \Rightarrow y = 0.$$

**Beweis.**  $A$  ist abschliessbar genau dann, wenn  $\overline{\Gamma_A}$  ein linearer Graph ist und dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:  $(0, y) \in \overline{\Gamma_A} \Rightarrow y = 0$ .  $\square$

**Beispiel 3.4.1.** Sei  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  linear und stetig. Dann ist  $A$  abschliessbar.



**Beweis.** Sei  $(x_k, Ax_k = y_k) \in \Gamma_A$  mit  $x_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$ . Da  $A$  stetig, folgt

$$\|Ax_k\|_Y \leq \sup_{\substack{0 \neq x \in D(A) \\ \|x\|_X \leq 1}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \|x_k\|_X \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

also  $Ax_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). □

Nicht jeder Operator ist abschliessbar.

**Beispiel 3.4.2.** Sei  $X = L^2(\mathbb{R})$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $A$  die Abbildung

$$A: D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\} \ni f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

(Dabei bezeichnet  $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}$  den ‘‘Träger’’ von  $f$ . Weiter schreiben wir  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}$ , falls  $\Omega \subset \mathbb{R}$  und  $\Omega$  beschränkt.)

Für die Folge  $f_k = \frac{1}{k} \chi_{[0,k]} \in D(A)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , gilt

$$\|f_k\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

andererseits gilt jedoch

$$\forall k \in \mathbb{N}: Af_k = 1.$$

Also ist  $A$  nicht abschliessbar nach Satz 3.4.1.

Die wichtigste Klasse abschliessbarer Operatoren sind lineare Differentialoperatoren. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , wobei  $\mu = \mathcal{L}^n$  das Lebesguesche Mass bezeichnet.

**Beispiel 3.4.3.**  $\Delta: C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  ist abschliessbar.

**Beweis.** Sei  $((u_k, f_k))_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\Gamma_\Delta \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  mit

$$u_k \xrightarrow{L^2} 0, \quad f_k = \Delta u_k \xrightarrow{L^2} f \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dann gilt für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , alle  $k \in \mathbb{N}$  nach partieller Integration die Gleichung

$$\int_{\Omega} f_k \varphi dx = \int_{\Omega} \Delta u_k \varphi dx = \int_{\Omega} u_k \Delta \varphi dx.$$

Nach Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  folgt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} f \varphi dx = 0.$$

Da der Raum  $C_c^\infty(\Omega)$  dicht liegt in  $L^2(\Omega)$ , folgt  $f = 0$ ; also ist  $\Delta$  abschliessbar nach Satz 3.4.1. □

Allgemein betrachten wir für  $1 \leq p \leq \infty$  Operatoren

$$A: C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega),$$

auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , wobei

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad u \in C_c^\infty(\Omega),$$

mit Multi-Indices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  vom Gewicht  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , und mit

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Die Koeffizientenfunktionen  $a_\alpha$  seien der Einfachheit halber von der Klasse  $C^N(\overline{\Omega})$  vorausgesetzt.

**Satz 3.4.2.** *Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann ist der oben definierte Operator*

$$A: C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

*abschliessbar.*

**Beweis.** Wir argumentieren wie in Beispiel 3.4.3. Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  mit  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^p(\Omega)$ ,  $f_k := Au_k \rightarrow f$  in  $L^p(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ , und sei  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Nach partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_k \varphi \, dx &= \int_{\Omega} Au_k \varphi \, dx = \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\Omega} a_\alpha(x) D^\alpha u_k \varphi \, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_k D^\alpha (a_\alpha(x) \varphi) \, dx. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  folgt

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0.$$

Der folgende Satz 3.4.3 ergibt  $f = 0$ ; das heisst,  $A$  ist abschliessbar.  $\square$

**Satz 3.4.3.** (*“Fundamentallemma der Variationsrechnung”*) *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Falls gilt*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0,$$

*so ist  $f = 0$   $\mu$ -fast überall.*

**Bemerkung 3.4.3.** Die Annahme  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ist zum Beispiel erfüllt, falls  $f \in L^p(\Omega)$  für ein  $p \in [1, \infty]$ .

**Beweis von Satz 3.4.3.** Sei  $x_0 \in \Omega$  Lebesgue-Punkt von  $f$  mit

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)| \, dx = 0,$$

und sei  $r > 0$  mit  $B_r(x_0) \subset \Omega$ . Wähle  $\varphi \in C_c^\infty(B_r(0))$  mit  $\int_{B_r(0)} \varphi \, dx = 1$ , und setze

$$\varphi_k(x) = k^n \varphi(k(x - x_0)) \in C_c^\infty(B_{r/k}(x_0)) \subset C_c^\infty(\Omega), \quad k \in \mathbb{N},$$

mit  $\int_{\Omega} \varphi_k dx = 1$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$\left| \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) \varphi_k(x) dx \right| \leq C k^n \int_{B_{r/k}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| dx \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

und

$$0 = \int_{\Omega} f \varphi_k dx = \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) \varphi_k(x) dx + f(x_0) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f(x_0).$$

Da  $x_0$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.  $\square$

Im Falle der oben genannten Differentialoperatoren möchte man  $\bar{A}$  und  $D(\bar{A})$  gerne explizit bestimmen. Diese Frage führt auf die sogenannten **Sobolev-Räume**. Im Falle des Beispiels 3.4.3 etwa ist  $D(\bar{\Delta}) \subset L^2(\Omega)$  der Raum

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq 2: D^\alpha u \in L^2(\Omega), \\ u = D_j u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, 1 \leq j \leq n\};$$

vergleiche Funktionalanalysis II.



# Kapitel 4

## Der Satz von Hahn-Banach, Konvexität

### 4.1 Der Satz von Hahn-Banach

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. (Siehe Satz 4.1.2 für den komplexen Fall.)

**Definition 4.1.1.** Ein  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **sublinear**, falls gilt

i)  $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ ,  $\forall x \in X, \alpha \geq 0$ .

ii)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

**Beispiel 4.1.1.** Jede Norm auf  $X$  ist sublinear.

**Satz 4.1.1.** (Hahn-Banach): Sei  $M$  ein linearer Teilraum von  $X$ ,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M. \quad (4.1.1)$$

Dann existiert eine lineare Abbildung  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F|_M = f$  und

$$F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X. \quad (4.1.2)$$

**Beweis.** i) OBdA sei  $M \neq X$ ; sonst wähle  $F = f$ . Wähle  $x_1 \notin M$  und setze

$$M_1 = \{x + tx_1; x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Beachte, dass für  $x, y \in M$  wegen Linearität von  $f$  und Sublinearität von  $p$  stets gilt

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

also auch

$$\forall x, y \in M: f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y). \quad (4.1.3)$$

Es folgt

$$\alpha := \sup_{x \in M} (f(x) - p(x - x_1)) < \infty,$$

und

$$\forall x \in M: f(x) - \alpha \leq p(x - x_1).$$

Nach Übergang zum Supremum bezüglich  $x \in M$  liefert (4.1.3) zudem

$$\forall y \in M: f(y) + \alpha \leq p(y + x_1).$$

Definiere  $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha, \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist  $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $f_1|_M = f$ , und es gilt

$$\forall x \in M: f_1(x \pm x_1) = f(x) \pm \alpha \leq p(x \pm x_1). \quad (4.1.4)$$

Nach Multiplikation von (4.1.4) mit  $t > 0$  und mit  $t^{-1}x$  anstelle von  $x$  erhalten wir

$$\forall x \in M, \quad t > 0: f_1(x \pm tx_1) = f(x) \pm t\alpha \leq p(x \pm tx_1),$$

also die Bedingung (4.1.1) auf dem Raum  $M_1$ .

ii) Mit transfiniten Induktion können wir uns nun eine lineare Fortsetzung  $g$  von  $f$  auf einem maximalen linearen Unterraum  $N$  von  $X$  verschaffen. Wir benutzen dazu das Zornsche Lemma. (Dies ist ein zum Auswahlaxiom oder zum Wohlordnungssatz äquivalentes Axiom; vergleiche Analysis I.)

**Zornsches Lemma:** Sei  $(\mathcal{P}, \leq)$  nicht leer, partiell geordnet, und jede durch  $\leq$  total ("linear") geordnete Teilmenge von  $\mathcal{P}$  besitze eine obere Schranke. Dann besitzt  $\mathcal{P}$  ein maximales Element.

Setze

$$\mathcal{P} = \{(N, g); N \subset X \text{ linear}, M \subset N, g: N \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}, g|_M = f, g \leq p \text{ auf } N\}$$

und für  $(N, g), (L, h) \in \mathcal{P}$  setze

$$(N, g) \leq (L, h) :\Leftrightarrow N \subset L, h|_N = g.$$

Offenbar ist  $(\mathcal{P}, \leq)$  partiell geordnet,  $(M, f) \in \mathcal{P}$ , also  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Sei  $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$  linear geordnet. Setze

$$N = \bigcup_{\iota \in I} N_\iota$$

und für  $x \in N$  setze

$$g(x) = g_\iota(x), \quad \text{falls } x \in N_\iota.$$

Dann ist  $N$  ein linearer Unterraum von  $X$ , und  $g$  ist wohldefiniert und linear mit  $g(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in N$ . Sei nämlich  $x \in N_\iota \cap N_\kappa$  mit  $N_\iota \subset N_\kappa$  für  $\iota, \kappa \in I$ ; dann gilt  $g_\kappa|_{N_\iota} = g_\iota$ , also  $g_\iota(x) = g_\kappa(x)$ . Weiter gilt für  $x \in N_\iota, y \in N_\kappa$  mit  $N_\iota \subset N_\kappa$  auch  $x, y \in N_\kappa$  und daher

$$g(x + y) = g_\kappa(x + y) = g_\kappa(x) + g_\kappa(y) = g(x) + g(y).$$

Schliesslich ist  $(N, g)$  obere Schranke für  $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$ , da für jedes  $\iota \in I$  gilt

$$N_\iota \subset N \text{ und } g|_{N_\iota} = g_\iota.$$

Das Zornsche Lemma liefert nun ein (bezüglich  $\leq$ ) maximales  $(N, g) \in \mathcal{P}$ , wie gewünscht.

Es gilt  $N = X$ , sonst liefert i) ein  $(N_1, g_1) \in \mathcal{P}$  mit  $(N, g) < (N_1, g_1)$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(N, g)$ . Setze  $F = g$ .  $\square$

Sei nun  $X$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Definition 4.1.2.**  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  heisst  $\mathbb{C}$ -sublinear, falls gilt

i)  $p(\alpha x) = |\alpha|p(x), \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C},$

ii)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X.$

**Bemerkung 4.1.1.** Jedes  $\mathbb{C}$ -sublineare  $p$  ist auch  $\mathbb{R}$ -sublinear. Aus i), ii) folgt im komplexen Fall zusätzlich die Bedingung

iii)  $p(x) \geq 0, \forall x \in X.$

**Beweis.** Für  $x \in X$  schätze ab

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

$\square$

**Satz 4.1.2.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum,  $M \subset X$  ein  $\mathbb{C}$ -linearer Unterraum,  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit

$$\forall x \in M: |f(x)| \leq p(x), \quad (4.1.5)$$

für ein  $\mathbb{C}$ -sublineares  $p$ . Dann gibt es eine  $\mathbb{C}$ -lineare Fortsetzung  $F: X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F|_M = f$  und

$$|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X.$$

**Beweis.** Betrachte  $f_1 = \operatorname{Re} f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Beachte,  $f_1$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und erfüllt (4.1.5). Weiter gilt für  $x \in M$  mit  $f = f_1 + if_2$ :

$$f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) = if(x) = -f_2(x) + if_1(x);$$

also

$$\forall x \in M: f_2(x) = -f_1(ix).$$

Sei  $F_1: X \rightarrow \mathbb{R}$  die  $\mathbb{R}$ -lineare Fortsetzung von  $f_1$  gemäss Satz 4.1.1 mit  $F_1|_M = f_1$  und

$$\forall x \in X: F_1(x) \leq p(x). \quad (4.1.6)$$

Setze

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix), \quad x \in X.$$

$F$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und wegen  $F(ix) = iF(x)$  auch  $\mathbb{C}$ -linear mit  $F|_M = f$ .

Schliesslich zeigen wir, dass  $F$  auch (4.1.5) erfüllt. Sei  $x \in X$ . Wähle  $\alpha = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$  mit

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = F_1(\alpha x).$$

Dann folgt aus (4.1.6) und Definition 4.1.2

$$|F(x)| = F_1(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha|p(x) = p(x),$$

wie gewünscht.  $\square$

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber, falls nicht anders vermerkt, stets den reellen Fall.

Satz 4.1.1 gestattet es insbesondere, stetige lineare Abbildungen auf einem Unterraum  $M$  eines normierten Raumes  $(X, \|\cdot\|_X)$  auf ganz  $X$  zu erweitern, mit derselben Abbildungsnorm.

**Satz 4.1.3.** (*Dominierte Fortsetzung*) Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Vektorraum,  $M \subset X$  ein linearer Unterraum,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig.

Dann gibt es  $F \in L(X, \mathbb{R})$  mit  $F|_M = f$  und

$$\|F\|_{L(X, \mathbb{R})} = \|f\|_{L(M, \mathbb{R})} = \sup_{x \in M; \|x\|_X \leq 1} |f(x)|.$$

**Beweis.** Definiere  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$p(x) = \|x\|_X \cdot \|f\|_{L(M, \mathbb{R})}.$$

$p$  ist sublinear,  $f \leq p$  auf  $M$ . Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.1.  $\square$

## 4.2 Dualraum

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Vektorraum.

**Definition 4.2.1.**  $X^* := L(X, \mathbb{R})$  heisst **Dualraum** von  $X$ .

**Notation:** Für  $x^* \in X^*$ ,  $x \in X$  schreiben wir

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}.$$

Beachte, dass gemäss Beispiel 2.1.1 der Raum  $X^*$  stets ein Banachraum ist, unabhängig davon, ob dies für  $X$  gilt.

Wie "reichhaltig" ist  $X^*$ ?

**Satz 4.2.1.** Zu jedem  $x \in X$  gibt es  $x^* \in X^*$  mit

$$\langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2.$$

**Beweis.** Betrachte  $M = \text{span}\{x\}$ . Setze  $f(tx) = t\|x\|_X^2$  mit  $f \in L(M, \mathbb{R})$ ,

$$\|f\|_{L(M, \mathbb{R})} = \sup_{\|tx\|_X \leq 1} |f(tx)| = \|x\|_X.$$



Setze  $f$  gemäss Satz 4.1.3 fort zu  $x^* \in L(X, \mathbb{R})$ . Offenbar gilt

$$\|x^*\|_{X^*} = \|f\|_{L(M, \mathbb{R})} = \|x\|_X, \quad \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = f(x) = \|x\|_X^2.$$

□

Insbesondere erhalten wir die duale Charakterisierung der Norm.

**Satz 4.2.2.** *Es gilt*

$$i) \quad \forall x \in X: \|x\|_X = \sup_{x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\langle x^*, x \rangle|;$$

$$ii) \quad \forall x^* \in X^*: \|x^*\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |\langle x^*, x \rangle|.$$

*Das Supremum in i) wird stets sogar angenommen.*

**Beweis.** i) OBdA sei  $x \neq 0$ ; weiter dürfen wir wegen Homogenität annehmen, dass  $\|x\|_X = 1$ . Die Ungleichung  $|\langle x^*, x \rangle| \leq \|x\|_X = 1$  für alle  $x^* \in X^*$  mit  $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$  folgt unmittelbar aus der Definition der Norm in  $X^*$ . Wählen wir weiter  $x^* \in X^*$  gemäss Satz 4.2.1, erhalten wir  $|\langle x^*, x \rangle| = 1$  und damit die Behauptung.

ii) Dies ist die Definition der Norm in  $X^*$ . □

Weiter kann man verschiedene Punkte  $x \neq y$  in  $X$  durch ein  $l \in X^*$  "trennen".

**Satz 4.2.3.** *Seien  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ . Dann gibt es  $l \in X^*$  mit  $l(x) \neq l(y)$ .*

**Beweis.** Wähle  $l$  gemäss Satz 4.2.1 zum Vektor  $y - x \in X$  mit

$$l(x - y) = l(x) - l(y) = \|x - y\|_X^2 > 0.$$

□

Man kann sogar Punkte von (abgeschlossenen) Unterräumen trennen.

**Satz 4.2.4.** *Sei  $M \subset X$  ein abgeschlossener linearer Unterraum,  $M \neq X$ , und sei  $x_0 \notin M$  mit*

$$d = \text{dist}(x_0, M) = \inf_{x \in M} \|x_0 - x\|_X > 0.$$

*Dann gibt es  $l \in X^*$  mit  $l|_M = 0$  und*

$$\|l\|_{X^*} = 1, \quad l(x_0) = d.$$

**Beweis.** Setze

$$M_0 = \{x + tx_0; x \in M, t \in \mathbb{R}\},$$

und definiere die lineare Abbildung  $f: M_0 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x + tx_0) = td.$$

Dann gilt:  $f|_M = 0$ ,  $f(x_0) = d$ .

**Behauptung.**  $\|f\|_{L(M_0, \mathbb{R})} = 1$ .

**Beweis.** Für  $y = x + tx_0 \in M_0$  mit  $t \neq 0$  gilt

$$|f(y)| = |t|d \leq |t| \left\| x_0 - \left(\frac{-x}{t}\right) \right\|_X = \|tx_0 + x\|_X = \|y\|_X;$$

also  $\|f\|_{L(M_0, \mathbb{R})} \leq 1$ .

Umgekehrt wähle zu  $\varepsilon > 0$  ein  $x = x_\varepsilon \in M$  mit

$$d \leq \|x_0 - x\|_X < d + \varepsilon.$$

Es folgt für  $y = x_0 - x \in M_0$

$$f(y) = d \geq \frac{d}{d + \varepsilon} \|y\|_X; \quad (4.2.1)$$

das heisst

$$\|f\|_{L(M_0, \mathbb{R})} = \sup_{0 \neq y \in M_0} \frac{|f(y)|}{\|y\|_X} \geq \frac{d}{d + \varepsilon}.$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung. □

Wähle  $l = F$ , die Fortsetzung von  $f$  gemäss Satz 4.1.3. □

**Bemerkung 4.2.1.** Aus (4.2.1) folgt sogar für jedes  $f \in X^*$  mit  $f|_M = 0$  und  $|f(x_0)| =: d + 2\varepsilon > d$  die Abschätzung  $\|f\|_{X^*} > 1$ . Somit erfüllt das in Satz 4.2.4 konstruierte  $l$  die Bedingung

$$d = \text{dist}(x_0, M) = l(x_0) = \sup_{\substack{f|_M = 0 \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |f(x_0)|;$$

das heisst, das Supremum wird für  $f = l$  angenommen.

Sei  $A \subset X$ .

**Definition 4.2.2.** Der **Annihilator** von  $A$  ist die Menge

$$A^\perp = \{f \in X^*; f|_A = 0\}.$$

**Bemerkung 4.2.2.** Offenbar gilt  $A^\perp = (\overline{\text{span}(A)})^\perp$ , wobei  $\text{span}(A)$  die lineare Hülle von  $A$  ist.

**Satz 4.2.5.** Sei  $M \subset X$  ein linearer Unterraum,  $x_0 \in X$ . Dann sind äquivalent

- i)  $x_0 \in \overline{M}$ ;
- ii)  $\forall f \in M^\perp: f(x_0) = 0$ .

**Beweis.** i)  $\Rightarrow$  ii) Sei  $f \in M^\perp$ ,  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  mit  $x_k \in M$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$ .

ii)  $\Rightarrow$  i) Sei  $x_0 \notin \overline{M}$ . Wähle  $l \in X^*$  gemäss Satz 4.2.4 mit  $l(x_0) = \text{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$  und  $l|_{\overline{M}} = 0$ , also  $l \in M^\perp$ . □

**Beispiel 4.2.1.** Insbesondere gilt für jeden linearen Unterraum  $M \subset X$ :

$$\overline{M} = X \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}.$$

**Beweis.** “ $\Rightarrow$ ”: Falls  $\overline{M} = X$ , so verschwindet gemäss Satz 4.2.5 jedes  $f \in M^\perp$  an jeder Stelle  $x_0 \in X$ ; also  $M^\perp = \{0\}$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Falls  $M^\perp = \{0\}$ , so gilt gemäss Satz 4.2.5 die Aussage  $x_0 \in \overline{M}$  für jedes  $x_0 \in X$ ; also  $\overline{M} = X$ .  $\square$

**Bemerkung 4.2.3.** Zu  $L \subset X^*$  sei

$${}^\perp L = \{x \in X; \forall l \in L: l(x) = 0\}.$$

Dann gilt gemäss Satz 4.2.5 für jeden linearen Unterraum  $M \subset X$  die Beziehung

$${}^\perp(M^\perp) = \overline{M};$$

vergleiche Lemma 2.4.4.

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir den Dualraum eines normierten Raumes und dessen Trennungseigenschaften genauer.

### 4.3 Dualität im Hilbertraum

Sei  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ein Hilbertraum (über  $\mathbb{R}$ ). Für  $y \in H$  sei  $j_y \in H^*$  die Abbildung

$$j_y(x) = (y, x)_H, \quad x \in H.$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung

$$J: H \ni y \mapsto j_y \in H^*$$

erklärt.

**Satz 4.3.1.**  *$J$  ist eine lineare Isometrie.*

**Beweis.** Offenbar ist  $J$  linear. Weiter gilt für  $y \in H$  mit Cauchy-Schwarz

$$\|j_y\|_{H^*} = \sup_{x \in H, \|x\|_H \leq 1} |j_y(x)| = \sup_{x \in H, \|x\|_H \leq 1} |(y, x)_H| \leq \|y\|_H.$$

Durch Einsetzen von  $x = \frac{y}{\|y\|_H}$  erhält man sogar die Gleichheit der Norm.  $\square$

Tatsächlich ist  $J$  sogar ein Isomorphismus, insbesondere surjektiv.

**Satz 4.3.2.** (Rieszscher Darstellungssatz) *Zu jedem  $l \in H^*$  gibt es genau ein  $y \in H$  mit*

$$\forall x \in H: l(x) = (y, x)_H = j_y(x).$$

**Beweis.** OBdA sei  $l \neq 0$ ; wegen Homogenität dürfen wir weiter annehmen, dass  $\|l\|_{H^*} = 1$ . Nach Definition der Operatornorm gibt es  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $H$  mit

$$\|y_k\|_H = 1, \quad l(y_k) \rightarrow \|l\|_{H^*} = 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Behauptung 1.**  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge.

**Beweis.** Benutze die Parallelogramm-Identität

$$\forall x, y \in H: \|x + y\|_H^2 + \|x - y\|_H^2 = 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2).$$

Mit  $x = y_j/2$ ,  $y = y_k/2$  folgt

$$\forall j, k \in \mathbb{N}: \left\| \frac{y_j + y_k}{2} \right\|_H^2 = 1 - \left\| \frac{y_j - y_k}{2} \right\|_H^2. \quad (4.3.1)$$

Mit Fehler  $o(1) \rightarrow 0$  ( $j, k \rightarrow \infty$ ) gilt somit

$$\begin{aligned} 1 + o(1) &= \frac{1}{2}(l(y_j) + l(y_k)) = l\left(\frac{y_j + y_k}{2}\right) \leq \|l\|_{H^*} \left\| \frac{y_j + y_k}{2} \right\|_H \\ &= \sqrt{1 - \left\| \frac{y_j - y_k}{2} \right\|_H^2}; \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{j, k \rightarrow \infty} \|y_j - y_k\|_H = 0,$$

wie gewünscht. □

Da  $H$  vollständig, existiert  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in H$ , und  $\|y\|_H = 1$ .

**Behauptung 2.**  $l = j_y$ .

**Beweis.** Wegen Stetigkeit von  $l$  gilt

$$l(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} l(y_k) = \|l\|_{H^*} = 1 = \|y\|_H^2 = j_y(y). \quad (4.3.2)$$

Sei

$$X = y^\perp = \{x \in H; (y, x)_H = 0\},$$

und sei  $x \in X$  mit  $\|x\|_H = 1$ . Für  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$\|y + \varepsilon x\|_H^2 = \|y\|_H^2 + 2\varepsilon(y, x)_H + \varepsilon^2\|x\|_H^2 = 1 + \varepsilon^2,$$

und die Vektoren

$$y_\varepsilon = \frac{y + \varepsilon x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

haben die Norm  $\|y_\varepsilon\|_H = 1$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Da für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  gilt

$$l(y_\varepsilon) \leq 1 = l(y) = l(y_0),$$

folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} l(y_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} (l(y) + \varepsilon l(x)) = l(x);$$

das heisst,

$$l|_X = 0 = j_y|_X.$$

Da  $H = \text{span}\{y\} + X$  nach Satz 2.4.1 folgt mit (4.3.2) die Behauptung. □

Offenbar ist  $y$  eindeutig bestimmt. Falls nämlich  $l = j_y = j_z$ , so folgt aus der Gleichheit  $(y, x)_H = (z, x)_H$  für alle  $x \in H$  bei Wahl von  $x = y - z$ , dass  $y = z$ . □

Mittels  $J$  können wir daher den Dualraum  $H^*$  von  $H$  mit  $H$  "identifizieren".

**Bemerkung 4.3.1.** i) Bedingung (4.3.1) besagt, dass die 1-Kugel in  $H$  **gleichmäßig** strikt konvex ist.

ii) Variationelle Charakterisierung: Zu  $l \in H^*$  sei  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = \frac{1}{2}(x, x)_H - l(x), \quad x \in H.$$

Dann gilt für  $y, z \in H, \varepsilon \in \mathbb{R}$ :

$$F(y + \varepsilon z) = F(y) + \varepsilon((y, z)_H - l(z)) + \frac{\varepsilon^2}{2}(z, z)_H;$$

also

$$j_y = l \Leftrightarrow F(y) = \min_{x \in H} F(x).$$

Eine wichtige Anwendung von Satz 4.3.2 liefert der folgende Satz.

**Satz 4.3.3.** (Lax-Milgram) Sei  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear und stetig mit

$$\forall x, y \in H: |a(x, y)| \leq \Lambda \|x\|_H \|y\|_H.$$

Mit einer Konstanten  $\lambda > 0$  gelte weiter

$$\forall x \in H: a(x, x) \geq \lambda \|x\|_H^2.$$

Dann gibt es eine stetige Bijektion  $A \in L(H)$  mit

$$\forall x, y \in H: a(x, y) = (Ax, y)_H,$$

und es gilt

$$\|A\|_{L(H)} \leq \Lambda, \quad \|A^{-1}\|_{L(H)} \leq \lambda^{-1}.$$

**Bemerkung 4.3.2.** Die Bilinearform  $a$  muss nicht symmetrisch sein.

**Beweis.** Für alle  $x \in H$  ist

$$l_x: y \mapsto a(x, y)$$

linear und

$$\|l_x\|_{H^*} = \sup_{y \in H, \|y\|_H \leq 1} |a(x, y)| \leq \Lambda \|x\|_H < \infty.$$

Nach Satz 4.3.2 existiert  $Ax := J^{-1}l_x \in H$  mit

$$\forall y \in H: a(x, y) = l_x(y) = (Ax, y)_H.$$

Offenbar ist  $A$  linear und wegen

$$\|Ax\|_H = \|l_x\|_{H^*} \leq \Lambda \|x\|_H$$

gilt  $A \in L(H), \|A\|_{L(H)} \leq \Lambda$ .

**Behauptung 1.**  $A$  ist injektiv mit  $\|Ax\|_H \geq \lambda\|x\|_H$ ,  $x \in H$ .

**Beweis.** Für  $x \in H$  gilt

$$(Ax, x)_H = a(x, x) \geq \lambda\|x\|_H^2.$$

Mit

$$(Ax, x)_H \leq \|Ax\|_H \|x\|_H$$

folgt

$$\|Ax\|_H \geq \lambda\|x\|_H;$$

insbesondere erhalten wir  $Ax \neq 0$ , falls  $x \neq 0$ . □

**Behauptung 2.**  $\text{im}(A) = A(H)$  ist abgeschlossen.

**Beweis.** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $H$  mit

$$Ax_k \rightarrow y \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit Behauptung 1 folgt

$$\|x_k - x_l\|_H \leq \lambda^{-1} \|A(x_k - x_l)\|_H = \lambda^{-1} \|Ax_k - Ax_l\|_H \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty).$$

Sei  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Da  $A \in L(H)$ , erhalten wir

$$Ax = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_k = y;$$

das heisst,  $\text{im}(A)$  ist abgeschlossen. □

**Behauptung 3.**  $A$  ist surjektiv.

**Beweis.** Sei widerspruchswise  $M := \text{im}(A) \neq H$ . Wähle  $0 \neq y \in M^\perp$  gemäss Satz 2.4.1. Da  $Ay \in M$ , folgt mit

$$0 < \lambda\|y\|_H^2 \leq a(y, y) = (Ay, y)_H = 0$$

der gewünschte Widerspruch. □

Somit ist  $A$  bijektiv, und nach Satz 3.2.1.ii) (Satz von der offenen Abbildung) gilt  $A^{-1} \in L(H)$ .

Zur Abschätzung der Norm sei  $x \in H$ . Setze  $z = A^{-1}x$ . Mit Behauptung 1 erhalten wir

$$\|A^{-1}x\|_H = \|z\|_H \leq \lambda^{-1} \|Az\| = \lambda^{-1} \|x\|.$$

Da  $x \in H$  beliebig gewählt war, folgt

$$\|A^{-1}\|_{L(H)} \leq \lambda^{-1},$$

wie gewünscht. □

**Korollar 4.3.1.** Sei  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 4.3.3, und sei  $l \in H^*$ . Dann gibt es genau ein  $x \in H$  mit

$$\forall y \in H: a(x, y) = l(y),$$

und

$$\|x\|_H \leq \lambda^{-1} \|l\|_{H^*}.$$

**Beweis.** Setze  $x = A^{-1}J^{-1}l$ , mit  $A$  wie in Satz 4.3.3. Es gilt

$$\forall y \in H: a(x, y) = (Ax, y)_H = (J^{-1}l, y)_H = l(y),$$

und

$$\|x\|_H \leq \|A^{-1}\|_{L(H)} \|l\|_{H^*} \leq \lambda^{-1} \|l\|_{H^*}$$

nach Satz 4.3.2 und Satz 4.3.3. □

## 4.4 Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ , $1 \leq p < \infty$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$  für ein Radonmass  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $q$  der zu  $p$  konjugierte Exponent  $1 < q \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wir formulieren den Hauptsatz dieses Abschnittes.

**Satz 4.4.1.**  $L^p(\Omega)^*$  ist isometrisch isomorph zu  $L^q(\Omega)$ .

Zum Beweis konstruieren wir eine lineare Isometrie  $J: L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)^*$  und zeigen anschliessend mit Hilfe der gleichmässigen Konvexität der Norm in  $L^p(\Omega)$  analog zu unserem Vorgehen im Beweis von Satz 4.3.2 deren Surjektivität.

Für  $g \in L^q(\Omega)$  sei  $l_g \in L^p(\Omega)^*$  die lineare Abbildung

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto \int_{\Omega} fg \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Stetigkeit von  $l_g$  folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$|l_g(f)| = \left| \int_{\Omega} fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}. \quad (4.4.1)$$

**Lemma 4.4.1.**  $J: L^q(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in L^p(\Omega)^*$  ist eine lineare Isometrie.

**Beweis.** Offenbar ist  $J$  linear. Weiter folgt aus (4.4.1) die Abschätzung

$$\|l_g\|_{L^p(\Omega)^*} = \sup_{\|f\|_{L^p} \leq 1} \left| \int_{\Omega} fg \, d\mu \right| \leq \|g\|_{L^q(\Omega)};$$

das heisst,  $J$  ist stetig mit

$$\|J\|_{L(L^q(\Omega); L^p(\Omega)^*)} \leq 1.$$

i) Sei  $1 < p < \infty$ . In diesem Fall ist  $q < \infty$ , und es gilt  $p = \frac{q}{q-1}$ . Zu  $g \in L^q(\Omega)$  wähle  $f = g|g|^{q-2} \in L^p(\Omega)$  als Vergleichsfunktion mit  $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}$ . Dies ergibt

$$|l_g(f)| = \int_{\Omega} |g|^q \, d\mu = \|g\|_{L^q}^q \leq \|l_g\|_{L^p(\Omega)^*} \|f\|_{L^p} = \|l_g\|_{L^p(\Omega)^*} \|g\|_{L^q}^{q-1};$$

das heisst

$$\|l_g\|_{L^p(\Omega)^*} \geq \|g\|_{L^q},$$

also

$$\|l_g\|_{L^{p^*}} = \|g\|_{L^q}.$$

ii) Betrachte nun  $p = 1, q = \infty$ . Sei  $g \in L^\infty(\Omega)$ . Zu  $\varepsilon > 0$  sei  $x \in \Omega$  Lebesguepunkt von  $g$  mit

$$|g(x)| = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \geq \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon.$$

Wähle  $r > 0$  mit  $r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$  und

$$\alpha := \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \geq \|g\|_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Setze  $f = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \chi_{B_r(x)} \in L^1(\Omega)$ . Beachte

$$\|f\|_{L^1} = 1, \quad |l_g(f)| = \alpha \geq \|g\|_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$\|l_g\|_{L^{1^*}} \geq \|g\|_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\|l_g\|_{L^{1^*}} \geq \|g\|_{L^\infty}$$

und damit

$$\|l_g\|_{L^{1^*}} = \|g\|_{L^\infty},$$

wie gewünscht. □

**Lemma 4.4.2.** *J ist surjektiv.*

**Beweis.** i) Betrachte zunächst den Fall  $1 < p < \infty$ . Sei  $l \in L^p(\Omega)^*$ . Wähle eine "Maximalfolge"  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\|f_k\|_{L^p} = 1$  und

$$l(f_k) \rightarrow \|l\|_{L^{p^*}} \quad (k \rightarrow \infty).$$

OBdA dürfen wir annehmen  $\|l\|_{L^{p^*}} = 1$ .

**Behauptung 1.**  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge.

**Beweis.** Die Behauptung ergibt sich genau gleich wie Behauptung 1 im Beweis von Satz 4.3.2 aus dem folgenden Satz 4.4.2 über die gleichmässige Konvexität von  $L^p(\Omega)$ . (Einen Beweis findet man zum Beispiel in Adams: *Sobolev spaces*, 2.29 Corollary.) □

**Satz 4.4.2.** *Sei  $1 < p < \infty$ , und seien  $u, v \in L^p(\Omega)$ , mit  $\|u\|_{L^p} = \|v\|_{L^p} = 1$  und  $\varepsilon := \|u - v\|_{L^p} > 0$ .*

i) Falls  $2 \leq p < \infty$ , so gilt

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p} \leq \left( 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p} \right)^{1/p};$$



ii) Falls  $1 < p \leq 2$ , so gilt mit  $q = \frac{p}{p-1}$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p} \leq \left( 1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q} \right)^{1/q}.$$

Da  $L^p(\Omega)$  vollständig ist, existiert

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \in L^p(\Omega),$$

und es gilt

$$\|f\|_{L^p} = 1, \quad l(f) = \|l\|_{L^{p^*}} = 1.$$

Setze  $g = f|f|^{p-2} \in L^q(\Omega)$  mit  $\|g\|_{L^q} = 1$ .

**Behauptung 2.**  $l = l_g$ .

**Beweis.** Für  $\varphi \in L^p(\Omega)$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$  sei

$$f_\varepsilon = \frac{f + \varepsilon\varphi}{\|f + \varepsilon\varphi\|_{L^p}}, \quad \|f_\varepsilon\|_{L^p} = 1.$$

Da  $l(f_\varepsilon)$  für  $\varepsilon = 0$  maximal, folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} l(f_\varepsilon) = l(\varphi) - l(f) \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \|f + \varepsilon\varphi\|_{L^p},$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \|f + \varepsilon\varphi\|_{L^p} &= \frac{1}{p} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} |f + \varepsilon\varphi|^p d\mu \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} |f + \varepsilon\varphi|^p d\mu = \int_{\Omega} \varphi f |f|^{p-2} d\mu = \int_{\Omega} \varphi g d\mu; \end{aligned}$$

das heisst,

$$\forall \varphi \in L^p(\Omega): l(\varphi) = l(f)l_g(\varphi) = l_g(\varphi).$$

□

ii) Sei nun  $p = 1$ . Zur Vereinfachung nehmen wir an  $\mu = \mathcal{L}^n$  und  $\mu(\Omega) < \infty$ . Sei  $l \in L^1(\Omega)^*$ . Da  $\mu(\Omega) < \infty$ , liefert die Höldersche Ungleichung für alle  $s > 1$  die topologische Einbettung  $i_s: L^s(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$  mit

$$\|i_s\|_{L(L^s, L^1)} \leq (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{s}} \xrightarrow{(s \rightarrow 1)} 1,$$

also auch  $l = l \circ i_s \in L^s(\Omega)^*$  mit

$$\limsup_{s \rightarrow 1} \|l\|_{L^s(\Omega)^*} \leq \|l\|_{L^1(\Omega)^*}.$$

Nach i) besitzt  $l$  als Element von  $L^s(\Omega)^*$  eine Darstellung  $l = l_g$  mit  $g = g_r \in L^r(\Omega)$ , wobei  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ ; insbesondere gilt

$$l(\varphi) = l_{g_r}(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi g_r d\mu, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Es folgt für  $1 < s < s'$  und zugehörige  $1 < r' < r < \infty$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} \varphi g_r d\mu = l(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi g_{r'} d\mu,$$

insbesondere

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} (g_r - g_{r'}) \varphi d\mu = 0.$$

Mit Satz 3.4.3 erhalten wir  $g_r = g_{r'} =: g \in \bigcap_{r < \infty} L^r(\Omega)$  mit

$$\|g\|_{L^r} = \|g_r\|_{L^r} = \|l_{g_r}\|_{L^{s*}} = \|l\|_{L^{s*}}$$

für alle  $s > 1$  und zugehörige  $r$ , wobei  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ . Mit  $s \downarrow 1$  folgt  $r \uparrow \infty$  und

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \|g\|_{L^r} = \limsup_{s \rightarrow 1} \|l\|_{L^{s*}} \leq \|l\|_{L^{1*}};$$

das heisst,  $g \in L^\infty(\Omega)$ , und  $l = l_g$ .

Für eine allgemeine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  erhält man die Aussage des Lemmas indem man  $\Omega \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$  überdeckt mit offenen Mengen  $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$  von endlichem Mass,  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Bemerkung 4.4.1.** i) Alternativ kann man Lemma 4.4.2 mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym beweisen.

ii) Analog zu Bemerkung 4.3.1 lässt sich zu  $l \in L^p(\Omega)^*$  ein  $g \in L^q(\Omega)$  mit  $l = l_g$  auch variationell charakterisieren: Sei dazu  $E: L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert mit

$$E(f) = \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p - l(f), \quad f \in L^p(\Omega).$$

Falls dann  $f \in L^p(\Omega)$  mit

$$E(f) = \min_{h \in L^p(\Omega)} E(h),$$

so gilt für  $\varphi \in L^p(\Omega)$ :

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} E(f + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} f|f|^{p-2} \varphi dx - l(\varphi);$$

also

$$l = l_g \quad \text{mit} \quad g = f|f|^{p-2} \in L^q(\Omega).$$

**Bemerkung 4.4.2.** Falls  $\mu = \mathcal{L}^n$ , so gilt  $L^1(\Omega) \neq L^\infty(\Omega)^*$ , wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 4.4.1.** Sei  $x_0 \in \Omega$ , und sei  $\delta_{x_0}: C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$  das Dirac-Funktional

$$\forall f \in C^0(\overline{\Omega}): \delta_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Sei  $l$  eine Fortsetzung von  $\delta_{x_0}$  auf  $L^\infty(\Omega)$  gemäss Satz 4.1.3. Dann gilt

$$\forall g \in L^1(\Omega): l \neq l_g.$$

**Beweis.** Nimm an,  $l = l_g$  für ein  $g \in L^1(\Omega)$ . OBdA sei  $x_0 = 0$ ,  $B_1(0) \subset \Omega$ . Fixiere  $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$  mit

$$0 \leq \varphi \leq 1, \varphi \equiv 1 \text{ auf } B_{1/2}(0).$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx) \in C_c^\infty(B_1(0)) \subset C^0(\overline{\Omega})$$

mit  $0 \leq \varphi_k \leq 1$ ,  $\varphi_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$   $\mu$ -fast überall. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$1 = \delta_{x_0}(\varphi_k) = l(\varphi_k) = l_g(\varphi_k) = \int_{\Omega} g \varphi_k dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 4.4.3.** Für  $\mu = \mathcal{L}^n$  und jedes  $g \in L^1(\Omega)$  gilt  $l_g \ll \mu \perp \delta$ .

## 4.5 Trennungssätze für konvexe Mengen, Extre- malpunkte

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Satz 4.5.1.** (Trennungssatz) Seien  $A, B \subset X$  nicht leer, disjunkt und konvex. Dann gilt:

i) Falls  $A$  offen ist, so gibt es  $l \in X^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\forall a \in A, b \in B: l(a) < \lambda \leq l(b).$$

ii) Ist  $A$  kompakt und  $B$  abgeschlossen, so gibt es  $l \in X^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\sup_{a \in A} l(a) < \lambda < \inf_{b \in B} l(b).$$

**Bemerkung 4.5.1.** Gemäss Satz 4.5.1 kann man disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene  $H = \{x \in X; l(x) = \lambda\}$  trennen.

**Beweis von Satz 4.5.1.** i) Fixiere  $a_0 \in A$ ,  $b_0 \in B$ . Setze  $x_0 = b_0 - a_0$ . Dann ist die Menge  $C := A - B + x_0$  konvex, offen und nicht leer mit  $0 \in C$ . Da  $A \cap B = \emptyset$ , gilt weiter  $x_0 \notin C$ .

Wähle  $R > 0$  mit  $B_R(0) \subset C$ . Sei  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  das **Minkowski-Funktional** mit

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda C\}.$$

**Behauptung 1.** Die Funktion  $p$  ist sublinear.

**Beweis.** Die positive Homogenität von  $p$  ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Seien weiter  $x = \lambda u$ ,  $y = \mu v$  mit  $u, v \in C$  und  $\lambda, \mu > 0$ . Da  $C$  konvex,

gilt

$$z := \frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu} \in C,$$

und  $p(z) \leq 1$ . Mit positiver Homogenität von  $p$  folgt

$$p(x + y) = p(\lambda u + \mu v) = p(z)(\lambda + \mu) \leq \lambda + \mu.$$

Nach Übergang zum Infimum bezüglich  $\lambda$  und  $\mu$  erhalten wir schliesslich

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

wie gewünscht. □

Da für jedes  $x \in X$  mit  $\lambda = 2R^{-1}\|x\|_X$  trivialerweise gilt

$$x \in B_{\lambda R}(0) \subset \lambda C,$$

folgt mit der Konstanten  $M = 2R^{-1}$  die Abschätzung

$$\forall x \in X: p(x) \leq M\|x\|_X.$$

Da  $C$  offen, gilt  $C = \{x; p(x) < 1\}$ . Weiter erhalten wir aus  $x_0 \notin C$ , dass

$$p(x_0) \geq 1.$$

Definiere  $f: \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(tx_0) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Beachte

$$\forall t \geq 0: f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0),$$

$$\forall t < 0: f(tx_0) = t < 0 \leq p(tx_0).$$

Sei  $l$  die Fortsetzung von  $f$  gemäss Satz 4.1.1 mit  $l(tx_0) = t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und mit

$$\forall x \in X: l(x) \leq p(x).$$

Für alle  $x \in X$  gilt dann

$$|l(x)| = \max\{l(x), l(-x)\} \leq \max\{p(x), p(-x)\} \leq M\|x\|_X;$$

also  $l \in X^*$ . Weiter gilt für  $a \in A$ ,  $b \in B$

$$l(a) - l(b) = l(a - b + x_0) - l(x_0) < 0,$$

da  $l(x_0) = 1$  und da  $l(x) \leq p(x) < 1$  für  $x = a - b + x_0 \in C$ . Es folgt

$$\sup\{l(x); x \in A\} \leq \inf\{l(b); b \in B\} =: \lambda$$

Da  $A$  offen,  $l \neq 0$ , wird  $\sup\{l(x); x \in A\}$  an keiner Stelle  $a_0 \in A$  angenommen. Sonst hätte für beliebiges  $x \in X$  die Funktion  $t \mapsto f(t) = l(a_0 + tx)$  an der Stelle  $t = 0$  ein inneres Maximum, und  $f'(0) = l(x) = 0$ ,  $x \in X$ . Es folgt

$$l(a) < \sup\{l(x); x \in A\} \leq \lambda, \quad a \in A.$$

ii) Mit der folgenden Beobachtung lässt sich ii) auf i) zurückführen.

**Behauptung 2.** Seien  $A, B$  wie in ii). Dann gibt es  $r > 0$  mit  $U_r(A) \cap B = \emptyset$ , wobei

$$U_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

offen, konvex und nicht leer.

**Beweis.** Offenbar ist  $U_r(A)$  für jedes  $r > 0$  offen, konvex und nicht leer, da  $A \neq \emptyset$ . Nimm an, für  $r_k \downarrow 0$  gibt es  $a_k \in A$ ,  $b_k \in B_{r_k}(a_k) \cap B$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $A$  kompakt, konvergiert eine Teilfolge  $a_k \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ ), wobei  $a \in A$ . Da  $B$  abgeschlossen, und

$$\|b_k - a\|_X \leq \|b_k - a_k\|_X + \|a_k - a\|_X \leq r_k + \|a_k - a\|_X \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

folgt andererseits  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \in B$ ; also  $A \cap B \neq \emptyset$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Wähle nun  $r > 0$  wie in Behauptung 2,  $l \in X^*$  gemäss i) zu  $A' = U_r(A)$  und  $B$ . Da  $A$  kompakt, wird  $\sup_{a \in A} l(a)$  in einem Punkt  $a_0 \in A$  angenommen. Da  $l \neq 0$ , folgt jedoch  $l(a_0) < \sup_{x \in B_r(a_0)} l(x)$  wie in i), und wir erhalten

$$\max_{a \in A} l(a) = l(a_0) < \sup_{x \in B_r(a_0)} l(x) \leq \sup_{x \in U_r(A)} l(x) \leq \inf_{b \in B} l(b),$$

wie gewünscht.  $\square$

**Beispiel 4.5.1.** Für die konvexe Menge  $C = B_1(0; X)$  erhält man offenbar das Minkowski-Funktional  $p(x) = \|x\|_X$ ,  $x \in X$ .

Sei  $K \subset X$  eine beliebige Teilmenge,  $M \subset K$ .

**Definition 4.5.1.** i)  $M$  heisst **extremale Teilmenge von  $K$** , falls für je zwei Punkte  $x_0, x_1 \in K$  und  $0 < \alpha < 1$  gilt

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in M \Rightarrow x_0, x_1 \in M.$$

ii) Falls  $M = \{x\}$  extremal, so heisst  $x$  ein **extremaler Punkt von  $K$** .

**Beispiel 4.5.2.** i) Sei  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\|\cdot\|_X$  die euklidische Norm,  $K$  die Vollkugel  $K = \overline{B_1(0)} = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Dann ist jeder Randpunkt von  $K$  extremal.

ii) Sei  $X = \mathbb{R}^2$ , versehen mit der Norm

$$\|(x, y)\|_X = \max\{|x|, |y|\},$$

und sei  $K$  die Menge

$$K = \overline{B_1(0)} = \{(x, y); -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

Dann sind die Seiten von  $K$  extremal, zum Beispiel

$$F = \{(x, 1); -1 \leq x \leq 1\}.$$

Die Extremalpunkte von  $K$  sind genau die Punkte  $(\pm 1, \pm 1)$ .

**Lemma 4.5.1.** *Sei  $M \subset K$  extremale Teilmenge von  $K$ ,  $L \subset M$  extremale Teilmenge von  $M$ . Dann ist  $L$  extremale Teilmenge von  $K$ .*

**Beweis.** Seien  $x_0, x_1 \in K$ ,  $0 < \alpha < 1$  und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in L.$$

Da  $L \subset M$ , gehört  $x_\alpha$  zu  $M$ ; da weiter  $M$  extremal in  $K$  ist, folgt  $x_0, x_1 \in M$ . Da schliesslich  $L$  extremal in  $M$ , liegen  $x_0$  und  $x_1$  sogar in  $L$ ; also ist  $L$  extremal in  $K$ .  $\square$

**Lemma 4.5.2.** *Sei  $K \subset X$  kompakt,  $l \in X^*$ ,  $\lambda = \min_{x \in K} l(x)$ . Dann ist*

$$K_\lambda = \{x \in K; l(x) = \lambda\}$$

*extremale Teilmenge von  $K$ .*

**Beweis.** Seien  $x_0, x_1 \in K$ ,  $0 < \alpha < 1$ , und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in K_\lambda;$$

das heisst,

$$l(x_\alpha) = \alpha l(x_1) + (1 - \alpha)l(x_0) = \lambda.$$

Da  $l(x_0) \geq \lambda$ ,  $l(x_1) \geq \lambda$ , folgt  $l(x_0) = \lambda = l(x_1)$ ; also  $x_0, x_1 \in K_\lambda$ .  $\square$

**Satz 4.5.2.** *(Krein-Milman) Sei  $K \subset X$  kompakt und nicht leer. Dann besitzt  $K$  einen extremalen Punkt.*

**Beweis.** Sei  $\mathcal{M}$  die Familie

$$\mathcal{M} = \{M \subset K; \emptyset \neq M \text{ kompakt und extremal in } K\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$\forall L, M \in \mathcal{M}: L \leq M \Leftrightarrow M \subset L.$$

Wir verifizieren die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas.

Offenbar gilt  $K \in \mathcal{M}$ , also  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ . Sei  $(M_\iota)_{\iota \in I}$  linear geordnete Teilmenge in  $\mathcal{M}$ . Setze  $M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$ . Dann ist  $M$  kompakt und nicht leer.

**Behauptung 1.**  $M \in \mathcal{M}$ .

**Beweis.** Seien  $x_0, x_1 \in K$ ,  $0 < \alpha < 1$ , und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota.$$

Dann gilt  $x_\alpha \in M_\iota$  für beliebiges  $\iota \in I$ . Da  $M_\iota$  extremal in  $K$ , folgt  $x_0, x_1 \in M_\iota$  für alle  $\iota$ ; das heisst,  $x_0, x_1 \in M$ , und  $M$  ist extremal.  $\square$

Da offenbar  $M \subset M_\iota$  für alle  $\iota \in I$ , ist  $M$  eine obere Schranke für  $(M_\iota)_{\iota \in I}$  bezüglich der oben definierten Ordnung. Gemäss dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element  $M \in \mathcal{M}$ . Insbesondere  $M \neq \emptyset$ . Sei  $x \in M$ .

**Behauptung 2.**  $M = \{x\}$ .

**Beweis.** (indirekt) Nimm an,  $y \neq x$  sei ein weiteres Element von  $M$ . Wähle  $l \in X^*$  mit  $l(x) \neq l(y)$  gemäss Satz 4.2.3. Setze  $\lambda = \min_{m \in M} l(m)$ . Gemäss Lemma 4.5.2 ist

$$M_\lambda = \{m \in M; l(m) = \lambda\} \subset M$$

extremal in  $M$ , nach Lemma 4.5.1 also auch in  $K$ . Weiter gilt  $M_\lambda \neq \emptyset$ , und  $M_\lambda$  ist kompakt, also  $M_\lambda \in \mathcal{M}$ . Schliesslich gilt  $M_\lambda \subset M$ ; jedoch  $M_\lambda \neq M$ , da wegen  $l(x) \neq l(y)$  entweder  $x \notin M_\lambda$  oder  $y \notin M_\lambda$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $M$ .  $\square$

Offenbar folgt die Aussage des Satzes aus den Behauptungen 1 und 2.  $\square$

**Definition 4.5.2.** Für  $A \subset X$  sei

$$\overline{\text{conv}}(A) = \bigcap_{A \subset B; B \text{ konvex und abgeschlossen}} B$$

die abgeschlossene **konvexe Hülle** von  $A$ .

**Bemerkung 4.5.2.** Offenbar ist der Durchschnitt konvexer Mengen konvex.

**Satz 4.5.3.** (Krein-Milman) Sei  $K$  kompakt und konvex,  $E \subset K$  die Menge der Extrempunkte von  $K$ . Dann gilt  $K = \overline{\text{conv}}(E)$ .

**Beweis.** Da  $K$  nach Annahme abgeschlossen und konvex, gilt  $K \supset \overline{\text{conv}}(E)$ . Die noch fehlende Inklusion beweisen wir indirekt. Sei  $x_0 \in K \setminus \overline{\text{conv}}(E)$ . Wähle  $l \in X^*$  gemäss Satz 4.5.1.ii) mit  $A = \{x_0\}$ ,  $B = \overline{\text{conv}}(E)$  und

$$\inf_{x \in \overline{\text{conv}}(E)} l(x) > l(x_0) \geq \min_{x \in K} l(x) =: \lambda. \quad (4.5.1)$$

Setze

$$K_\lambda = \{x \in K; l(x) = \lambda\}.$$

Da  $K \neq \emptyset$ , folgt  $K_\lambda \neq \emptyset$ , und  $K_\lambda$  ist kompakt und gemäss Lemma 4.5.2 zudem extremal in  $K$ . Nach Satz 4.5.2 besitzt  $K_\lambda$  einen extremalen Punkt  $y_0$ . Da  $K_\lambda$  extremal, ist  $y_0$  gemäss Lemma 4.5.1 extremal auch in  $K$ ; also  $y_0 \in E \subset \overline{\text{conv}}(E)$ , im Widerspruch zu (4.5.1).  $\square$

## 4.6 Schwache Konvergenz und Konvexität

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  normiert mit Dualraum  $X^*$ ,  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , und sei  $x \in X$ .

**Definition 4.6.1.** Die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  **konvergiert schwach gegen  $x$** , oder  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ), falls für alle  $l \in X^*$  gilt:

$$l(x_k) \rightarrow l(x) \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Beispiel 4.6.1.**  $l^2 \ni e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \xrightarrow{w} 0$  ( $i \rightarrow \infty$ ).

**Bemerkung 4.6.1.** i) Wegen Satz 4.2.3 ist der schwache Limes  $x$  einer Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eindeutig bestimmt. Wir schreiben daher  $x = w - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ .

ii) Falls  $x_k \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so auch  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Satz 4.6.1.** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  mit  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Weiter gilt

$$\|x\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X.$$

Das heisst, die Funktion  $x \mapsto \|x\|_X$  ist schwach folgen-unterhalb-stetig.

**Beweis.** Die Abbildungen  $A_k \in L(X^*, \mathbb{R})$  mit

$$A_k(l) = l(x_k), \quad l \in X^*, \quad k \in \mathbb{N},$$

sind punktweise beschränkt. Da  $X^*$  vollständig ist, folgt mit Satz 4.2.2 und Satz 3.1.1 die gleichmässige Beschränktheit der Normen

$$\|x_k\|_X = \sup_{l \in X^*, \|l\|_{X^*} \leq 1} |l(x_k)| = \|A_k\|_{L(X^*, \mathbb{R})} \leq C < \infty.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung wähle  $l \in X^*$  gemäss Satz 4.2.2 mit

$$\|l\|_{X^*} = 1, \quad l(x) = \|x\|_X.$$

Es folgt

$$\|x\|_X = l(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} l(x_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X.$$

□

**Definition 4.6.2.** Die von den Mengen

$$\Omega_{l,U} = l^{-1}(U), \quad l \in X^*, \quad U \subset \mathbb{R} \text{ offen}$$

induzierte Topologie  $\tau_w$  heisst **schwache Topologie** auf  $X$ .

**Bemerkung 4.6.2.** i)  $\tau_w$  besteht aus beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen  $\Omega_{l,U}$  wie in der obigen Definition.

ii) Offenbar ist die schwache Konvergenz die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie.

iii) Falls  $\dim(X) = \infty$ , so ist die schwache Topologie nicht metrisierbar; das heisst, sie wird von keiner Metrik auf  $X$  induziert. Man muss daher zum Beispiel zwischen den Begriffen “schwach abgeschlossenen” und “schwach folgen-abgeschlossen” unterscheiden; vergleiche Lemma 4.6.2. Jedoch ist die schwache Topologie wegen Satz 4.2.3 Hausdorffsch.

iv) Da  $l \in X^*$  stetig, ist jedes  $\Omega_{l,U}$  auch offen in der Standardtopologie  $\tau$ ; das heisst,  $\tau_w \subset \tau$ .



Für  $\Omega \subset X$  sei

$$\overline{\Omega}_w = w\text{-clos}(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subset A; A \text{ schwach abgeschlossen}} A$$

die schwach abgeschlossene Hülle von  $\Omega$ .

**Lemma 4.6.1.** i)  $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_w$ .

ii) Falls  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ , so folgt  $x \in \overline{\Omega}_w$ .

**Beweis.** i) Nach Bemerkung 4.6.2.iii) gilt  $\tau_w \subset \tau$ ; eine schwach abgeschlossene Menge ist somit auch (stark) abgeschlossen. Es folgt

$$\overline{\Omega}_w = \bigcap_{\Omega \subset A; A \text{ schwach abgeschlossen}} A \supset \bigcap_{\Omega \subset A; A \text{ abgeschlossen}} A = \overline{\Omega}.$$

ii) Falls  $x \notin \overline{\Omega}_w$ , so gibt es  $U = \bigcap_{j=1}^J l_j^{-1}(I_j) \in \tau_w$  mit geeigneten  $l_j \in X^*$  und offenen Mengen  $I_j \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq J$ , so dass  $\Omega \cap U = \emptyset$  und  $x \in U$ . Jedoch folgt mit  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ) insbesondere  $l_j(x_k) \rightarrow l_j(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für jedes  $j$ , also  $x_k \in \Omega \cap U$  für genügend grosses  $k$ , im Widerspruch zur Wahl von  $U$ .  $\square$

**Definition 4.6.3.** Eine Menge  $A \subset X$  heisst **schwach folgenabgeschlossen** (w.s.c.: weakly sequentially closed), falls für alle  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  gilt

$$x_k \xrightarrow{w} x \text{ ( $k \rightarrow \infty$ )} \Rightarrow x \in A.$$

**Lemma 4.6.2.** Für  $A \subset X$  gilt:

i)  $A$  schwach abgeschlossen  $\Rightarrow A$  schwach folgenabgeschlossen.

ii)  $A$  schwach folgenabgeschlossen  $\Rightarrow A$  abgeschlossen.

**Beweis.** i) Sei  $A$  schwach abgeschlossen, und sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $x_k \xrightarrow{w} x$  für  $k \rightarrow \infty$ . Mit Lemma 4.6.1.ii) folgt  $x \in \overline{A}_w = A$ .

ii) Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $x_k \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ), also auch  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gemäss Bemerkung 4.6.1.ii). Ist  $A$  schwach folgenabgeschlossen, so gilt  $x \in A$ , und mit Satz 1.2.2 ist  $A$  abgeschlossen.  $\square$

**Beispiel 4.6.2.** i) Die 1-Sphäre in  $l^2$  ist abgeschlossen, aber nach Beispiel 4.6.1 ist sie nicht schwach folgenabgeschlossen. Dies zeigt, dass die Umkehrung der Aussage von Lemma 4.6.2.ii) nicht gilt.

ii) Auch die Umkehrung der Aussage i) von Lemma 4.6.2 gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei  $e_n \in l^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wie in Beispiel 4.6.1, und sei

$$S = \{\sqrt{n}e_n; n \in \mathbb{N}\} \subset l^2.$$

Dann ist  $S$  w.s.c., da jede schwach konvergente Folge in  $S$  nach Satz 4.6.1 beschränkt ist und daher nur endlich viele verschiedene Elemente von  $S$  enthalten kann.

Andererseits gilt  $0 \in \bar{S}_w$ . Sei dazu

$$U(0, a_1, \dots, a_k, \varepsilon) = \{x \in l^2; |(x, a_i)_{l^2}| < \varepsilon, 1 \leq i \leq k\}$$

mit  $a_1, \dots, a_k \in l^2$  und  $\varepsilon > 0$  ein beliebiges Element der Umgebungsbasis von  $0 \in l^2$  in der schwach offenen Topologie.

Da für jedes  $1 \leq i \leq k$  gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(a_i, e_n)_{l^2}|^2 \leq \|a_i\|^2 < \infty,$$

konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k |(a_i, e_n)_{l^2}|^2$ . Da die harmonische Reihe hingegen divergiert, existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{i=1}^k |(a_i, e_n)_{l^2}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}.$$

Für dieses  $n \in \mathbb{N}$  gilt nun

$$|(a_i, e_n)_{l^2}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, 1 \leq i \leq k;$$

also  $\sqrt{n}e_n \in U(0, a_1, \dots, a_k, \varepsilon)$ . Somit hat jedes Element der Basis der schwach offenen Topologie um 0 einen nicht leeren Durchschnitt mit  $S$ , und  $0 \in \bar{S}_w$ . Also ist  $S$  nicht schwach abgeschlossen,

(Mit Dank an Lukas Pierce, der eine Version dieses Beispiels mit der Suchanfrage “<https://math.stackexchange.com/questions/2862610/does-weakly-sequentially-closed-imply-weakly-closed>” unter der Referenz “@mechanodroid” gefunden hat.)

**Satz 4.6.2.** Sei  $\Omega \subset X$  konvex. Dann gilt  $\bar{\Omega}_w = \bar{\Omega}$ .

**Beweis.** (indirekt). Nimm an  $\bar{\Omega} \neq \bar{\Omega}_w$ . Gemäss Lemma 4.6.1.i) gibt es dann  $x_0 \in \bar{\Omega}_w \setminus \bar{\Omega}$ . Setze  $A = \{x_0\}$ ,  $B = \bar{\Omega}$ . Wähle  $l \in X^*$  gemäss Satz 4.5.1 mit

$$l(x_0) < \inf_{x \in B} l(x) \leq \inf_{x \in \Omega} l(x).$$

Es folgt  $x_0 \notin \bar{\Omega}_w$  im Widerspruch zur Wahl von  $x_0$ . □

**Satz 4.6.3.** (Mazur's lemma) Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  mit  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann gibt es eine Folge von konvexen Linearkombinationen

$$y_l = \sum_{k=1}^l a_{kl} x_k, \quad 0 \leq a_{kl} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^l a_{kl} = 1, \quad l \in \mathbb{N},$$

so dass

$$y_l \rightarrow x \quad (l \rightarrow \infty).$$

**Beweis.** Setze  $K = \overline{\text{conv}}(\{x_k; k \in \mathbb{N}\})$ . Nach Satz 4.6.2 gilt  $K = \bar{K} = \bar{K}_w$ ; mit Lemma 4.6.1.ii) folgt  $x \in K$ . □

**Bemerkung 4.6.3.** Die schwache Topologie  $\tau_w$  und  $\tau$  unterscheiden sich nur, falls  $\dim X = \infty$ ; in diesem Fall enthält mit den Mengen  $\Omega_{l,U}$  auch jede schwach offene Menge einen nicht trivialen affinen Unterraum. Eine Konsequenz daraus sieht man im nachstehenden Beispiel.

**Beispiel 4.6.3.** Sei  $\dim X = \infty$ . Der schwache Abschluss der Menge

$$A = \{x \in X; \|x\|_X = 1\}.$$

ist die Vollkugel

$$\overline{A}_w = \overline{B_1(0; X)} = \{x \in X; \|x\|_X \leq 1\}.$$

**Beweis.** Nach Satz 4.6.2 gilt  $\overline{A}_w \subset \overline{\text{conv}(A)} = \overline{B_1(0; X)}$ . Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei  $x \in X$  mit  $\|x\|_X < 1$ ,  $\Omega \in \tau_w$  eine Umgebung von  $x$ . Nach Bemerkung 4.6.3 enthält  $\Omega$  einen nicht trivialen affinen Unterraum durch  $x$ ; jeder derartige Raum schneidet jedoch  $A$ . Insbesondere folgt  $\Omega \cap A \neq \emptyset$ , und  $x \in \overline{A}_w$ ; also  $B_1(0; X) \subset \overline{A}_w$ , und die Behauptung folgt.  $\square$



## Kapitel 5

# Reflexivität, Separabilität und Schwache Kompaktheit

### 5.1 Reflexivität

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Dualraum  $X^*$ .

**Definition 5.1.1.** Der Raum  $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$  heisst **Bidualraum von  $X$** .

Wir können  $X$  in kanonischer Weise in  $X^{**}$  einbetten mittels  $\mathcal{I}: X \rightarrow X^{**}$ , wobei

$$\forall l \in X^*, x \in X: (\mathcal{I}x)(l) := l(x). \quad (5.1.1)$$

**Satz 5.1.1.**  $\mathcal{I}$  ist eine lineare Isometrie.

*Beweis.* Offenbar ist  $\mathcal{I}$  linear. Wie im Beweis von Satz 4.6.1 folgt zudem mit Satz 4.2.2 für jedes  $x \in X$  die Identität

$$\|x\|_X = \sup_{l \in X^*, \|l\|_{X^*} \leq 1} |l(x)| = \|\mathcal{I}x\|_{X^{**}}.$$

□

**Definition 5.1.2.**  $X$  heisst **reflexiv**, falls die durch (5.1.1) definierte Abbildung  $\mathcal{I}: X \rightarrow X^{**}$  surjektiv ist.

**Beispiel 5.1.1.** i)  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  sind (wegen der Rangformel) reflexiv (für eine beliebige Norm).

ii) Jeder Hilbert-Raum  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ist reflexiv.

iii)  $L^p(\Omega)$  ist reflexiv, falls  $1 < p < \infty$ .

iv)  $L^1(\Omega)$  ist nicht reflexiv.

**Beweis.** ii) Sei  $J: H \rightarrow H^*$  die in Abschnitt 4.3 konstruierte Isometrie mit

$$\forall y \in H: J(x)(y) = (x, y)_H. \quad (5.1.2)$$

$H^*$  ist wiederum Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\forall l = J(x), k = J(y) \in H^*: (l, k)_{H^*} := (J(x), J(y))_{H^*} = (x, y)_H. \quad (5.1.3)$$

Sei  $J^*: H^* \rightarrow H^{**}$  der isometrische Isomorphismus analog zu (5.1.2). Dann gilt  $\mathcal{I} = J^* \circ J$ , denn für alle  $x, y \in H, l = J(x) \in H^*$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}y)(l) &= (\mathcal{I}y)(J(x)) \stackrel{(5.1.1)}{=} J(x)(y) \stackrel{(5.1.2)}{=} (x, y)_H \stackrel{(5.1.3)}{=} (J(x), J(y))_{H^*} \\ &= (J(y), J(x))_{H^*} \stackrel{(5.1.2)}{=} J^*(J(y))(J(x)) = J^*(J(y))(l). \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{I}$  surjektiv.

iii) Sei  $1 < p < \infty$ , und sei  $q$  zu  $p$  konjugiert mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sei  $J = J^p: L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)^*$  der in Lemma 4.4.1 konstruierte Isomorphismus, und sei  $\xi \in L^p(\Omega)^{**}$ . Zu  $l \in L^p(\Omega)^*$  sei  $g \in L^q(\Omega)$  mit  $l = J^p g$ . Zu  $k = \xi \circ J^p \in L^q(\Omega)^*$  finden wir analog  $f \in L^p(\Omega)$  mit  $k = J^q f$ ; also  $f = (J^q)^{-1}(\xi \circ J^p)$ . Es folgt

$$\xi(l) = \xi(J^p g) = k(g) = J^q f(g) = \int_{\Omega} f g \, d\mu = J^p g(f) = l(f) = (\mathcal{I}f)(l),$$

und  $\mathcal{I}$  ist surjektiv.

iv)  $\mathcal{I}: L^1(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in (L^\infty(\Omega))^*$  ist gemäss Beispiel 4.4.1 nicht surjektiv.  $\square$

**Bemerkung 5.1.1.** i) Falls  $X$  reflexiv ist, so ist  $X$  auch vollständig.

ii) Für jeden normierten Raum  $X$  liefert  $\overline{\mathcal{I}(X)} \subset X^{**}$  eine kanonische Vervollständigung; vergleiche Satz 2.1.1.

**Beweis.** i)  $X^{**}$  ist nach Beispiel 2.1.1 vollständig. Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X$ . Dann ist  $(\mathcal{I}x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $X^{**}$ . Sei  $z = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}x_k \in X^{**}$ . Da  $X$  reflexiv, folgt  $z = \mathcal{I}x$  für ein  $x \in X$ , und  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ , da  $\mathcal{I}$  isometrisch.  $\square$

Ist  $L^\infty(\Omega)$  reflexiv oder nicht? – Wir beantworten diese Frage in einem allgemeinen Kontext.

**Satz 5.1.2.** i) Falls  $X$  reflexiv ist, so gilt dies auch für  $X^*$ .

ii) Falls  $X^*$  reflexiv ist und  $X$  vollständig, so ist auch  $X$  reflexiv.

**Beweis.** i) (Übung)

ii) (indirekt) Seien  $\mathcal{I}: X \rightarrow X^{**}, \mathcal{I}^*: X^* \rightarrow (X^*)^{**}$  die kanonischen Isometrien gemäss (5.1.1). Widerspruchsweise nehmen wir an  $\mathcal{I}(X) \neq X^{**}$ . Da  $X$  vollständig ist, ist  $M := \mathcal{I}(X)$  ein abgeschlossener linearer Teilraum von  $X^{**}$ . Wähle  $x^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{I}(X)$  und dazu  $l^{**} \in (X^{**})^* = (X^*)^{**}$  gemäss Satz 4.2.4 mit  $l^{**}(x^{**}) = 1, l^{**}|_M = 0$ . Da  $\mathcal{I}^*$  surjektiv, gilt  $l^{**} = \mathcal{I}^*(l)$  für ein  $l \in X^*$ ; also

$$\forall x \in X: 0 = l^{**}(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}^*(l)(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}(x)(l) = l(x).$$

Es folgt  $l = 0, \mathcal{I}(l) = l^{**} = 0$ , im Widerspruch zu  $l^{**}(x^{**}) = 1$ .  $\square$

**Beispiel 5.1.2.**  $L^\infty(\Omega)$  ist nicht reflexiv.

*Beweis.*  $L^1(\Omega)$  ist vollständig mit Dualraum  $(L^1(\Omega))^*$  isometrisch isomorph zu  $L^\infty(\Omega)$ ;  $L^1(\Omega)$  ist jedoch gemäss Beispiel 5.1.1.iv) nicht reflexiv.  $\square$

**Satz 5.1.3.** Sei  $X$  reflexiv,  $Y \subset X$  ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann ist auch  $Y$  reflexiv.

*Beweis.* Sei  $i_Y: Y \rightarrow X$  die kanonische Einbettung,  $i_Y^*: X^* \rightarrow Y^*$  die dazu "duale" Abbildung, definiert durch

$$\forall l \in X^*, y \in Y: i_Y^*(l)(y) = l(i_Y(y)) = l(y),$$

also  $i_Y^*(l) = l|_Y$ , mit

$$\forall l \in X^*: \|i_Y^*(l)\|_{Y^*} \leq \|l\|_{X^*}.$$

Sei analog  $i_Y^{**}: Y^{**} \rightarrow X^{**}$  gegeben durch

$$\forall y^{**} \in Y^{**}, l \in X^*: i_Y^{**}(y^{**})(l) = y^{**}(i_Y^*(l)),$$

mit

$$\forall y^{**} \in Y^{**}: \|i_Y^{**}(y^{**})\|_{X^{**}} \leq \|y^{**}\|_{Y^{**}} \|i_Y^*\|_{L(X^*, Y^*)} \leq \|y^{**}\|_{Y^{**}}.$$

Seien weiter  $\mathcal{I}: X \rightarrow X^{**}$ ,  $\mathcal{I}^Y: Y \rightarrow Y^{**}$  die kanonischen Isometrien. Nach Annahme ist  $\mathcal{I}$  surjektiv.

**Behauptung 1.**  $\mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(Y^{**})) \subset Y$ .

*Beweis.* Sei  $y^{**} \in Y^{**}$ , und nimm an  $x = \mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(y^{**})) \notin Y$ . Wähle  $l \in X^*$  gemäss Satz 4.2.4 mit  $l(x) \neq 0$ ,  $l|_Y = 0$ . Da  $l|_Y = 0$ , folgt  $i_Y^*(l) = 0$ ; also

$$0 = y^{**}(i_Y^*(l)) = i_Y^{**}(y^{**})(l) = \mathcal{I}x(l) = l(x) \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung.  $\square$

Sei nun  $y^{**} \in Y^{**}$ . Nach Behauptung 1 gilt  $y := \mathcal{I}^{-1}(i_Y^{**}(y^{**})) \in Y$ . Für  $f \in Y^*$  sei  $l \in X^*$  eine beliebige Fortsetzung gemäss Satz 4.1.2 mit  $l|_Y = f$ ; das heisst,  $i_Y^*(l) = f$ . Es folgt

$$y^{**}(f) = y^{**}(i_Y^*(l)) = i_Y^{**}(y^{**})(l) = \mathcal{I}y(l) = l(y) \stackrel{(y \in Y)}{=} f(y) = \mathcal{I}^Y y(f)$$

für alle  $f \in Y^*$ ; das heisst,  $y^{**} = \mathcal{I}^Y y$ , und  $\mathcal{I}^Y$  ist surjektiv. Weiter folgt mit der Identität  $\mathcal{I}y = i_Y^{**}(y^{**}) = i_Y^{**}(\mathcal{I}^Y y)$  die Gleichheit

$$i_Y^{**}\mathcal{I}^Y = \mathcal{I}|_Y.$$

$\square$

## 5.2 Separabilität

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

**Definition 5.2.1.**  $M$  heisst **separabel**, falls eine abzählbare Teilmenge  $D \subset M$  existiert mit  $\overline{D} = M$ .

**Bemerkung 5.2.1.** Eine Folge  $(x_k) \subset M$  ist dicht genau dann, wenn

$$M = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(x_k). \quad (5.2.1)$$

Im Falle von (5.2.1) gibt es für jedes  $x \in M$  und jedes  $l \in \mathbb{N}$  ein  $k = k(l) \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_k, x) < 1/l$ , und  $x_{k(l)} \rightarrow x$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Falls umgekehrt  $D = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$  dicht, so gilt  $M = \overline{D} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(x_k)$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$ , also (5.2.1).

**Beispiel 5.2.1.** i)  $\mathbb{R}^n$  ist separabel, falls  $d$  die von einer Norm induzierte Metrik ist.

ii)  $C^0([0, 1])$  ist nach dem Weierstraßschen Approximationssatz separabel; analog gilt dies auch für  $C^0(\overline{\Omega})$  für eine beliebige offene Menge  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ .

iii)  $L^p(\Omega)$  ist für  $1 \leq p < \infty$  separabel; vergleiche Satz 3.5.2 der Vorlesung "Analysis III" über Masstheorie.

iv)  $L^\infty([0, 1])$  ist nicht separabel. Betrachte dazu die Familie  $f_s = \chi_{[0, s]}$ , wobei  $0 < s \leq 1$ , mit

$$\forall 0 < s < t \leq 1: \|f_s - f_t\|_{L^\infty} = \|\chi_{[s, t]}\|_{L^\infty} = 1. \quad (5.2.2)$$

Sei  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dicht. Für jedes  $0 < s \leq 1$  gibt es dann wegen (5.2.1) ein  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$\|f_s - g_k\|_{L^\infty} < 1/2. \quad (5.2.3)$$

Umgekehrt kann (5.2.3) für festes  $k$  wegen (5.2.2) nur für höchstens ein  $s = s(k)$  gelten. Dies liefert eine surjektive Abbildung  $\Lambda \ni k \mapsto s(k) \in ]0, 1]$  für ein  $\Lambda \subset \mathbb{N}$ , was jedoch unmöglich ist. (Vergleiche Beispiel 3.5.2, Analysis III.)

**Satz 5.2.1.** Sei  $M$  separabel,  $A \subset M$ . Dann ist  $A$  separabel (bezüglich der induzierten Metrik  $d|_{A \times A}$ ).

**Beweis.** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dicht in  $M$ ,  $a_0 \in A$ . Für  $k, l \in \mathbb{N}$  mit

$$A \cap B_{1/2l}(x_k) \neq \emptyset$$

wähle  $a_{kl} \in A \cap B_{1/2l}(x_k)$ ,  $a_{kl} = a_0$  sonst. Dann gilt  $A \cap B_{1/2l}(x_k) \subset B_{1/l}(a_{kl})$ , und

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_{1/2l}(x_k)) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(a_{kl});$$

also ist  $D := \{a_{kl}; k, l \in \mathbb{N}\}$  dicht gemäss Bemerkung 5.2.1.  $\square$

Wir verknüpfen nun Separabilität und lineare Struktur.

**Satz 5.2.2.** Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

i) Ist  $X^*$  separabel, so ist  $X$  separabel.

ii) Ist  $X$  separabel und reflexiv, dann ist  $X^*$  separabel.



**Beweis.** i) Sei  $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dicht in  $X^*$ . Wähle  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $\|x_k\|_X = 1$  und

$$l_k(x_k) \geq \|l_k\|_{X^*} - 1/k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Setze

$$M = \overline{\text{span}\{x_k; k \in \mathbb{N}\}}.$$

$M$  ist separabel. Die Aussage i) folgt daher aus

**Behauptung.**  $M = X$ .

**Beweis.** (indirekt) Sei  $X \neq M$ , und seien  $x_0 \in X \setminus M$  und dazu  $l \in X^*$  gemäss Satz 4.2.4 gewählt mit

$$l(x_0) = 1, \quad l|_M = 0.$$

Sei  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  eine Teilfolge mit  $l = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} l_k$ . Es folgt

$$0 \neq \|l\|_{X^*} = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} \|l_k\|_{X^*} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} l_k(x_k),$$

jedoch gilt

$$|l_k(x_k)| = |(l_k - l)(x_k)| \leq \|l_k - l\|_{X^*} \|x_k\|_X \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda).$$

□

ii) Mit  $X$  ist auch  $X^{**} = \mathcal{I}(X)$  separabel. Falls nämlich  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dicht liegt in  $X$ , so liegt  $(\mathcal{I}x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dicht in  $X^{**}$ . Mit i) folgt Separabilität von  $X^*$ . □

## 5.3 Schwache Folgenkompaktheit

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Dualraum  $X^*$ , Bidualraum  $X^{**}$  und kanonischer Isometrie  $\mathcal{I}: X \rightarrow X^{**}$ . Sei  $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X^*$ ,  $l \in X^*$ .

**Definition 5.3.1.**  $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$  **konvergiert schwach\*** gegen  $l$ ,  $l_k \xrightarrow{w^*} l$  ( $k \rightarrow \infty$ ), falls

$$\forall x \in X: l_k(x) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} l(x). \quad (5.3.1)$$

Somit haben wir auf  $X^*$  nun drei Konvergenzbegriffe:

i) Normkonvergenz  $l_k \rightarrow l$  ( $k \rightarrow \infty$ );

ii) schwache Konvergenz  $l_k \xrightarrow{w} l$  ( $k \rightarrow \infty$ ) im Sinne

$$\forall z \in X^{**}: z(l_k) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} z(l); \quad (5.3.2)$$

iii) schwache\* Konvergenz  $l_k \xrightarrow{w^*} l$  ( $k \rightarrow \infty$ ) im Sinne von (5.3.1), das heisst, punktweise Konvergenz.

**Bemerkung 5.3.1.** i) Bedingung (5.3.1) ist äquivalent dazu, dass wir (5.3.2) fordern für alle  $z \in \mathcal{I}(X)$ . Falls daher  $X$  reflexiv ist, so sind die Bedingungen der schwachen und der schwach\*-Konvergenz äquivalent.

ii) Im allgemeinen gilt:  $l_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} l \Rightarrow l_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)}^w l \Rightarrow l_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)}^{w^*} l$ .

iii) Die schwache\* Konvergenz ist Konvergenz bezüglich der von den Mengen

$$\Omega_{x,U} = \{l \in X^*; l(x) \in U\} = (\mathcal{I}x)^{-1}(U), \quad x \in X, U \subset \mathbb{R} \text{ offen,}$$

erzeugten schwach\*-Topologie  $\tau_{w^*}$ . Offenbar gilt  $\tau_{w^*} \subset \tau_w$ , also ist  $\tau_{w^*}$  gröber als  $\tau_w$  und daher im allgemeinen nicht metrisierbar. Abgeschlossenheit, beziehungsweise Kompaktheit können daher nicht äquivalent mit dem Folgenkriterium umschrieben werden. Schwach\*-abgeschlossene Mengen sind analog zu Abschnitt 4.6 stets auch abgeschlossen bezüglich schwach\*-Konvergenz und sind schwach abgeschlossen, sowie stark abgeschlossen. Weiter gilt für  $\Omega \subset X^*$  analog zu Lemma 4.6.1 stets  $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}_w \subset \bar{\Omega}_{w^*}$ .

Nach dem *Satz von Tychonov* der Topologie ist die abgeschlossene 1-Kugel in  $X^*$  stets schwach\*-kompakt. Für die Anwendungen, die wir unten besprechen, wird jedoch Folgenkompaktheit benötigt.

**Satz 5.3.1.** (*Banach-Alaoglu*) Sei  $X$  separabel,  $(l_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$  beschränkt. Dann gibt es  $l \in X^*$  und eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  mit

$$l_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty, k \in \Lambda)}^{w^*} l.$$

**Beweis.** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dicht in  $X$ . Wähle Teilfolgen  $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \dots \supset \Lambda_j \supset \Lambda_{j+1} \supset \dots \supset \dots$  so, dass für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt

$$l_k(x_j) \rightarrow a_j =: l(x_j) \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda_j).$$

Dies ist möglich, da die Folge  $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach Annahme beschränkt ist. Sei  $\Lambda$  die zu  $(\Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  gehörige Diagonalfolge.

**Behauptung.**  $l$  lässt sich zu  $l \in X^*$  erweitern.

**Beweis.**  $l$  ist linear auf  $M = \text{span}\{x_j; j \in \mathbb{N}\}$ , und

$$|l(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} |l_k(x)| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|l_k\|_{X^*} \|x\|_X, \quad \forall x \in M.$$

Also ist  $l$  stetig fortsetzbar auf  $X = \overline{M}$ . □

Wir können nun zeigen, dass  $l_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty, k \in \Lambda)}^{w^*} l$ . Sei dazu  $x \in X$  beliebig,  $x = \lim_{j \rightarrow \infty, j \in J} x_j$ , für eine Folge  $J \subset \mathbb{N}$ . Für  $j \in J, k \in \mathbb{N}$  schätze ab

$$\begin{aligned} |l_k(x) - l(x)| &\leq |l_k(x - x_j)| + |l(x - x_j)| + |l_k(x_j) - l(x_j)| \\ &\leq (\sup_k \|l_k\|_{X^*} + \|l\|_{X^*}) \|x - x_j\|_X + |l_k(x_j) - l(x_j)|. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  für festes  $j \in J$  erhalten wir

$$\limsup_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} |l_k(x) - l(x)| \leq C \|x - x_j\|_X.$$

Mit  $j \rightarrow \infty, j \in J$ , folgt  $l_k(x) \rightarrow l(x)$  ( $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ ), wie gewünscht. □

**Beispiel 5.3.1.** i)  $X = L^1(\Omega)$  ist separabel,  $X^* \cong L^\infty(\Omega)$  gemäss Satz 4.4.1. Falls  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$  beschränkt, so existiert nach Satz 5.3.1 eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  und  $f \in L^\infty(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} f_k g \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f g \, d\mu \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda)$$

für alle  $g \in L^1(\Omega)$ .

ii)  $X = L^\infty([0, 1])$  ist nicht separabel. Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 5.3.1 in diesem Fall nicht gilt.

Für  $0 < \varepsilon \leq 1$  sei  $T_\varepsilon \in X^*$  gegeben durch

$$T_\varepsilon f = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f \, dx, \quad f \in L^\infty([0, 1]).$$

Offenbar gilt

$$\|T_\varepsilon\|_{X^*} = \sup_{\|f\|_{L^\infty} \leq 1} |T_\varepsilon f| \leq 1,$$

jedoch ist die Menge  $\{T_\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1\}$  nicht schwach\* relativ folgenkompakt.

**Beweis.** (indirekt). Nimm an, für eine Folge  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) und ein  $T \in X^*$  gelte

$$T_{\varepsilon_k} \xrightarrow{w^*} T \quad (k \rightarrow \infty).$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, dass gilt

$$1 > \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wähle

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \chi_{[\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k[} \in L^\infty([0, 1])$$

mit  $\|f\|_{L^\infty} = 1$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt nun

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_k} f &= \frac{1}{\varepsilon_k} \sum_{l=k}^{\infty} (-1)^l (\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}) \\ &= (-1)^k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^{\varepsilon_{k+1}} f \, dx; \end{aligned}$$

das heisst,

$$|T_{\varepsilon_k} f - (-1)^k| \leq \frac{1}{\varepsilon_k} \left( \varepsilon_{k+1} + \int_0^{\varepsilon_{k+1}} |f| \, dx \right) \leq \frac{2\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Die Folge  $(T_{\varepsilon_k} f)_{k \in \mathbb{N}}$  häuft sich somit bei 1 und  $-1$ , ist daher divergent.  $\square$

Betrachten wir jedoch den separablen Teilraum  $C^0([0, 1])$  von  $L^\infty([0, 1])$ , so ist für die Einschränkung der  $T_\varepsilon$  auf  $C^0([0, 1])$  der Satz 5.3.1 anwendbar. In der Tat sehen wir sofort, dass für jedes  $f \in C^0([0, 1])$  gilt  $T_\varepsilon(f) \rightarrow f(0)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ); das heisst,  $T_\varepsilon \xrightarrow{w^*} \delta$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), das Dirac-Funktional.

Die Annahme der Separabilität kann in reflexiven Räumen entfallen. Ausserdem können wir mittels  $\mathcal{I}$  Konvergenzaussagen in  $X^{**} = (X^*)^*$  zurückziehen und erhalten so schwache Folgenkompaktheit im ursprünglichen Raum (“schwaches Bolzano-Weierstrass Theorem”).

**Satz 5.3.2.** (Eberlein-Šmuljan) Sei  $X$  reflexiv,  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  beschränkt. Dann existiert  $x \in X$  und eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  mit

$$x_k \xrightarrow{w} x \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda).$$

**Beweis.** Betrachte

$$Y = \overline{\text{span}\{x_k; k \in \mathbb{N}\}}.$$

Offenbar ist  $Y$  separabel und nach Satz 5.1.3 reflexiv. Nach Satz 5.2.2 ist auch  $Y^*$  separabel. Sei  $\mathcal{I}: Y \rightarrow Y^{**}$  die kanonische Isometrie.

Nach Satz 5.3.1 ist  $(\mathcal{I}x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y^{**} = \mathcal{I}Y$  schwach\* folgenkompakt; das heisst, für eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  und ein  $x \in Y$  gilt

$$(\mathcal{I}x_k)(l) = l(x_k) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty, k \in \Lambda)} (\mathcal{I}x)(l) = l(x), \quad \forall l \in Y^*.$$

Für jedes  $l \in X^*$  gehört die Einschränkung  $l|_Y$  zu  $Y^*$ . Da weiter  $x_k, x \in Y$ , folgt

$$l(x_k) \rightarrow l(x) \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda)$$

für alle  $l \in X^*$ ; das heisst,  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ ). □

**Beispiel 5.3.2.** i) Satz 5.3.2 ist insbesondere anwendbar, falls  $X$  ein Hilbertraum ist.

ii) Sei  $X = L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$  beschränkt. Nach Satz 4.4.1 ist  $X = L^p(\Omega)$  reflexiv. Daher liefert Satz 5.3.2 eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  und  $f \in L^p(\Omega)$  mit  $f_k \xrightarrow{w} f$  ( $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ ); das heisst, mit  $q = \frac{p}{p-1}$  gilt für  $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ :

$$\forall g \in L^q(\Omega): \int_{\Omega} f_k g \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f g \, d\mu.$$

Als weitere Anwendung von Satz 5.3.2 beweisen wir das folgende Approximationstheorem.

**Satz 5.3.3.** (Approximationstheorem) Sei  $X$  reflexiv,  $M \subset X$  nicht leer, konvex und abgeschlossen,  $x_0 \in X \setminus M$ . Dann gibt es  $m_0 \in M$  mit

$$\|x_0 - m_0\|_X = \text{dist}(x_0, M) = \inf_{m \in M} \|x_0 - m\|_X.$$

**Bemerkung 5.3.2.** Satz 5.3.3 ist insbesondere anwendbar, falls  $M$  ein nicht trivialer abgeschlossener linearer Unterraum von  $X$  ist, und liefert ein Analogon zu Korollar 2.4.1 in diesem Fall. Analog zur Situation im Hilbertraum können wir  $m_0$  als “Fusspunkt des Lotes” von  $x_0$  auf  $M$  auffassen.

**Beweis.** Sei  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  eine “Minimalfolge” mit

$$\|x_0 - m_k\|_X \rightarrow \text{dist}(x_0, M) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Die Folge  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt. Nach Satz 5.3.2 gibt es eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  und ein  $m_0 \in X$  mit

$$m_k \xrightarrow{w} m_0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda).$$

Da  $M$  abgeschlossen und konvex ist, ist  $M$  nach Satz 4.6.2 auch schwach abgeschlossen, somit auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz, und  $m_0 \in M$ . Schliesslich folgt mit Satz 4.6.1

$$\|x_0 - m_0\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} \|x_0 - m_k\| = \text{dist}(x_0, M),$$

wie gewünscht. □

## 5.4 Variationsrechnung

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $M \subset X$ ,  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 5.4.1.** Die Funktion  $F$  ist **schwach folgen-unterhalb-stetig** (kurz: *w.s.l.s.c.* oder *weakly sequentially lower semi-continuous*) in  $x_0 \in M$ , falls für alle  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  mit  $x_k \xrightarrow{w} x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gilt

$$F(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k).$$

Kürzer schreiben wir auch

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \xrightarrow{w} x_0, x \in M} F(x).$$

**Beispiel 5.4.1.** i) Die Norm  $x \mapsto \|x\|_X$  ist w.s.l.s.c. auf  $X$  gemäss Satz 4.6.1, also auch die Funktion  $x \mapsto \|x\|_X^p$  für jedes  $0 < p < \infty$ .

ii) Sei  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und konvex, wobei  $M \subset X$  konvex und abgeschlossen. Dann ist  $F$  auf  $M$  w.s.l.s.c.

**Beweis.** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  mit  $x_k \xrightarrow{w} x_0$ . Wähle eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  mit

$$F(x_l) \rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k) =: \alpha_0 \geq -\infty \quad (l \rightarrow \infty, l \in \Lambda).$$

OBdA dürfen wir annehmen, dass  $\Lambda = \mathbb{N}$ .

Nach Satz 4.6.3, angewandt auf die Folge  $(x_k)_{k \geq k_0}$ , gibt es für jedes  $k_0 \in \mathbb{N}$  Konvexkombinationen

$$y_l = \sum_{k=k_0}^l a_{kl} x_k, \quad 0 \leq a_{kl} \leq 1, \quad \sum_{k=k_0}^l a_{kl} = 1, \quad l \geq k_0,$$

mit  $y_l \rightarrow x_0$  ( $l \rightarrow \infty$ ), und  $(y_l)_{l \geq k_0} \subset M$ , da  $M$  konvex.

Mit der Konvexität von  $F$  folgt

$$\forall l \geq k_0: F(y_l) \leq \sum_{k=k_0}^l a_{kl} F(x_k) \leq \sup_{k \geq k_0} F(x_k).$$

Nach Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$F(x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} F(y_l) \leq \sup_{k \geq k_0} F(x_k).$$

Mit  $k_0 \rightarrow \infty$  folgt schliesslich

$$F(x_0) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = \alpha_0.$$

Insbesondere gilt  $\alpha_0 > -\infty$ . □

**Definition 5.4.2.**  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **koerziv** auf  $M$  bezüglich  $\|\cdot\|_X$ , falls gilt

$$F(x) \rightarrow \infty \quad (\|x\|_X \rightarrow \infty, x \in M).$$

**Satz 5.4.1.** (*Variationsprinzip*) Sei  $X$  reflexiv,  $M \subset X$  nicht leer und schwach folgen-abgeschlossen,  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  koerziv und w.s.l.s.c. Dann existiert  $x_0 \in M$  mit

$$F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x).$$

**Beweis.** Betrachte eine Minimalfolge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $M$  mit

$$F(x_k) \rightarrow \inf_{x \in M} F(x) =: \alpha_0 \geq -\infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Da  $F$  koerziv ist, ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Nach Satz 5.3.2 besitzt  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine schwach konvergente Teilfolge  $x_k \xrightarrow{w} x_0$  ( $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ ).

Da  $M$  schwach folgen-abgeschlossen, folgt  $x_0 \in M$ , und

$$F(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} F(x_k) = \alpha_0,$$

da  $F$  w.s.l.s.c. Insbesondere gilt wieder  $\alpha_0 > -\infty$ . □

**Bemerkung 5.4.1.** Falls  $M$  konvex und  $F$  strikt konvex, so kann  $F$  höchstens eine Minimalstelle in  $M$  besitzen.

**Beweis.** Seien  $x_0 \neq x_1 \in M$  mit

$$F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x) = F(x_1).$$

Für  $0 < t < 1$  gilt  $x_t = tx_1 + (1-t)x_0 \in M$ , und mit

$$F(x_t) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x)$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. □

**Beispiel 5.4.2.** i) Wir können nun auch einen variationellen Beweis des Riesz-schen Darstellungssatzes, Satz 4.3.2, geben.

Sei  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ein  $\mathbb{R}$ -Hilbertraum, und sei  $l \in H^*$ . Die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{2} \|x\|_H^2 - l(x), \quad x \in H,$$

ist koerziv und gemäss Beispiel 5.4.1.i) und der Definition der schwachen Konvergenz auch w.s.l.s.c.; weiter ist  $M = H$  schwach folgen-abgeschlossen und nicht leer. Nach Satz 5.4.1 existiert  $y \in H$  mit

$$F(y) = \inf_{x \in H} F(x)$$

und  $l = j_y$  wie in Bemerkung 4.3.1.ii).

ii) Analog erhalten wir einen variationellen Beweis von Lemma 4.4.2, indem wir für  $1 < p < \infty$  und  $l \in L^p(\Omega)^*$  die Funktion

$$E(f) = \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p - l(f), \quad f \in L^p(\Omega),$$

betrachten. Wie in i) ist  $E$  koerziv und nach Beispiel 5.4.1.i) auch w.s.l.s.c.;  $M = L^p(\Omega)$  ist schwach folgen-abgeschlossen und nicht leer. Schliesslich ist der Raum  $L^p(\Omega)$  reflexiv, und Satz 5.4.1 liefert die Existenz einer Minimalstelle  $f$  von  $E$  mit den gewünschten Eigenschaften wie in Bemerkung 4.4.1.ii).

Beachte, dass diese Beweise die Reflexivität der zugrunde liegenden Räume benutzen. Sie liefern daher keinen unabhängigen Beweis von Satz 4.3.2 oder von Satz 4.4.1.





## Kapitel 6

# Auflösung linearer Gleichungen, Spektraltheorie

### 6.1 Duale Operatoren

Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte  $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit Dualraum  $X^*$ , beziehungsweise  $Y^*$ ,  $A: D_A \subset X \rightarrow Y$  linear mit  $\overline{D_A} = X$ .

**Definition 6.1.1.** Der zu  $A$  duale Operator  $A^*: D_{A^*} \subset Y^* \rightarrow X^*$  hat den Definitionsbereich

$$D_{A^*} = \{y^* \in Y^*; l_{y^*}: D_A \ni x \mapsto \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} \text{ ist stetig} \},$$

und für  $y^* \in D_{A^*}$  ist  $A^*y^* \in X^*$  die eindeutige Fortsetzung von  $l_{y^*}$  auf  $X$ .

**Bemerkung 6.1.1.** i)  $A^*$  hat die Eigenschaft

$$\forall x \in D_A, y^* \in D_{A^*}: \langle A^*y^*, x \rangle_{X^* \times X} = \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y}. \quad (6.1.1)$$

ii) Auch falls  $A$  nicht dicht definiert ist, kann man **formal** zu  $A$  **duale Operatoren** durch (6.1.1) charakterisieren, jedoch sind diese dann nicht eindeutig.

**Satz 6.1.1.** Für  $A \in L(X, Y)$  gilt  $A^* \in L(Y^*, X^*)$ , und

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \|A^*\|_{L(Y^*, X^*)}.$$

**Beweis.** Für  $y^* \in Y^*$ ,  $x \in X$  gilt

$$|\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y}| \leq \|y^*\|_{Y^*} \|A\|_{L(X, Y)} \|x\|_X;$$

das heisst,  $y^* \in D_{A^*}$ , und

$$\begin{aligned} \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} \|A^*y^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |\langle A^*y^*, x \rangle_{X^* \times X}| \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y}| = \|A\|_{L(X, Y)} \end{aligned}$$

gemäss Satz 4.2.2. □

**Beispiel 6.1.1.** Seien  $1 < p, q < \infty$  konjugiert mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Betrachte  $X = Y = L^p(\Omega)$  mit Dualraum  $X^* = Y^* \cong L^q(\Omega)$ . Sei

$$A = \Delta: D_A = C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega).$$

Dann gilt  $D_{A^*} \supset C_c^\infty(\Omega)$ , da für alle  $g \in C_c^\infty(\Omega)$  die Abbildung

$$l_g: C_c^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \langle g, \Delta f \rangle_{L^q \times L^p} = \int_\Omega g \Delta f \, d\mu = \int_\Omega \Delta g f \, d\mu = \langle \Delta g, f \rangle_{L^q \times L^p}$$

mit

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): |l_g(f)| \leq \|\Delta g\|_{L^q} \|f\|_{L^p},$$

sich stetig auf  $L^p(\Omega)$  fortsetzen lässt, und

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega): A^*g = \Delta g.$$

**Satz 6.1.2.** Sei  $A: D_A \subset X \rightarrow Y$  dicht definiert. Dann folgt

i)  $A^*: D_{A^*} \subset Y^* \rightarrow X^*$  ist abgeschlossen.

ii)  $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$ .

**Beweis.** i) Betrachte  $(y_k^*)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{A^*}$  mit

$$y_k^* \rightarrow y^* \text{ in } Y^*, \quad x_k^* := A^*y_k^* \rightarrow x^* \text{ in } X^* \quad (k \rightarrow \infty).$$

Es folgt für alle  $x \in D_A$ :

$$\begin{aligned} \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y_k^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A^*y_k^*, x \rangle_{X^* \times X} = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}. \end{aligned}$$

Also ist  $y^* \in D_{A^*}$  mit  $A^*y^* = x^*$ ; das heisst,  $A^*$  ist abgeschlossen.

ii) Sei  $A \subset B$ ; das heisst  $D_A \subset D_B$ ,  $B|_{D(A)} = A$ . Sei  $y^* \in D_{B^*}$ . Dann gilt für alle  $x \in D_A \subset D_B$

$$\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} = \langle y^*, Bx \rangle_{Y^* \times Y} = \langle B^*y^*, x \rangle_{X^* \times X};$$

das heisst  $y^* \in D_{A^*}$ ,  $A^*y^* = B^*y^*$ . □

## 6.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die Auflösbarkeit der Gleichung

$$Ax = y \tag{6.2.1}$$

zu vorgegebenem  $y$  aufgrund der Eigenschaften von  $A^*$  entscheiden.

**Satz 6.2.1.** (Banach's Closed Range Theorem) Seien  $X, Y$  Banach-Räume, der lineare Operator  $A: D_A \subset X \rightarrow Y$  dicht definiert und abgeschlossen, mit dualem Operator  $A^*$ . Dann sind äquivalent:

- i)  $im(A)$  ist abgeschlossen in  $Y$ ;
- ii)  $im(A^*)$  ist abgeschlossen in  $X^*$ ;
- iii)  $im(A) = {}^\perp \ker(A^*) = \{y \in Y; \forall y^* \in \ker(A^*): \langle y^*, y \rangle_{Y^* \times Y} = 0\}$ ;
- iv)  $im(A^*) = \ker(A)^\perp = \{x^* \in X^*; \forall x \in \ker(A): \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = 0\}$ .

Wir beweisen nur die Äquivalenz i)  $\Leftrightarrow$  iii). (Hierfür müssen die Räume  $X, Y$  noch nicht einmal vollständig sein.) Der komplette Beweis von Satz 6.2.1 ist recht aufwendig und anspruchsvoll. So beweist Werner den Satz nur für beschränkte Operatoren und überlässt es in Aufgabe VII.5.19 dem Leser, die Details für den allgemeinen Fall zu ergänzen. Auch der Beweis von Yoshida gilt nur im Fall beschränkter Operatoren. (Die von Yoshida durchgeführte Reduktion auf diesen Fall scheint unvollständig.) Einen ausführlichen Beweis für den allgemeinen Fall findet man jedoch bei Kato ("Perturbation theory for linear operators", S.234) oder Brezis, Theorem II.18.

Wir benötigen ein Lemma.

**Lemma 6.2.1.** i) Sei  $M \subset X$ . Dann ist  $M^\perp \subset X^*$  abgeschlossen (sogar schwach\* folgenabgeschlossen).

ii) Sei  $L \subset X^*$ . Dann ist  ${}^\perp L \subset X$  abgeschlossen (sogar schwach folgenabgeschlossen).

**Beweis.** ii) Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset {}^\perp L$  mit  $x_k \xrightarrow{w} x \in X$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Für beliebiges  $x^* \in L$  erhalten wir

$$\langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^*, x_k \rangle_{X^* \times X} = 0;$$

das heisst,  $x \in {}^\perp L$ .

i) analog. □

**Beweis von Satz 6.2.1, "i)  $\Leftrightarrow$  iii)".** Die Implikation iii)  $\Rightarrow$  i) folgt unmittelbar aus Lemma 6.2.1.ii).

i)  $\Rightarrow$  iii) Aus Bemerkung 6.1.1 folgt unmittelbar die Inklusion  $im(A) \subset {}^\perp \ker(A^*)$ . Die umgekehrte Inklusion beweisen wir indirekt. Sei  $y \in {}^\perp \ker(A^*) \setminus im(A)$ . Da  $im(A)$  nach Annahme abgeschlossen, gibt es  $y^* \in Y^*$  gemäss Satz 4.2.4 mit  $\langle y^*, y \rangle_{Y^* \times Y} \neq 0$  und  $y^*|_{im(A)} = 0$ . Letztere Bedingung besagt, dass

$$\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} = 0, \quad \forall x \in D_A.$$

Es folgt  $y^* \in D_{A^*}$  und  $A^*y^* = 0$ ; also  $y^* \in \ker(A^*)$ . Da  $y \in {}^\perp \ker(A^*)$ , erhalten wir  $\langle y^*, y \rangle_{Y^* \times Y} = 0$  und somit den gewünschten Widerspruch. □

Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren  $A: D_A \subset X \rightarrow Y$  mit abgeschlossenem Bild ist die Gleichung (6.2.1) somit zu vorgegebenem  $y \in Y$  genau

dann durch ein  $x \in D_A$  auflösbar, wenn alle linearen Funktionale im Kern von  $A^*$  auf  $y$  “senkrecht stehen” (verschwinden). Wir sagen dann, die Gleichung (6.2.1) ist “**normal lösbar**”.

**Satz 6.2.2.** Für  $A: D_A \subset X \rightarrow Y$  wie in Satz 6.2.1 sind äquivalent:

i)  $A$  ist surjektiv;

ii)  $A^*$  ist injektiv,  $im(A^*)$  ist abgeschlossen;

iii)  $\exists c_0 > 0 \forall y^* \in D_{A^*}: c_0 \|y^*\|_{Y^*} \leq \|A^*y^*\|_{X^*}$ .

**Beweis.** i)  $\Leftrightarrow$  ii) folgt unmittelbar aus Satz 6.2.1.

ii)  $\Rightarrow$  iii)  $A^*$  ist abgeschlossener Operator  $A^*: D_{A^*} \subset Y^* \rightarrow im(A^*)$ , wobei  $im(A^*)$  als abgeschlossener Unterraum eines Banach-Raums ebenfalls ein Banach-Raum ist. Die Behauptung folgt somit aus Satz 3.3.2.

iii)  $\Rightarrow$  ii) Offenbar ist  $A^*$  mit iii) injektiv. Sei  $x_k^* = A^*y_k^*$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , eine Folge in  $im(A^*)$  mit  $x_k^* \rightarrow x^*$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Wegen iii) ist dann auch  $(y_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge. Sei  $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k^*$ . Da  $A^*$  abgeschlossen, folgt  $y^* \in D_{A^*}$ ,  $x^* = A^*y^*$ ; das heisst,  $im(A^*)$  ist abgeschlossen.  $\square$

Wann ist das Bild eines Operators abgeschlossen? Eine wichtige Klasse sind die sogenannten **Fredholm Operatoren**  $A = id - T$  auf einem Banach-Raum  $X$ , wobei  $T$  kompakt.

**Definition 6.2.1.** Ein Operator  $T \in L(X)$  heisst **kompakt**, falls  $\overline{T(B_1(0; X))}$  kompakt ist; analog für  $T \in L(X, Y)$ .

**Lemma 6.2.2.** Sei  $T \in L(X)$  kompakt. Falls  $x_k \xrightarrow{w} x$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so folgt dann  $Tx_k \rightarrow Tx$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Beweis.** Da  $T$  stetig, gilt für jedes  $l \in X^*$  auch  $l \circ T \in X^*$  und mit  $x_k \xrightarrow{w} x$  folgt  $l(Tx_k) \rightarrow l(Tx)$  ( $k \rightarrow \infty$ ), also  $Tx_k \xrightarrow{w} Tx$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Da andererseits  $T$  nach Annahme kompakt, und da  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach Satz 4.6.1 beschränkt, existiert eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  mit  $y_k = Tx_k \rightarrow y$  ( $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ ), und  $y = Tx$  wegen Eindeutigkeit des (schwachen) Limes. Aus der Eindeutigkeit des Häufungspunkts  $y = Tx$  folgt schliesslich die Konvergenz der ganzen Folge  $(Tx_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Satz 6.2.3.** Sei  $X$  ein Banach-Raum,  $T \in L(X)$  kompakt. Dann ist das Bild  $im(id - T)$  des Operators  $id - T$  abgeschlossen.

**Beweis.** Setze  $M = \ker(id - T)$ . Da  $\overline{B_1(0; M)} = \overline{T(B_1(0; M))} \subset \overline{T(B_1(0; X))}$  kompakt, ist  $M$  endlich-dimensional nach Satz 2.1.4.

Sei  $L = \overline{M}^c$  ein topologisches Komplement von  $M$ . Setze

$$Sx = x - Tx, x \in L.$$

Dann ist  $S$  injektiv,  $im(S) = im(id - T)$ .

**Behauptung 1.**  $\exists r > 0 \forall x \in L: r\|x\|_X \leq \|Sx\|_X$ .

**Beweis.** (indirekt) Andernfalls gibt es  $x_k \in L$  mit

$$k\|Sx_k\|_X \leq \|x_k\|_X = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt für eine geeignete Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$ :

$$Sx_k = x_k - Tx_k \rightarrow 0, \quad Tx_k \rightarrow x_0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda);$$

das heisst,

$$x_k \rightarrow x_0 \in L \quad (k \rightarrow \infty; k \in \Lambda),$$

und  $Sx_0 = 0, \|x_0\|_X = 1$ . Der Widerspruch ergibt die Behauptung.  $\square$

Sei  $y_k = Sx_k \rightarrow y$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  $x_k \in L$ . Mit Behauptung 1 folgt, dass  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist in  $L$ . Da  $L$  abgeschlossen ist, existiert  $x = \lim_{k \in \mathbb{N}} x_k \in L$  mit  $y = Sx$ ; das heisst  $\text{im}(S) = \text{im}(id - T)$  ist abgeschlossen.  $\square$

**Beispiel 6.2.1.** Kompakte Operatoren erhält man oft in der Form von Integraloperatoren.

## 6.3 Kompaktheit

Der folgende Satz gibt ein klassisches Kriterium für Folgenkompaktheit im Raum der stetigen Funktionen auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Satz 6.3.1.** (Arzéla-Ascoli) Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F} \subset C^0(\overline{\Omega})$ . Es sind äquivalent:

i)  $\mathcal{F}$  ist relativ folgenkompakt;

ii)  $\mathcal{F}$  ist beschränkt und gleichgradig stetig; das heisst,  $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{C^0} < \infty$ , und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \Omega \forall f \in \mathcal{F}: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (6.3.1)$$

**Beweis.** i)  $\Rightarrow$  ii) Übung; vergleiche auch den Beweis von Satz 6.3.2.

ii)  $\Rightarrow$  i) Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ , und sei  $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$  dicht in  $\overline{\Omega}$ . (Beachte, dass  $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  separabel ist.) Da  $\mathcal{F}$  beschränkt, gibt es Teilfolgen  $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$  mit

$$f_k(x_l) \rightarrow a_l =: f(x_l) \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda_l).$$

Nach Auswahl einer Diagonalfolge  $\Lambda$  erhalten wir

$$\forall l \in \mathbb{N}: f_k(x_l) \rightarrow f(x_l) \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda). \quad (6.3.2)$$

**Behauptung 1.**  $f$  ist gleichmässig stetig und lässt sich daher fortsetzen zu einer Funktion  $f \in C^0(\overline{\Omega})$ .

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ , und sei  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Für  $x_l, x_m \in \Omega$  mit  $|x_l - x_m| < \delta$  schätze ab

$$\begin{aligned} |f(x_l) - f(x_m)| &\leq |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f_k(x_m)| + |f_k(x_m) - f(x_m)| \\ &\leq \varepsilon + |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f(x_m) - f_k(x_m)|, \end{aligned}$$

wobei  $k \in \Lambda$  beliebig. Nach Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ , folgt mit (6.3.2) die Abschätzung

$$|f(x_l) - f(x_m)| \leq \varepsilon,$$

wie gewünscht.  $\square$

**Behauptung 2.**  $f_k \rightarrow f$  in  $C^0(\overline{\Omega})$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ .

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Da  $\overline{\Omega}$  kompakt, überdecken endlich viele Bälle  $B_\delta(x_l)$ ,  $1 \leq l \leq L$ , die Menge  $\overline{\Omega}$ . Wähle  $k_0$  gemäss (6.3.2), so dass für  $k \geq k_0$  und  $1 \leq l \leq L$  gilt

$$|f_k(x_l) - f(x_l)| < \varepsilon.$$

Sei  $x \in \Omega$  beliebig. Wähle  $1 \leq l \leq L$  mit  $x \in B_\delta(x_l)$  und schätze ab

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x)| < 3\varepsilon$$

für  $k \geq k_0$ .  $\square$

Somit ist  $\mathcal{F}$  relativ folgenkompakt.  $\square$

**Bemerkung 6.3.1.** Satz 6.3.1 (wie auch der folgende Satz 6.3.2) ist im allgemeinen falsch, falls  $\Omega$  unbeschränkt ist. Für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  erhalten wir aus einer beliebigen Funktion  $0 \neq f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch Translation mit einem beliebigen Vektor  $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$  eine nicht relativ kompakte Familie gleichmässig beschränkter, gleichgradig stetiger Funktionen  $f_k(x) = f_0(x + ke) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Ein analoges Kriterium gilt auch in den Funktionenräumen  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Satz 6.3.2.** (Fréchet-Kolmogorov) Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Für eine Familie  $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$  sind äquivalent:

i)  $\mathcal{F}$  ist relativ folgenkompakt;

ii)  $\mathcal{F}$  ist beschränkt und "gleichgradig stetig in  $L^p$ ", das heisst,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty, \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f - \tau_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \quad (6.3.3)$$

wobei wir  $f \in \mathcal{F}$  durch  $f = 0$  ausserhalb  $\Omega$  zu  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen, und mit der Notation  $\tau_h f(x) = f(x + h)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , für jedes  $h \in \mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** i)  $\Rightarrow$  ii)  $\overline{\mathcal{F}}$  ist kompakt, also auch beschränkt.

Zum Beweis von (6.3.3) sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , überdecken endlich viele Bälle  $B_\varepsilon(f_k)$ ,  $1 \leq k \leq K$ , mit  $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  die Familie  $\overline{\mathcal{F}}$ . Wähle  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  so, dass gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}: |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)|^p < \frac{\varepsilon^p}{\mathcal{L}^n(\text{supp}(f_k))}.$$

Für  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $|h| < \delta$  folgt für  $1 \leq k \leq K$ :

$$\|f_k - \tau_h f_k\|_{L^p}^p \leq \|f_k - \tau_h f_k\|_{L^\infty}^p \int_{\text{supp}(f_k)} dx < \varepsilon^p.$$

Sei nun  $f \in \mathcal{F}$  beliebig,  $1 \leq k \leq K$  so gewählt, dass  $f \in B_\varepsilon(f_k)$ .

Es folgt für  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $|h| < \delta$

$$\begin{aligned} \|f - \tau_h f\|_{L^p} &\leq \|f - f_k\|_{L^p} + \|f_k - \tau_h f_k\|_{L^p} + \|\tau_h(f - f_k)\|_{L^p} \\ &= 2\|f - f_k\|_{L^p} + \|f_k - \tau_h f_k\|_{L^p} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

ii)  $\Rightarrow$  i) Sei  $(\rho_\delta)_{\delta>0}$  eine "regularisierende Folge" mit  $0 \leq \rho_\delta \in C_c^\infty(B_\delta(0))$  und mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta dx = 1$  für jedes  $\delta > 0$ . Für  $f \in \mathcal{F}$  setze  $f_\delta = \rho_\delta * f$  mit

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) f(x-y) dy.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  sei  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gemäss (6.3.3) gewählt mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f - \tau_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad (|h| \leq \delta). \quad (6.3.4)$$

**Behauptung 1.**  $\forall f \in \mathcal{F}: \|f - f_\delta\|_{L^p} < \varepsilon$ .

**Beweis.** Schreibe

$$(f_\delta - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) (f(x-y) - f(x)) dy.$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung und da  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) dy = 1$ , folgt mit (6.3.4)

$$\|f_\delta - f\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) \|f - \tau_y f\|_{L^p} dy < \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

**Behauptung 2.** Für festes  $\delta > 0$  ist  $(f_\delta)_{f \in \mathcal{F}} \subset C^0(\overline{\Omega})$  beschränkt und gleichgradig stetig.

**Beweis.** Da  $\Omega$  beschränkt, folgt mit der Hölderschen Ungleichung zunächst

$$|f_\delta(x)| \leq \sup_y \rho_\delta(y) \int_{B_\delta(0)} |f(x-y)| dy \leq C_\delta \|f\|_{L^p} \leq C$$

mit einer von  $x \in \Omega$  und  $f \in \mathcal{F}$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} |f_\delta(x) - f_\delta(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\delta(x-y) - \rho_\delta(z-y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \sup_y |\rho_\delta(x-y) - \rho_\delta(z-y)| \|f\|_{L^p} \leq C_\delta |x-z| \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

□

Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ . Für  $\varepsilon_l = 1/l$  mit zugehörigem  $\delta_l > 0$  wähle Teilfolgen  $\Lambda_1 \supset \dots \supset \Lambda_l \supset \Lambda_{l+1} \dots$  gemäss Satz 6.3.1 und Behauptung 2 so, dass

$$\|f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}\|_{L^p} \leq (\mathcal{L}^n(\Omega))^{1/p} \|f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}\|_{C^0} < \varepsilon_l$$

für  $j, k \in \Lambda_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Sei  $\Lambda$  eine Diagonalfolge mit der Eigenschaft, dass für jedes  $l \in \mathbb{N}$  und für jedes  $k \in \Lambda$  gilt  $k \in \Lambda_l$ , falls  $k \geq l$ . Mit Behauptung 1 folgt

$$\begin{aligned} \|f_j - f_k\|_{L^p} &\leq \|f_j - f_{j, \delta_l}\|_{L^p} + \|f_{j, \delta_l} - f_{k, \delta_l}\|_{L^p} \\ &\quad + \|f_{k, \delta_l} - f_k\|_{L^p} < 3\varepsilon_l \end{aligned}$$

für  $j, k \in \Lambda$ ,  $j, k \geq l$ ; das heisst,  $(f_k)_{k \in \Lambda}$  ist Cauchy-Folge in  $L^p(\Omega)$ .  $\square$

**Beispiel 6.3.1.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $n \geq 3$ , mit Rand von der Klasse  $C^1$ , und sei  $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  gegeben durch

$$(Tf)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy,$$

wobei  $G: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl.  $\mathcal{L}^n$  messbar mit  $G(x, y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und mit

$$\forall x \neq y: 0 \leq G(x, y) = G(y, x) \leq C|x - y|^{2-n}, \quad |\nabla G(x, y)| \leq C|x - y|^{1-n}.$$

Setze  $G$  fort durch  $G(x, y) = 0$ , falls  $x \notin \Omega$ .

Da für  $0 < \alpha < n$  gilt  $|x|^{\alpha-n} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  für jedes  $p < \frac{n}{n-\alpha}$ , erhalten wir  $Tf \in L^2$  mit  $\|Tf\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ . Weiter gilt für  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $|h| \leq 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|Tf - \tau_h(Tf)\|_{L^2} &\leq \left\| \int_{\Omega} |G(x, y) - G(x+h, y)| |f(y)| dy \right\|_{L^2} \\ &\leq C|h| \cdot \| |x|^{1-n} * |f| \|_{L^2} \leq C|h| \cdot \|f\|_{L^2}; \end{aligned}$$

vergleiche Korollar 4.2.1 der Vorlesung über Masstheorie. Nach Satz 6.3.2 ist der Operator  $T$  somit kompakt.

Falls wir  $T$  als Operator  $T: C^0(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  auffassen, erhalten wir eine analoge Aussage mit Satz 6.3.1.

**Bemerkung 6.3.2.** Die eindeutig bestimmte Lösung  $u$  des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

hat eine Darstellung  $u = Tf$  mit einem  $T$  wie in Beispiel 6.3.1.

## 6.4 Adjungierter Operator im Hilbertraum

Sei  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ein  $\mathbb{R}$ -Hilbert-Raum mit kanonischem Isomorphismus  $\mathcal{J}: H \rightarrow H^*$ , wobei

$$\forall x \in H, y^* \in H^*: \langle y^*, x \rangle_{H^* \times H} = (\mathcal{J}^{-1}y^*, x)_H. \quad (6.4.1)$$

Sei weiter  $A: D_A \subset H \rightarrow H$  dicht definiert,  $A^*: D_{A^*} \subset H^* \rightarrow H^*$  der zu  $A$  duale Operator.

**Definition 6.4.1.** Der zu  $A$  adjungierte Operator  $A^T: D_{A^T} \subset H \rightarrow H$  hat den Definitionsbereich

$$D_{A^T} = \{y \in H; l_y: D_A \ni x \mapsto (y, Ax)_H = \langle \mathcal{J}y, Ax \rangle_{H^* \times H} \text{ ist stetig} \}$$



und  $A^T y = \mathcal{J}^{-1} l_y$  für alle  $y \in D_{A^T}$ ; das heisst,

$$\forall x \in D_A, y \in D_{A^T}: (A^T y, x)_H = l_y(x) = (y, Ax)_H. \quad (6.4.2)$$

**Bemerkung 6.4.1.** Offenbar hängen  $A^T$  und  $A^*$  wie folgt zusammen:

i)  $y \in D_{A^T} \Leftrightarrow y^* = \mathcal{J}y \in D_{A^*}$ , und weiter

ii)  $\forall y \in D_{A^T}: \mathcal{J}(A^T y) = A^*(\mathcal{J}y)$ ; das heisst,

$$A^T = \mathcal{J}^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{J}. \quad (6.4.3)$$

**Beispiel 6.4.1.** Sei  $H = \mathbb{R}^n$  mit Skalarprodukt

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n): (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

und sei  $A \in L(H)$  gegeben mit

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n;$$

das heisst,  $A$  hat die Matrixdarstellung

$$a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: (y, Ax) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i x_j = (A^T y, x),$$

mit

$$(A^T y)_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i, \quad 1 \leq j \leq n,$$

und  $A^T$  hat die Matrixdarstellung

$$a^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Notation:** Im weiteren schreiben wir – im Einklang mit der Lehrbuchliteratur – anstelle von  $A^T$  wieder  $A^*$ , wobei wir  $H$  und  $H^*$  implizit mittels  $\mathcal{J}$  identifizieren. Die Gleichung, welche  $A^*$  auf einem Hilbert-Raum charakterisiert, ist also stets (6.4.2) – mit  $A^*$  anstelle von  $A^T$ .

**Definition 6.4.2.** i) Ein Operator  $A: D_A \subset H \rightarrow H$  heißt **symmetrisch**, falls  $A \subset A^*$ , das heißt, falls  $D_A \subset D_{A^*}$  und falls gilt

$$(Ay, x)_H = (y, Ax)_H, \quad \forall x, y \in D_A.$$

ii) Ein Operator  $A: D_A \subset H \rightarrow H$  heißt **selbstadjungiert**, falls  $A = A^*$ , das heißt, falls  $A$  symmetrisch ist mit  $D_A = D_{A^*}$ .

**Bemerkung 6.4.2.** Ein symmetrischer Operator wird auch als **formal selbstadjungiert** bezeichnet.

**Beispiel 6.4.2.** i) Sei  $A \in L(H)$  symmetrisch. Dann ist  $A$  selbstadjungiert, da mit  $H = D_A \subset D_{A^*} \subset H$  folgt, dass  $D_A = D_{A^*} = H$ .

ii) Sei  $T \in L(H)$  selbstadjungiert. Dann ist  $id - T \in L(H)$  symmetrisch und nach i) selbstadjungiert,

**Beispiel 6.4.3.** Wir betrachten die Erweiterungen  $A_1, A_2, A_3$  des Laplace-Operators  $A_\infty: C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ,  $A_\infty u = \Delta u$  für  $u \in C_c^\infty(\Omega)$ , auf einem glatt berandeten Gebiet  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ , wobei

$$\begin{aligned} D_{A_1} &= C^2(\overline{\Omega}), \\ D_{A_2} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega}); u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ D_{A_3} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega}); u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ auf } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt  $A_\infty \subsetneq A_3 \subsetneq A_2 \subsetneq A_1$ , nach Satz 6.1.2 also

$$A_1^* \subset A_2^* \subset A_3^* \subset A_\infty^*.$$

Weiter gilt nach partieller Integration

$$(v, A_i u)_{L^2} = \int_\Omega v \Delta u \, d\mu = \int_\Omega \Delta v \cdot u \, d\mu = (A_i v, u)_{L^2} \quad (6.4.4)$$

für alle  $u, v \in D_{A_i}$ , falls  $i = 2, 3$  oder  $i = \infty$ ; das heißt,  $A_2, A_3$  und  $A_\infty$  sind symmetrisch.

Zudem gilt (6.4.4) auch für  $u \in D_{A_3}, v \in D_{A_1}$ ; das heißt,

$$D_{A_1} \subset D_{A_3^*}, \quad A_1 \subset A_3^*.$$

Somit ist  $A_3^* \supset A_1 \not\supseteq A_3$  eine echte Erweiterung von  $A_3$ .

**Bemerkung 6.4.3.** Eine selbstadjungierte Erweiterung des Laplace-Operators erhalten wir im Sobolev-Raum  $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ; vgl. Funktionalanalysis II.

## 6.5 Spektrum und Resolvente

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banach-Raum über  $\mathbb{C}$ ,  $A: D_A \subset X \rightarrow X$  linear.

**Definition 6.5.1.** Die Resolventenmenge von  $A$  ist

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda \cdot id - A): D_A \rightarrow X \text{ ist bijektiv mit } (\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)\}.$$

Die Menge  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  heisst das **Spektrum** von  $A$ .

**Bemerkung 6.5.1.** i) Falls  $\rho(A) \neq \emptyset$ , so ist  $A$  abgeschlossen.

ii) Ist  $A$  abgeschlossen,  $\lambda \cdot id - A$  bijektiv, so folgt  $\lambda \in \rho(A)$ , da  $(\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)$  gemäss Satz 3.3.2.

iii) Statt  $\lambda \cdot id - A$  schreiben wir der Einfachheit halber im folgenden auch  $\lambda - A$ , sowie  $1 = id$ .

**Beweis.** i) Sei  $\lambda \in \rho(A)$ , also  $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ . Dann ist  $(\lambda - A)^{-1}$  abgeschlossen; das heisst, die Menge

$$M = \{(x, y) \in X \times X; x = (\lambda - A)^{-1}y, y \in X\}$$

ist abgeschlossen. Jedoch gilt offenbar

$$M = \Gamma_{(\lambda - A)} = \{(x, \lambda x - Ax); x \in D_A\},$$

und die Abgeschlossenheit von  $M$  impliziert diejenige von  $A$ .  $\square$

**Definition 6.5.2.** Die Resolvente von  $A$  ist die Abbildung  $R: \rho(A) \rightarrow L(X)$  mit

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R_\lambda = (\lambda - A)^{-1} \in L(X).$$

**Satz 6.5.1.** Sei  $A: D_A \subset X \rightarrow X$ ,  $z_0 \in \rho(A)$ . Dann enthält  $\rho(A)$  die offene Kreisscheibe

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < 1/\|R_{z_0}\|_{L(X)}\}.$$

Inbesondere ist  $\rho(A)$  offen,  $\sigma(A)$  abgeschlossen und

$$\forall z \in \rho(A): \|R_z\|_{L(X)} \geq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))}.$$

Weiter ist die Abbildung  $z \mapsto R_z \in L(X)$  stetig in  $\rho(A)$ .

**Beweis.** Schreibe

$$(z - A) = (z - z_0) + (z_0 - A) = (1 + (z - z_0)R_{z_0})(z_0 - A).$$

Falls  $z \in D$ , so ist  $1 + (z - z_0)R_{z_0}$  gemäss Satz 2.2.7 invertierbar mit

$$(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (z_0 - z)^n R_{z_0}^n,$$

also auch

$$R_z = (z - A)^{-1} = R_{z_0}(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} \in L(X);$$

vergleiche Satz 2.2.8.

Weiter folgt mit  $(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} \rightarrow 1$  in  $L(X)$  ( $z \rightarrow z_0$ ) offenbar auch

$$\|R_z - R_{z_0}\|_{L(X)} = \|R_{z_0}((1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} - 1)\|_{L(X)} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_0).$$

□

**Satz 6.5.2.** Falls  $\lambda, \mu \in \rho(A)$ , so gilt:

i)  $R_\lambda A \subset AR_\lambda = \lambda R_\lambda - id \in L(X)$ ;

ii)  $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$ ;

iii)  $R_\lambda \cdot R_\mu = R_\mu \cdot R_\lambda$ .

**Beweis.** Für  $\lambda \in \rho(A)$  gilt

$$\lambda R_\lambda - R_\lambda A = R_\lambda(\lambda - A) = id_{D_A} \subset id_X = (\lambda - A)R_\lambda = \lambda R_\lambda - AR_\lambda.$$

Insbesondere erhalten wir i) aus der Darstellung

$$R_\lambda A = \lambda R_\lambda - id_{D_A} \subset \lambda R_\lambda - id_X = AR_\lambda.$$

Weiter lesen wir ab

$$A(R_\mu - R_\lambda) = \mu R_\mu - \lambda R_\lambda,$$

also

$$(A - \mu)(R_\mu - R_\lambda) = (\mu - \lambda)R_\lambda,$$

und ii) folgt nach Komposition mit  $R_\mu$ . Schliesslich erhalten wir iii) aus ii) durch Vertauschen von  $\mu$  und  $\lambda$ . □

**Bemerkung 6.5.2.** Mit Satz 6.5.1 und Satz 6.5.2 ii) folgt, dass  $R$  auf  $\rho(A)$  komplex differenzierbar ist mit  $dR_\lambda/d\lambda = -R_\lambda^2$ .

**Definition 6.5.3.** Sei  $A$  abgeschlossen mit Spektrum  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ . Insbesondere enthält  $\sigma(A)$  die Menge

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - A \text{ ist nicht injektiv}\}$$

der **Eigenwerte** von  $A$  mit **Eigenraum**

$$\ker(\lambda - A) = \{x \in D_A; Ax = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

$\sigma_p(A)$  heisst das **Punktspektrum** von  $A$ . Die Menge

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A); \lambda - A \text{ ist injektiv, im}(\lambda - A) \text{ ist dicht}\}$$

heisst **kontinuierliches Spektrum** von  $A$ . Schliesslich bezeichnen wir mit

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$$

das **Restspektrum** von  $A$ .

**Beispiel 6.5.1.** Sei  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $A \in L(X)$ , und sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Wegen der Rangformel sind äquivalent:

i)  $\lambda - A$  ist injektiv,

ii)  $\lambda - A$  ist surjektiv;

das heisst,  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ . Nach Darstellung von  $A$  durch eine quadratische Matrix gilt überdies die Äquivalenz von i), ii) zu

iii)  $p(\lambda) = \det(\lambda - A) \neq 0$ .

Da das charakteristische Polynom  $p$  mindestens eine und höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen  $\lambda \in \mathbb{C}$  besitzt, folgt  $\emptyset \neq \sigma(A) = \sigma_p(A)$ , und  $\sigma(A)$  enthält höchstens  $n$  Punkte. Weiter ist  $\rho(A)$  nicht leer und liegt sogar dicht in  $\mathbb{C}$ .

Ein analoges Resultat gilt in einem beliebigen Hilbertraum  $H$  für einen kompakten, selbstadjungierten Operator  $T \in L(H)$ .

**Beispiel 6.5.2.** Sei  $H$  Hilbertraum, und sei  $T \in L(H)$  kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

(Vergleiche hierzu auch den Satz von Riesz-Schauder, Satz 6.7.2.)

**Beweis.** Nach Satz 6.2.3 hat der Operator  $id - T$  abgeschlossenes Bild und gemäss Beispiel 6.4.2.ii) ist  $id - T$  selbstadjungiert. Mit Satz 6.2.1 folgt

$$im(id - T) = ker(id - T)^\perp,$$

und  $1 \in \sigma(T)$  genau dann, wenn  $1 \in \sigma_p(T)$ .

In Satz 6.6.2 zeigen wir, dass  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ . Ersetzen wir  $T$  durch  $\lambda^{-1}T$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so folgt nach Multiplikation mit  $\lambda$  die Darstellung

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: im(\lambda - T) = ker(\lambda - T)^\perp,$$

und die Behauptung folgt. □

**Beispiel 6.5.3.** Für den Shift-Operator  $S: l^2 \rightarrow l^2$  mit

$$S(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$$

gilt  $0 \in \sigma(S)$ ,  $0 \notin \sigma_p(S)$ .

**Beweis.**  $S$  ist nicht surjektiv, offenbar aber injektiv. □

**Satz 6.5.3.** Sei  $A \in L(X)$ . Dann ist  $\rho(A) \neq \emptyset \neq \sigma(A)$ , und es gilt:

i)  $|z| > r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow z \in \rho(A)$ ;

ii)  $r_A = \sup_{z \in \sigma(A)} |z|$ .

**Beweis.** i) Sei  $|z| > r_A$ . Setze  $\tilde{A} = z^{-1}A \in L(X)$  mit  $r_{\tilde{A}} < 1$ . Aus Satz 2.2.7 folgt Invertierbarkeit von  $1 - \tilde{A}$  und

$$\begin{aligned} R_z &= (z - A)^{-1} = z^{-1}(1 - \tilde{A})^{-1} = z^{-1} \sum_{n \geq 0} \tilde{A}^n \\ &= z^{-1} + z^{-2}A + z^{-3}A^2 + \dots \in L(X). \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

ii) Mit i) folgt zunächst  $r_A \geq \sup_{z \in \sigma(A) \cup \{0\}} |z| =: \sigma_0$ . Es genügt daher zu zeigen, dass  $r_A \leq \sigma_0$ .

**Behauptung 1.** Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, r > \sigma_0: A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n R_z dz, \quad (6.5.2)$$

wobei das Integral als Grenzwert geeigneter Riemann-Summen im Raum  $L(X)$  zu verstehen ist.

**Beweis.** Offenbar ist (6.5.2) äquivalent zu

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, x \in X, l \in X^*, r > \sigma_0: l(A^n x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n l(R_z x) dz. \quad (6.5.3)$$

Für  $|z| > r_A$  entwickle  $R_z$  gemäss (6.5.1). Auswertung an einem beliebigen Punkt  $x \in X$  und Anwendung von  $l \in X^*$  ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: z^n l(R_z x) = z^{-1} \sum_{k \geq 0} z^{n-k} l(A^k x).$$

Gliedweise Integration über  $\partial B_r(0) \subset \mathbb{C}$  mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes ergibt (6.5.3) für  $r > r_A$ .

Mit Bemerkung 6.5.2 folgt, dass die Abbildung

$$\rho(A) \ni z \mapsto l(R_z x) \in \mathbb{C} \quad (6.5.4)$$

für jedes  $x \in X, l \in X^*$  holomorph ist. Gemäss dem Cauchyschen Integralsatz gilt daher (6.5.3) und damit auch (6.5.2) für jedes  $r > \sigma_0$ .  $\square$

Für  $r > \sigma_0$  setze

$$M(r) = \max\{\|R_z\|_{L(X)}; |z| = r\}.$$

Aus (6.5.2) folgt mit der Minkowski Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|A^n\|_{L(X)} \leq r^{n+1} M(r),$$

also

$$r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq r.$$

Da  $r > \sigma_0$  beliebig war, folgt  $r_A \leq \sigma_0$ .

iii) Mit einem ähnlichen Argument folgt nun auch, dass  $\sigma(A) \neq \emptyset$ . Nehmen wir widerspruchswise an,  $\sigma(A) = \emptyset, \rho(A) = \mathbb{C}$ , so ist die auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte Funktion

$$z \mapsto f(z) = l(R_z x)$$

für jedes  $x \in X, l \in X^*$  analytisch, und (6.5.1) ergibt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \leq C \cdot \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-1} \|(1 - z^{-1}A)^{-1}\|_{L(X)} = 0.$$

Mit dem Satz von Liouville folgt  $f(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Da  $l$  und  $x$  beliebig gewählt waren, erhalten wir  $R_z = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ ; jedoch gilt andererseits

$$\forall z \in \rho(A), x \in X: (z - A)R_z x = x,$$

und  $R_z$  ist für alle  $z \in \rho(A)$  injektiv.  $\square$

Sei  $A \in L(X)$ . Weiter sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen mit  $\sigma(A) \subset \Omega$ .

**Definition 6.5.4.** Eine Schar  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_L$  von Kurven  $\gamma_l: S^1 \rightarrow \Omega$  der Klasse  $C^1$ ,  $1 \leq l \leq L$ , **umrundet**  $\sigma(A)$  in  $\Omega$ , falls für eine Familie disjunkter offener Mengen  $\Omega_l \subset \Omega$ ,  $1 \leq l \leq L$ , mit Rand von der Klasse  $C^1$  gilt

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{1 \leq l \leq L} \Omega_l, \quad \gamma_l = \partial\Omega_l, \quad 1 \leq l \leq L.$$

Für eine Schar  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_L$  in  $\Omega$  wie in Definition 6.5.4 und  $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$  setze

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{1 \leq l \leq L} \int_{\gamma_l} f dz$$

**Lemma 6.5.1.** Falls die Schar  $\gamma$  die Menge  $\sigma(A)$  in  $\Omega$  umrundet, so gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^n R_z dz. \quad (6.5.5)$$

**Beweis.** Gemäss (6.5.2) gilt die Behauptung für die Kurve  $\gamma_0 = \partial B_r(0)$  in  $\Omega_0 = B_{r_0}(0)$ , wobei  $r_A < r < r_0$  so gewählt sind, dass  $Q := \cup_{1 \leq l \leq L} \Omega_l \subset B_r(0)$ . Da  $D := \Omega_0 \setminus Q \subset \rho(A)$  und daher  $D \ni z \mapsto z^n R_z$  holomorph, liefert der Cauchysche Integralsatz die Identität

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: 0 = \int_{\partial D} z^n R_z dz = \int_{\gamma_0} z^n R_z dz - \int_{\gamma} z^n R_z dz,$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

**Lemma 6.5.2.** Falls die Schar  $\gamma$  die Menge  $\sigma(A)$  in  $\Omega$  umrundet, und falls  $\alpha \in \rho(A)$ ,  $\alpha \notin \Omega$ , so gilt

$$\forall n \in \mathbb{Z}: (\alpha - A)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\alpha - z)^n R_z dz =: y_n. \quad (6.5.6)$$

Für  $n \geq 0$  gilt (6.5.6) für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Beweis.** Gemäss Lemma 6.5.1 gilt die Behauptung für  $n = 0$ .

Für  $z \in \rho(A)$  schreibe

$$(\alpha - A)R_z = ((z - A) + (\alpha - z))(z - A)^{-1} = 1 + (\alpha - z)R_z.$$

Da wir für  $A \in L(X)$  den Operator  $\alpha - A$  mit dem Integral vertauschen dürfen, erhalten wir durch Anwenden von  $\alpha - A$  auf die rechte Seite  $y_n$  von (6.5.6) mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes die Rekursionsformel

$$\forall n \in \mathbb{Z}: (\alpha - A)y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\alpha - z)^n dz + y_{n+1} = y_{n+1},$$

Da  $\alpha \in \rho(A)$  erhalten wir nach Anwenden von  $R_{\alpha}$  zudem die Identität

$$\forall n \in \mathbb{Z}: y_n = R_{\alpha} y_{n+1},$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion.  $\square$

**Folgerung 6.5.1.** Falls die Schar  $\gamma$  die Menge  $\sigma(A)$  in  $\Omega$  umrundet, und falls  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom,  $\alpha_m \in \rho(A)$ ,  $\alpha_m \notin \Omega$ ,  $c_m \in \mathbb{C}$ ,  $k_m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq m \leq M$ , so gilt für die (in  $\Omega$  holomorphe) rationale Funktion

$$f(z) = p(z) + \sum_{m=1}^M c_m (\alpha_m - z)^{-k_m}$$

die Identität

$$f(A) := p(A) + \sum_{m=1}^M c_m (\alpha_m - A)^{-k_m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) R_z dz. \quad (6.5.7)$$

Wie oben bezeichne

$$Gl(X) = \{T \in L(X); T \text{ ist bijektiv, } T^{-1} \in L(X)\}.$$

**Satz 6.5.4.** (Spektralabbildungssatz) Sei  $f(z) = p(z) + \sum_{m=1}^M c_m (\alpha_m - z)^{-k_m}$  eine rationale Funktion wie in Folgerung 6.5.1. Dann gilt

- i)  $f(A) \in Gl(X) \Leftrightarrow \forall z \in \sigma(A): f(z) \neq 0$ ;
- ii)  $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ .

**Beweis.** i) “ $\Leftarrow$ ”: Sei  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \sigma(A)$ . Dann gibt es eine offene Menge  $\Omega_1 \subset \Omega$  mit  $\sigma(A) \subset \Omega_1$ , so dass die rationale Funktion  $g = 1/f$  holomorph ist in  $\Omega_1$ . Für eine Kurve  $\gamma_1$ , welche  $\sigma(A)$  in  $\Omega_1$  umrundet, folgt mit  $r(z) = f(z)g(z) = g(z)f(z) \equiv 1$  aus (6.5.7) mit Lemma 6.5.2 die Gleichung

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) = r(A) = 1 \in L(X).$$

Das heisst,  $g(A) = f(A)^{-1} \in L(X)$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Falls  $f(\lambda) = 0$  für ein  $\lambda \in \sigma(A)$ , so gibt es eine rationale und in  $\Omega$  holomorphe Funktion  $g$  mit  $f(z) = g(z)(z - \lambda)$ ,  $z \in \Omega$ , und

$$f(A) = g(A)(A - \lambda) = (A - \lambda)g(A)$$

ist entweder nicht injektiv oder nicht surjektiv; also  $f(A) \notin Gl(X)$ .

ii) Für  $\beta \in \mathbb{C}$  gilt wegen i) mit  $g(z) := f(z) - \beta$  die Äquivalenz

$$g(A) = f(A) - \beta \notin Gl(X) \Leftrightarrow \exists z \in \sigma(A): g(z) = f(z) - \beta = 0;$$

also

$$\beta \in \sigma(f(A)) \Leftrightarrow \beta \in f(\sigma(A)).$$

$\square$



## 6.6 Spektraltheorie im Hilbertraum

Sei  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ein Hilbert-Raum über  $\mathbb{C}$  mit hermiteschem Skalarprodukt

$$\forall x, y \in H: (x, y)_H = \overline{(y, x)_H},$$

und sei  $A: D_A \subset H \rightarrow H$  dicht definiert mit adjungiertem Operator  $A^*$ .

Welche Aussagen über das Spektrum von  $A$  kann man machen, falls  $A$  symmetrisch ist oder selbstadjungiert?

**Satz 6.6.1.** *Sei  $A$  symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte reell,  $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$ .*

**Beweis.** Sei  $\lambda \in \sigma_p(A)$  mit zugehörigem Eigenvektor  $0 \neq x \in \ker(\lambda - A) \subset D_A$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda \|x\|_H^2 &= (Ax, x)_H = (A^*x, x)_H \\ &= (x, Ax)_H = \overline{(Ax, x)_H} = \bar{\lambda} \|x\|_H^2; \end{aligned}$$

also  $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ . □

Gilt dieselbe Aussage für das gesamte Spektrum? – Betrachte dazu das folgende Beispiel. Zuvor benötigen wir noch eine Definition.

**Definition 6.6.1.** *i) Die Funktion  $f \in L^2(]0, 1[)$  besitzt eine schwache Ableitung  $f' \in L^2(]0, 1[)$ , falls  $v =: f' \in L^2(]0, 1[)$  existiert mit*

$$\forall v \in C_c^\infty(]0, 1[): \int_0^1 fg' dx = - \int_0^1 vg dx.$$

*ii) Weiter sei*

$$H^1(]0, 1[) := \{f \in L^2(]0, 1[); f \text{ besitzt eine schwache Ableitung } f' \in L^2\}$$

*mit der Norm*

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}, \quad f \in H^1(]0, 1[).$$

**Bemerkung 6.6.1.** Es gilt  $H^1(]0, 1[) = \|\cdot\|_{H^1}$ -clos  $(C^1([0, 1]))$  mit stetiger Einbettung  $H^1(]0, 1[) \hookrightarrow C^0([0, 1])$ . Weiter gilt

$$\forall f, g \in H^1(]0, 1[): fg \in H^1(]0, 1[), \quad (fg)' = f'g + fg',$$

und partielle Integration ist möglich; siehe Funktionalanalysis II.

**Beispiel 6.6.1.** Sei  $H = L^2(]0, 1[; \mathbb{C})$  mit Skalarprodukt

$$\forall f, g \in H: (f, g)_{L^2} = \int_0^1 f \bar{g} dt,$$

und sei  $A_\infty = i \frac{d}{dt}: C_c^\infty(]0, 1[; \mathbb{C}) \subset H \rightarrow H$ . Betrachte die folgenden Erweite-

rungen  $A_k$  von  $A_\infty$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , wobei

$$\begin{aligned} D_{A_1} &= H^1 = H^1(\]0, 1[; \mathbb{C}), \\ D_{A_2} &= \{f \in H^1; f(0) = f(1)\} \quad (\text{periodische Randbedingung}), \\ D_{A_3} &= \{f \in H^1; f(0) = 0 = f(1)\} \quad (\text{Dirichlet Randbedingung}), \\ D_{A_4} &= \{f \in H^1; f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Natürlich setzen wir  $A_k f = i f'$  für  $f \in D_{A_k}$ .  $D_{A_1}$  ist dann offenbar der maximale Definitionsbereich, und es gilt  $A_\infty \subsetneq A_3 \subsetneq A_2 \subsetneq A_1$ ,  $A_\infty \subsetneq A_4$ .

**Behauptung 1.**  $A_3 \subset A_2 = A_2^* \subset A_3^*$ ; das heisst,  $A_3$  ist symmetrisch, wegen  $A_3 \subsetneq A_2$  aber nicht selbstadjungiert, und  $A_2$  ist selbstadjungiert.

**Beweis.** Die Aussage  $A_2 \subset A_2^*$  folgt analog zu Beispiel 6.4.3. Es genügt daher,  $A_2^* \subset A_2$  zu zeigen; alles weitere folgt aus Satz 6.1.2.

Sei  $f \in D_{A_2^*}$ . Für  $g \in C_c^\infty(\]0, 1[) \subset D_{A_2}$  erhalten wir

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i \int_0^1 f \bar{g}' dt.$$

Da  $f \in D_{A_2^*}$ , können wir abschätzen

$$\sup \left\{ \int_0^1 f \bar{g}' dt; g \in C_c^\infty, \|g\|_{L^2} \leq 1 \right\} \leq \sup_{\|g\|_{L^2} \leq 1} (A_2^* f, g)_{L^2} = \|A_2^* f\|_{L^2};$$

das heisst,  $f \in H^1$  besitzt eine schwache Ableitung  $f' \in L^2$ , so dass

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = -i \int_0^1 f \bar{g}' dt = i \int_0^1 f' \bar{g} dt = (i f', g)_{L^2}$$

für alle  $g \in C_c^\infty(\]0, 1[)$ , und  $A_2^* f = i f'$ .

Für allgemeine  $g \in D_{A_2}$  erhalten wir mit partieller Integration zusätzlich einen Randterm

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i \int_0^1 f \bar{g}' dt = i \int_0^1 f' \bar{g} dt - i (f \bar{g}) \Big|_{t=0}^1. \quad (6.6.1)$$

Da andererseits  $A_2^* f = i f'$ , folgt jedoch auch in diesem Fall

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = i \int_0^1 f' \bar{g} dt,$$

mit (6.6.1) also

$$\forall g \in D_{A_2}: (f \bar{g}) \Big|_0^1 = (f(1) - f(0)) \bar{g}(1) = 0.$$

Da  $\bar{g}(1)$  beliebig ist, erhalten wir  $f(0) = f(1)$ , also  $f \in D_{A_2}$ . □

**Behauptung 2.** Es gilt

$$\text{i) } \sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) = \mathbb{C}, \quad \rho(A_1) = \emptyset;$$

- ii)  $\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\overline{\rho(A_2)} = \mathbb{C}$ ;
- iii)  $\sigma(A_3) = \mathbb{C}$ ,  $\sigma_p(A_3) = \emptyset$ ,  $\rho(A_3) = \emptyset$ ;
- iv)  $\sigma(A_4) = \emptyset$ ,  $\rho(A_4) = \mathbb{C}$ .

**Beweis.** i) Zu  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist  $f = e^{-i\lambda t} \in \ker(\lambda - A_1) \subset D_{A_1}$ .

ii) Für  $k \in \mathbb{Z}$  gilt analog, dass  $f = e^{-2\pi ikt} \in D_{A_2} \cap \ker(2\pi k - A_2)$ ; das heisst,  $2\pi\mathbb{Z} \subset \sigma_p(A_2) \subset \sigma(A_2)$ .

Für  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $g \in L^2$  erhält man alle Lösungen  $f$  der Gleichung

$$(\lambda - A_2)f = \left(\lambda - i\frac{d}{dt}\right)f = \lambda f - if' = g \quad (6.6.2)$$

mit der Variation-der-Konstanten-Formel

$$f(t) = ae^{-i\lambda t} + i \int_0^t e^{i\lambda(s-t)} g(s) ds, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (6.6.3)$$

Falls  $f \in D_{A_2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , so ist die Konstante  $a \in \mathbb{C}$  in (6.6.3) eindeutig durch die Bedingung  $f(0) = f(1)$  bestimmt. Aus der Gleichung

$$a = f(0) = f(1) = ae^{-i\lambda} + i \int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s) ds \quad (6.6.4)$$

folgt nämlich

$$a = (1 - e^{-i\lambda})^{-1} i \int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s) ds,$$

und mit einer Konstanten  $C(\lambda) > 0$  erhalten wir zu  $g \in L^2$  eine eindeutige Lösung  $f \in D_{A_2}$  von (6.6.2) mit

$$\|f\|_{L^2} \leq |a| + \|g\|_{L^2} \leq C(\lambda)\|g\|_{L^2}.$$

Somit gilt  $\lambda \in \rho(A_2)$ .

iii) Falls  $A_3 f = if' = \lambda f$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so folgt  $f(t) = ae^{-i\lambda t}$  und  $a = 0$ , falls  $f \in D_{A_3}$ ; das heisst,  $\sigma_p(A_3) = \emptyset$ .

Andererseits ist  $\lambda - A_3$  für kein  $\lambda \in \mathbb{C}$  surjektiv. Für  $g(s) = e^{-i\lambda s}$  folgt nämlich mit (6.6.3) und (6.6.4) für jede Lösung  $f \in D_{A_3}$  von (6.6.2) zunächst  $a = 0$  und

$$f(t) = ie^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} g(s) ds = ite^{-i\lambda t},$$

also  $f(1) = ie^{-i\lambda} \neq 0$  im Widerspruch zur Annahme  $f \in D_{A_3}$ .

iv) Wie im Falle von  $A_3$  erhalten wir aus (6.6.3) für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $g \in L^2(]0, 1[; \mathbb{C})$  die Darstellung

$$f(t) = ie^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} g(s) ds \in D_{A_4}$$

einer Lösung von (6.6.2); das heisst,  $\rho(A_4) = \mathbb{C}$ . (Da  $A_k \notin L(H)$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , stehen die Ergebnisse i), iii), iv) nicht im Widerspruch zu Satz 6.5.3.)  $\square$

Symmetrische Operatoren können demnach durchaus imaginäre Spektralanteile besitzen, jedoch gilt:

**Lemma 6.6.1.** *Sei  $A \subset A^*$  symmetrisch. Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  die Abschätzung*

$$\forall u \in D_A: \|(z - A)u\|_H \geq |\operatorname{Im}(z)| \|u\|_H;$$

*das heisst, für  $z \notin \mathbb{R}$  ist  $(z - A)$  stets injektiv. Falls  $(z - A)$  zusätzlich surjektiv ist, so folgt  $z \in \rho(A)$  und*

$$\|(z - A)^{-1}\|_{L(H)} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

**Beweis.** Für  $u \in D_A$  gilt wegen  $A \subset A^*$

$$(u, Au)_H = (Au, u)_H = \overline{(u, Au)_H} \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für alle  $u \in D_A$  die Abschätzung

$$|\operatorname{Im}(z)| \|u\|_H^2 = |\operatorname{Im}(u, (z - A)u)_H| \leq |(u, (z - A)u)_H| \leq \|u\|_H \|(z - A)u\|_H,$$

wie gewünscht.  $\square$

Beispiel 6.6.1 illustriert sehr schön den folgenden Satz, welcher die selbstadjungierten Operatoren durch ihr Spektrum charakterisiert.

**Satz 6.6.2.** *Sei  $A \subset A^*$  symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

- i)  $A = A^*$ ;
- ii)  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ ;
- iii) *Es gibt  $z_1, z_2 \in \rho(A)$  mit  $\operatorname{Im}(z_1) < 0 < \operatorname{Im}(z_2)$ .*

**Beweis.** Wir zeigen iii)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  i)  $\Rightarrow$  iii).

iii)  $\Rightarrow$  ii): Sei  $z_0 - A$  surjektiv,  $\operatorname{Im}(z_0) > 0$ . Mit Lemma 6.6.1 folgt  $z_0 \in \rho(A)$ , und Satz 6.5.1 liefert zusammen mit Lemma 6.6.1

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \operatorname{Im}(z_0)\} \subset \rho(A).$$

Die Menge  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$  lässt sich iterativ durch derartige Kreisscheiben überdecken. Analog erhalten wir  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) < 0\} \subset \rho(A)$ .

ii)  $\Rightarrow$  i): Sei  $u \in D_{A^*}$ . Da  $\pm i \in \rho(A)$  nach Annahme, existiert  $v \in D_A$  mit

$$(A^* - i)u = (A - i)v = (A^* - i)v,$$

letzteres wegen  $A \subset A^*$ . Es folgt  $(u - v) \in \ker(A^* - i)$ . Wähle nun  $w \in D_A$  mit  $(A + i)w = u - v$ . Es folgt

$$\|u - v\|_H^2 = (u - v, (A + i)w)_H = ((A^* - i)(u - v), w)_H = 0;$$

das heisst,  $u = v \in D_A$ .

i)  $\Rightarrow$  iii): Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

**Behauptung 1.**  $im(z - A)$  ist abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $v_k = (z - A)u_k \rightarrow v$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Da  $A = A^*$  insbesondere symmetrisch ist, folgt mit Lemma 6.6.1 die Abschätzung

$$\|u_k - u_l\|_H \leq \frac{1}{|Im(z)|} \|v_k - v_l\| \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty);$$

das heisst,  $u_k \rightarrow u$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Da  $A = A^*$  abgeschlossen ist, folgt  $u \in D_A$ , und  $v = (z - A)u \in im(z - A)$ . Der Raum  $im(z - A)$  ist somit abgeschlossen.  $\square$

**Behauptung 2.**  $z - A$  ist surjektiv.

*Beweis.* Da  $im(z - A)$  nach Behauptung 1 abgeschlossen, liefert Satz 6.2.1 zusammen mit der Annahme  $A = A^*$  die Darstellung

$$im(z - A) = ker(z - A)^\perp.$$

Da  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , folgt  $ker(z - A) = \{0\}$  mit Lemma 6.6.1, und  $im(z - A) = H$ .  $\square$

Mit den Behauptungen 1 und 2 folgt  $z \in \rho(A)$ , wie gewünscht. Damit ist der Satz nun vollständig bewiesen.  $\square$

## 6.7 Das Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum

Sei  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  ein Hilbert-Raum über  $\mathbb{C}$ ,  $T \in L(H)$ .

**Definition 6.7.1.** Der Operator  $T$  heisst **normal**, falls gilt  $TT^* = T^*T$ ;  $T$  heisst **unitär**, falls  $T \in Gl(H)$  mit  $T^* = T^{-1}$ .

**Bemerkung 6.7.1.**  $T$  ist normal  $\Leftrightarrow \forall x \in H: \|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$ .

*Beweis.* Mit den Identitäten

$$\forall x \in H: (Tx, Tx)_H = (T^*Tx, x)_H$$

sowie

$$\forall x \in H: (T^*x, T^*x)_H = (x, TT^*x)_H = \overline{(x, TT^*x)_H} = (TT^*x, x)_H$$

folgt “ $\Rightarrow$ ” unmittelbar.

“ $\Leftarrow$ ”: Die umgekehrte Richtung erhält man durch “Polarisieren”. Aus

$$\begin{aligned} \forall x, y \in H: \|T(x + y)\|_H^2 - \|T(x - y)\|_H^2 &= 4Re(Tx, Ty)_H = 4Re(T^*Tx, y)_H \\ &= \|T^*(x + y)\|_H^2 - \|T^*(x - y)\|_H^2 = 4Re(T^*x, T^*y)_H = 4Re(TT^*x, y)_H. \end{aligned}$$

ergibt sich zunächst

$$\forall x, y \in H: Re((T^*T - TT^*)x, y)_H = 0.$$

Da  $x, y \in H$  beliebig, folgt  $T^*T = TT^*$ .  $\square$

**Beispiel 6.7.1.** i) Falls  $T$  selbstadjungiert ist, so ist  $T$  normal.

ii) Falls  $T$  unitär ist, so ist  $T$  normal.

iii) Sei  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  mit  $|\lambda_k| \leq r < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l^2 = l^2_{\mathbb{C}}$ , und sei  $T: l^2 \rightarrow l^2$  definiert durch

$$T(a_1, a_2, \dots) = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots), \quad a = (a_1, a_2, \dots) \in l^2.$$

Dann gilt

$$T^*(a_1, a_2, \dots) = (\overline{\lambda_1} a_1, \overline{\lambda_2} a_2, \dots),$$

also

$$TT^*(a_1, a_2, \dots) = (|\lambda_1|^2 a_1, (|\lambda_2|^2 a_2, \dots) = T^*T(a_1, a_2, \dots),$$

und  $T$  ist normal. Weiter gilt  $T \in L(l^2)$  mit  $\|T\|_{L(l^2)} \leq r$ , und

$$T \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \lambda_k \in \mathbb{R};$$

$$T \text{ unitär} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}: |\lambda_k| = 1;$$

$$T \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lambda_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Beweis.** Wir zeigen nur die letzte Aussage. Nimm an,  $r_0 = \inf_{k \in \Lambda} |\lambda_k| > 0$  für eine Folge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$ . Dann gilt offenbar

$$B_{r_0}(0; Y) \subset T(B_1(0; X)),$$

wobei  $Y = \text{span}\{e_k; k \in \Lambda\}$  unendlich-dimensional ist. Also ist  $T$  nicht kompakt.

Falls hingegen  $\lambda_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so gilt auch  $\varepsilon_l := \sup_{k \geq l} |\lambda_k| \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Sei  $y^j = (y_k^j)_{k \in \mathbb{N}} = Tx^j$  mit  $\|x^j\|_{l^2} \leq 1$ , also auch  $\|y^j\|_{l^2} \leq r$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . OBdA dürfen wir annehmen, dass  $x^j = (x_k^j)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{w} x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ( $j \rightarrow \infty$ ), also auch  $x_k^j \rightarrow x_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Damit folgt aber auch  $y_k^j = \lambda_k x_k^j \rightarrow \lambda_k x_k = y_k$  ( $j \rightarrow \infty$ ) für jedes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = Tx \in l^2$ , und wir erhalten

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|y^j - y\|_{l^2} \leq \varepsilon_l \limsup_{j \rightarrow \infty} \|x^j - x\|_{l^2}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  liefert  $y^j \rightarrow y$  ( $j \rightarrow \infty$ ), und  $T$  ist kompakt.  $\square$

Schliesslich gilt

**Behauptung.**  $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}}$ .

**Beweis.** Offenbar gilt  $\lambda_k \in \sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $\sigma(T) = \overline{\sigma(T)}$ , folgt “ $\supset$ ”.

“ $\subset$ ”: Falls andererseits  $\lambda \notin \overline{\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}}$ , so existiert  $\delta > 0$  mit  $|\lambda - \lambda_k| > \delta$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und für  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$  mit

$$b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} := (\lambda - T)a = ((\lambda - \lambda_k)a_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

gilt

$$a_k = b_k / (\lambda - \lambda_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \|a\|_{l^2} \leq \delta^{-1} \|b\|_{l^2}.$$

Damit folgt  $(\lambda - T)^{-1} \in L(H)$ , und  $\lambda \in \rho(T)$ .  $\square$

**Satz 6.7.1.**  $T \in L(H)$  normal  $\Rightarrow \|T\|_{L(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = r_T$ .

**Beweis.** Wir zeigen induktiv, dass gilt

**Behauptung.**  $\forall n \in \mathbb{N}: \|T^n\|_{L(H)} = \|T\|_{L(H)}^n$ .

**Beweis.** Für  $n = 1$  ist die Aussage offensichtlich.

“ $n \rightarrow n + 1$ ”: Für  $x \in H$  mit  $\|x\|_H = 1$  folgt mit Bemerkung 6.7.1

$$\begin{aligned} \|T^n x\|_H^2 &= (T^n x, T^n x)_H = (T^* T^n x, T^{n-1} x)_H \leq \|T^*(T^n x)\|_H \|T^{n-1} x\|_H \\ &= \|T^{n+1} x\|_H \|T^{n-1} x\|_H \leq \|T^{n+1}\|_{L(H)} \|T^{n-1}\|_{L(H)}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T\|_{L(H)}^{2n} &= \|T^n\|_{L(H)}^2 = \sup_{x \in H, \|x\|_H=1} \|T^n x\|_H^2 \\ &\leq \|T^{n+1}\|_{L(H)} \|T^{n-1}\|_{L(H)} = \|T^{n+1}\|_{L(H)} \|T\|_{L(H)}^{n-1} \end{aligned}$$

also mit Satz 2.2.3

$$\|T\|_{L(H)}^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|_{L(H)} \leq \|T\|_{L(H)}^{n+1},$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

Mit Satz 6.5.3 erhalten wir nun

$$\|T\|_{L(H)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{L(H)}^{1/n} = r_T = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|,$$

wie gewünscht.  $\square$

**Satz 6.7.2.** (Riesz-Schauder) Sei  $0 \neq T \in L(H)$  kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt

i) es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte  $\lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , welche sich höchstens bei  $\lambda = 0$  häufen, und zugehörige orthonormale Eigenvektoren  $e_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\forall x \in H: Tx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k e_k(x, e_k)_H;$$

ii) wir erhalten die orthogonale Zerlegung

$$H = \ker(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}}.$$

**Bemerkung 6.7.2.**  $\ker(T)$  muss nicht separabel sein.

**Beweis von Satz 6.7.2.** i) Nach Beispiel 6.5.2 und Satz 6.7.1 gilt

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} \subset \overline{B_{r_0}(0)},$$

wobei  $r_0 = \|T\|_{L(H)} < \infty$ . Für  $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$  setze

$$X_\lambda = \ker(\lambda - T).$$

**Behauptung 1.**  $\forall \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}: \dim(X_\lambda) < \infty$ .

**Beweis.** Für jedes  $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$  ist  $\overline{\lambda B_1(0; X_\lambda)} = \overline{T(B_1(0; X_\lambda))}$  kompakt; nach Satz 2.1.4 also  $\dim(X_\lambda) < \infty$ .  $\square$

**Behauptung 2.**  $\forall r > 0: \sigma_p(T) \setminus B_r(0)$  ist endlich.

**Beweis.** Andernfalls existiert eine Folge  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \sigma_p(T)$  mit  $\lambda_k \rightarrow \lambda \neq 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), wobei  $\lambda_k \neq \lambda_l$  ( $k \neq l$ ). Seien  $e_k$  zugehörige normierte Eigenvektoren mit  $Te_k = \lambda_k e_k$ ,  $\|e_k\|_H = 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Aus

$$\lambda_k(e_k, e_l)_H = (Te_k, e_l)_H = (T^*e_k, e_l)_H = (e_k, Te_l)_H = \lambda_l(e_k, e_l)_H$$

folgt dann

$$(e_k, e_l)_H = 0 \quad (k \neq l). \quad (6.7.1)$$

Da  $T$  kompakt, enthält die Folge  $(Te_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. OBdA dürfen wir annehmen, dass

$$y_k := Te_k \rightarrow y \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit  $\lambda_k \rightarrow \lambda \neq 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) erhalten wir dann jedoch auch Konvergenz

$$e_k = \lambda_k^{-1}Te_k \rightarrow \lambda^{-1}y \quad (k \rightarrow \infty)$$

im Widerspruch zu (6.7.1).  $\square$

Da  $\sigma_p(T) \setminus B_{1/k}(0)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  nach Behauptung 2 endlich ist, ist  $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$  abzählbar. Mit (6.7.1) erhalten wir die Beziehung

$$\forall \lambda, \mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}: \lambda \neq \mu \Rightarrow X_\lambda \perp X_\mu.$$

Durch geeignete Normierung können wir erreichen, dass auch die Eigenvektoren  $e_k, e_l$  zu einem mehrfachen Eigenwert  $\lambda = \lambda_k = \lambda_l$  orthonormal sind, und wir erhalten eine höchstens abzählbare Schar orthonormaler Eigenvektoren  $e_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$X := \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} X_\lambda} = \overline{\text{span}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}}.$$

**Behauptung 3.** Jedes  $x \in X$  hat die Darstellung  $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x, e_k)_H e_k$ .

**Beweis.** Beachte, dass für die Partialsummen  $x_K = \sum_{k \leq K} (x, e_k)_H e_k$  der Reihe wegen Orthonormalität der  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gilt

$$\|x_K\|_H^2 = \sum_{k \leq K} |(x, e_k)_H|^2 = (x_K, x)_H \leq \|x_K\|_H \|x\|_H;$$

also

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |(x, e_k)_H|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \|x_K\|_H^2 \leq \|x\|_H^2 < \infty,$$

und

$$\|x_K - x_L\|_H^2 = \sum_{K < k \leq L} |(x, e_k)_H|^2 \rightarrow 0 \quad (K \leq L \rightarrow \infty).$$

Somit existiert  $y := \lim_{K \rightarrow \infty} x_K$ . Da weiter gilt  $(x - y, e_k)_H = 0$  für jedes  $k$ , und da  $x, y \in X = \overline{\text{span}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}}$ , folgt  $x = y = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x, e_k)_H e_k$ .  $\square$



Mit Behauptung 3 und Stetigkeit von  $T$  erhalten wir nun auch die gewünschte Identität

$$Tx = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x, e_k)_H T e_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k (x, e_k)_H e_k.$$

ii) Sei  $Y = X^\perp \subset H$ . Nimm an,  $Y \neq \{0\}$ . Wir zeigen:  $Y = \ker(T)$ .

**Behauptung 4.**  $T(Y) \subset Y$ .

**Beweis.** Für  $y \in Y$  gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: (e_k, Ty)_H = (T^* e_k, y)_H = (T e_k, y)_H = \lambda_k (e_k, y)_H = 0;$$

also  $Ty \in \text{span}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}^\perp = X^\perp = Y$ .  $\square$

Setze  $T_0 = T|_Y \in L(Y)$ . Dann ist  $T_0$  kompakt und selbstadjungiert; also

$$\sigma(T_0) \subset \sigma_p(T_0) \cup \{0\}.$$

Sei  $\lambda_0 \in \sigma_p(T_0)$  mit zugehörigem Eigenvektor  $0 \neq e_0 \in Y \subset H$  mit

$$T_0 e_0 = T e_0 = \lambda_0 e_0.$$

Dann ist  $\lambda_0 = 0$ , oder  $e_0 \in X_{\lambda_0} \subset X$ , und  $e_0 \in X \cap Y = \{0\}$ . Also  $\lambda_0 = 0$ , und Satz 6.7.1 ergibt

$$\|T_0\|_{L(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T_0)} |\lambda| = 0;$$

das heisst,  $Y = \ker(T)$ .  $\square$

**Bemerkung 6.7.3.** Falls  $T$  **positiv definit** ist im Sinne, dass gilt

$$\forall x \in H \setminus \{0\}: (x, Tx)_H > 0,$$

so ist  $\ker(T) = \{0\}$ , und es gilt  $\lambda > 0$  für jedes  $\lambda \in \sigma(T)$ . Die in absteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \dots$  erhält man dann mit dem **Courant-Fischerschen Minimax-Prinzip**:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \lambda_k = \sup_{M \subset H \text{ linear, } \dim M \geq k} \inf_{x \in M, \|x\|_H = 1} (x, Tx)_H =: \mu_k.$$

**Beweis.** “ $\lambda_k \leq \mu_k$ ”: Wähle  $M = M_k := \text{span}\{e_j; 1 \leq j \leq k\}$  mit

$$\begin{aligned} (x, Tx)_H &= (Tx, x)_H = \left( \sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j (x, e_j)_H e_j, x \right)_H = \sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j |(x, e_j)_H|^2 \\ &\geq \lambda_k \sum_{1 \leq j \leq k} |(x, e_j)_H|^2 = \lambda_k \|x\|_H^2 = \lambda_k. \end{aligned}$$

für alle  $x \in M$  mit  $\|x\|_H = 1$ .

“ $\lambda_k \geq \mu_k$ ”: Sei  $M \subset H$  linear mit  $\dim M \geq k$ . Nimm zunächst an, es gibt  $x_0 \in M$  mit  $\|x_0\|_H = 1$  und  $x_0 \perp M_k$ . Dann können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \inf_{x \in M, \|x\|_H = 1} (x, Tx)_H &\leq (x_0, Tx_0)_H = (Tx_0, x_0)_H = \left( \sum_{l > k} \lambda_l (x_0, e_l)_H e_l, x_0 \right)_H \\ &= \sum_{l > k} \lambda_l |(x_0, e_l)_H|^2 \leq \lambda_k \sum_{l > k} |(x_0, e_l)_H|^2 = \lambda_k \|x_0\|_H^2 = \lambda_k, \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt in diesem Fall.

Andernfalls ist  $\pi_k: M \rightarrow M_k$  bijektiv, wobei wir mit  $\pi_k$  die Einschränkung der orthogonalen Projektion  $H \rightarrow M_k$  auf  $M$  bezeichnen. Betrachte den Vektor  $x = \pi_k^{-1}e_k = e_k + y_k \in M$ , wobei  $y_k \perp M_k$ . Es gilt

$$\begin{aligned}(x, Tx)_H &= (e_k + y_k, Te_k + Ty_k)_H \\ &= (e_k, Te_k)_H + (y_k, Te_k)_H + (e_k, Ty_k)_H + (y_k, Ty_k)_H,\end{aligned}$$

wobei

$$(y_k, Te_k)_H = \lambda_k(y_k, e_k)_H = 0, \quad (e_k, Ty_k)_H = (Te_k, y_k)_H = 0,$$

und – wie eben gezeigt – mit

$$(y_k, Ty_k)_H \leq \lambda_k \|y_k\|_H^2;$$

das heisst,

$$(x, Tx)_H = (e_k, Te_k)_H + (y_k, Ty_k)_H \leq \lambda_k(1 + \|y_k\|_H^2) = \lambda_k \|x\|_H^2.$$

Es folgt

$$\inf_{x \in M, \|x\|_H=1} (x, Tx)_H = \inf_{x \in M, x \neq 0} \frac{(x, Tx)_H}{\|x\|_H^2} \leq \lambda_k.$$

□

**Teil II**

**Funktionalanalysis II**



# Kapitel 7

## Sobolev-Räume

### 7.1 Funktionalanalytische Zugänge zum Dirichlet-Problem

Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  offen, glatt berandet, und seien  $f, u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Wir suchen eine Lösung  $u$  des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (7.1.1)$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (7.1.2)$$

**Bemerkung 7.1.1.** Ersetze  $u$  durch  $v = u - u_0$ . Dann geht (7.1.1) über in die Gleichung

$$-\Delta v = -\Delta u + \Delta u_0 = f + \Delta u_0 =: g \quad \text{in } \Omega$$

mit der homogenen Dirichlet-Randbedingung

$$v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

anstelle von (7.1.2). Im Folgenden nehmen wir daher stets an  $u_0 \equiv 0$ .

Zur Lösung von (7.1.1), (7.1.2) bieten die zuvor behandelten Methoden zwei mögliche Ansätze, zum einen via Banach's "Closed range theorem", Satz 6.2.1, zum anderen mit dem Riesz'schen Darstellungssatz, Satz 4.3.2.

#### 7.1.1 Lösung mittels Banach's closed range theorem

Deute (7.1.1),(7.1.2) als Gleichung  $Au = f$  für eine geeignete Erweiterung  $A: D_A \subset X \rightarrow X$  des Laplace-Operators mit einem geeigneten Funktionenraum  $C_c^\infty(\Omega) \subset D_A \subset X$ , wobei  $Au = -\Delta u$  für  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  und  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  für alle  $u \in D_A$ . Idealerweise wählen wir für  $X$  einen Hilbertraum  $X = H$  und  $D_A$  so, dass  $A$  selbstadjungiert ist. Dies ist in der Tat möglich.

Wähle  $X = L^2(\Omega)$ ,  $D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}); u|_{\partial\Omega} = 0\}$  und setze  $Au = -\Delta u$  für  $u \in D_A$ . Dann gilt:

**Behauptung 1.**  $A$  ist symmetrisch.

**Beweis.** Für  $u, v \in D_A$  erhalten wir nach partieller Integration

$$(Au, v)_{L^2} = \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} u(-\Delta v) \, dx = (u, Av)_{L^2}$$

wobei wir für die partielle Integration die Gleichung

$$\operatorname{div}(u\nabla v - v\nabla u) = u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u$$

und den Satz von Gauss angewendet haben.  $\square$

Nach Satz 3.4.2 ist  $A$  abschliessbar mit  $\Gamma_{\bar{A}} = \overline{\Gamma_A}$  und

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\Omega); \exists (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_A : \\ u_k \rightarrow u, Au_k \rightarrow f =: \bar{A}u \text{ in } L^2(\Omega) (k \rightarrow \infty)\}.$$

**Behauptung 2.**  $\bar{A}$  ist selbstadjungiert.

**Beweis.** Mit  $A$  ist auch  $\bar{A}$  symmetrisch: Seien  $u, v \in D_{\bar{A}}, (u_k)_{k \in \mathbb{N}}, (v_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset D_A$  mit

$$u_k \rightarrow u, -\Delta u_k = f_k \rightarrow f = \bar{A}u, v_l \rightarrow v, -\Delta v_l = g_l \rightarrow g = \bar{A}v$$

in  $L^2(\Omega)$  ( $k, l \rightarrow \infty$ ). Mit Behauptung 1 folgt

$$(\bar{A}u, v)_{L^2} = \lim_{k, l \rightarrow \infty} (Au_k, v_l)_{L^2} = \lim_{k, l \rightarrow \infty} (u_k, Av_l)_{L^2} = (u, \bar{A}v)_{L^2}.$$

**Lemma 7.1.1.** Sei  $v \in L^2(\Omega)$  und es gelte für alle  $u \in D_{\bar{A}}$  die Abschätzung

$$|(v, \bar{A}u)_{L^2}| = \left| \int_{\Omega} v \bar{A}u \, dx \right| \leq C \cdot \|u\|_{L^2}$$

mit einer von  $u$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Dann folgt  $v \in D_{\bar{A}}$ .

**Beweis.** Siehe Lemma 7.5.2 für den Fall  $n = 1$ , bzw. Lemma 9.4.2 für  $n \geq 1$ .  $\square$

Offenbar gilt

$$D_{\bar{A}^*} = \{v \in L^2(\Omega); D_{\bar{A}} \ni u \mapsto (v, \bar{A}u)_{L^2} \text{ ist stetig auf } L^2(\Omega) \text{ fortsetzbar}\} \\ = \{v \in L^2(\Omega); \exists C \in \mathbb{R} : |(v, \bar{A}u)_{L^2}| \leq C \cdot \|u\|_{L^2}\}.$$

Lemma 7.1.1 ergibt also  $D_{\bar{A}^*} = D_{\bar{A}}$ ; das heisst,  $\bar{A}$  ist selbstadjungiert.  $\square$

**Satz 7.1.1.** *i)  $\operatorname{im}(\bar{A})$  ist abgeschlossen;*

*ii)  $\ker(\bar{A}) = \{0\}$ .*

**Folgerung 7.1.1.** Zusammen mit Satz 6.2.1 liefert Satz 7.1.1 für jedes  $f \in L^2(\Omega)$  eine Lösung  $u \in D_{\bar{A}}$  der Gleichung  $\bar{A}u = f$ . Wir können  $u$  ansehen als eine "verallgemeinerte Lösung" von (7.1.1), (7.1.2).

Zum Beweis von Satz 7.1.1 benötigen wir das folgende Resultat.

**Lemma 7.1.2. (Poincaré)** Sei  $\Omega \subset ]0, L[ \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Für  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt dann die Abschätzung

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq L^2 \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

**Beweis.** Setze  $u$  fort durch  $u(x) = 0$  für  $x \notin \Omega$ . Für  $x = (x_1, x') \in \Omega$  schätze ab

$$\begin{aligned} |u(x_1, x')|^2 &= \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(s, x') ds \right|^2 \\ &\leq \left( \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(s, x') \right| ds \right)^2 \leq L \int_0^L |\nabla u(s, x')|^2 ds. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^L |u(x_1, x')|^2 dx_1 dx' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} L^2 \int_0^L |\nabla u(s, x')|^2 ds dx' \leq L^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

□

**Beweis von Satz 7.1.1.** i) Seien  $(u_k) \subset D_{\bar{A}}$  mit  $\bar{A}u_k =: f_k \rightarrow f$  in  $L^2(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

ObdA dürfen wir annehmen, dass  $u_k \in D_A$ . (Betrachte sonst Folgen  $(u_{kl}) \subset D_A$  mit  $u_{kl} \rightarrow u_k$ ,  $Au_{kl} \rightarrow Au_k = f_k$  in  $L^2$  ( $l \rightarrow \infty$ ) für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und ersetze  $u_k$  durch  $\tilde{u}_k = u_{kl(k)}$  für geeignetes  $l(k)$ ).

Somit gilt  $u_k \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $Au_k = -\Delta u_k \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $u_k = 0$  auf  $\partial\Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und mit Lemma 7.1.2 und partieller Integration unter Verwendung der Gleichung  $\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u_k - u_l\|_{L^2}^2 &\leq L^2 \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^2}^2 = L^2 \int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_l)|^2 dx \\ &= L^2 \int_{\Omega} \underbrace{|-\Delta(u_k - u_l)|}_{=f_k - f_l} (u_k - u_l) dx \leq L^2 \|f_k - f_l\|_{L^2} \cdot \|u_k - u_l\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|u_k - u_l\|_{L^2} \leq C \|f_k - f_l\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty).$$

Also ist  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$  Cauchy-Folge und es existiert  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ .

Mit  $u_k \rightarrow u$ ,  $Au_k = f_k \rightarrow f$  in  $L^2$  ( $k \rightarrow \infty$ ) folgt  $u \in D_{\bar{A}}$  und  $f = \bar{A}u$ ; das heisst,  $\operatorname{im} \bar{A}$  ist abgeschlossen.

ii) Sei  $u \in D_{\bar{A}}$  mit  $\bar{A}u = 0$ . Wie in i) wähle  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_A$  mit  $u_k \rightarrow u$ ,  $Au_k = -\Delta u_k \rightarrow 0$  in  $L^2$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit Lemma 7.1.2 folgt

$$\|u_k\|_{L^2} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^2}^2 = C \int_{\Omega} (-\Delta u_k) u_k dx \leq o(1) \cdot \|u_k\|_{L^2},$$

wobei  $o(1) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ); also  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0 \in L^2(\Omega)$ .

□

Zu  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$  finden wir also stets eine “verallgemeinerte Lösung”  $u \in D_{\bar{A}}$  von (7.1.1), (7.1.2). Es bleiben jedoch einige wichtige Fragen offen.

**Fragen:** Was ist  $D_{\bar{A}}$ ? – Wie berechnet man allenfalls  $u$ ? (Beachte, dass wir Satz 6.2.1 indirekt bewiesen haben, der Beweis also nicht konstruktiv ist.) – Ist  $u$  auch eine klassische Lösung von (7.1.1), (7.1.2), allenfalls sogar “glatt”, also  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , falls  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ? – Erfüllt eine “verallgemeinerte Lösung” auch die Randbedingung (7.1.2)? – Wie beweist man Lemma 7.1.1?

### 7.1.2 Lösung mittels Rieszschem Darstellungssatz

Sei  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  Lösung von (7.1.1), (7.1.2), und sei  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  eine “Testfunktion”. Nach partieller Integration erhalten wir aus (7.1.1) die Gleichung

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Wir deuten die linke Seite als Skalarprodukt. Setze dazu

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Wegen Lemma 7.1.2 gilt

$$\forall u \in C_c^\infty(\Omega): \|u\|_{L^2} \leq C \cdot \|u\|_{H_0^1};$$

also ist  $\|\cdot\|_{H_0^1}$  eine Norm auf  $C_c^\infty(\Omega)$ . Definiere

$$H_0^1(\Omega) = \|\cdot\|_{H_0^1} - \text{clos}(C_c^\infty(\Omega)).$$

Dann ist  $H_0^1(\Omega)$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

wie gewünscht, wobei wir für  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$  in  $H_0^1(\Omega)$  mit  $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$  setzen

$$\nabla u := \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla u_k \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Weiter lässt sich wegen  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  für jedes  $f \in L^2(\Omega)$  die Abbildung  $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f \varphi \, dx$  stetig erweitern zu  $l \in (H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega)$ . Mit Satz 4.3.2 folgt

**Satz 7.1.2.** Für alle  $f \in L^2(\Omega)$  gibt es genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (7.1.3)$$



**Definition 7.1.1.** Ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit (7.1.3) heisst **schwache Lösung der Klasse  $H_0^1$**  von (7.1.1), (7.1.2).

Wie bei unserem ersten Lösungsansatz bleiben zunächst einige Fragen ungeklärt.

**Fragen:** Ist eine schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine (allenfalls sogar "glatte") klassische Lösung von (7.1.1), (7.1.2)? – Was bedeutet  $\nabla u$  für  $u \in H_0^1(\Omega)$ ? – In welchem Sinne ist die Randbedingung (7.1.2) erfüllt?

Um Antwort auf diese Fragen zu geben, müssen wir zunächst den Ansatzraum  $H_0^1(\Omega)$  besser verstehen und uns dann der Regularitätstheorie zuwenden.

## 7.2 Distributionsableitung, schwache Ableitung, Sobolev - Räume

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

**Definition 7.2.1.** i) Die lineare Abbildung

$$C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

definiert die **Distributionsableitung**  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

ii) Analog definiert für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  mit den Notationen

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

die Abbildung

$$C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx$$

die **Distributionsableitung**  $D^\alpha u$  von  $u$ .

Beachte, dass die Distributionsableitung eine *Abbildung* ist. Wir verwenden jedoch dasselbe Symbol wie für die Ableitungsfunktion, sofern diese existiert.

**Definition 7.2.2.** i) Die Funktion  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  hat eine **schwache Ableitung**  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  in  $L^p(\Omega)$ , falls  $g_i \in L^p(\Omega)$  existiert mit

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \int_{\Omega} g_i \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

In diesem Fall sagen wir: "Die Distributionsableitung  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  wird durch die Funktion  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \in L^p(\Omega)$  dargestellt."

ii) Für beliebige  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  heisst  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , falls  $g_\alpha \in L^p(\Omega)$  existiert mit

$$\int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx.$$

**Bemerkung 7.2.1.** Wegen Satz 3.4.3 ist die schwache Ableitung (sofern sie existiert) eindeutig bestimmt.

**Beispiel 7.2.1.** i) Falls  $u \in C^k(\Omega)$ , so ist für  $|\alpha| \leq k$  die klassische Ableitung  $D^\alpha u$  auch schwache Ableitung in  $L_{loc}^\infty(\Omega)$ .

ii) Sei  $\Omega = I = ]-1, 1[$ . Für  $u(x) = \max\{0, x\}$  gilt  $u' = \chi_{]0, 1[} \in L^\infty(I)$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} - \int_I u \varphi' dx &= - \int_0^1 x \varphi'(x) dx = \underbrace{-(x\varphi(x))\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \int_0^1 \varphi dx \\ &= \int_I \chi_{]0, 1[} \varphi dx. \end{aligned}$$

□

iii) Allgemein besitzt jede absolut stetige Funktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine schwache Ableitung  $u' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ ; vergleiche dazu Abschnitt 7.3.

iv) Sei  $u = \chi_{]0, \infty[}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann hat  $u$  die Distributionsableitung  $\delta_0: f \mapsto f(0)$ ; das heisst,  $u$  besitzt *keine* schwache Ableitung  $u' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ .

**Beweis.** Für  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  gilt

$$- \int_{\mathbb{R}} u \varphi' dx = - \int_0^\infty \varphi' dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

□

v) Sei  $u: ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  die Cantor-Lebesgue-Funktion mit  $u' = 0$  punktweise fast überall. Jedoch erhalten wir

$$\int_0^1 u \varphi_k' dx \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty),$$

falls wir  $\varphi_k \in C_c^\infty(]0, 1[)$  geeignet wählen mit  $\varphi_k \rightarrow \chi_{]0, 1[}$  ( $k \rightarrow \infty$ ); also verschwindet die Distributionsableitung  $u'$  nicht!

vi) Sei  $v \in L^2(\Omega)$ , und es gelte analog zu Lemma 7.1.1 die Bedingung

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega): \left| \int_\Omega v \Delta \varphi dx \right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^2}.$$

Dann definiert die Distributionsableitung

$$\Delta v: C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega v \Delta \varphi dx$$

ein Funktional  $l \in (L^2(\Omega))^*$ . Nach Satz 4.3.2 gibt es  $f \in L^2(\Omega)$  mit

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega): l(\varphi) = (f, \varphi)_{L^2},$$

und wir erhalten

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \int_\Omega f \varphi dx = l(\varphi) = \int_\Omega v \Delta \varphi dx;$$

das heisst,  $\Delta v = f \in L^2(\Omega)$ .

**Definition 7.2.3. (Sobolev-Räume)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $1 \leq p \leq \infty$ . Setze

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Weiter sei

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{1,p}} - \text{clos}(C_c^\infty(\Omega)).$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$W^{1,2}(\Omega) =: H^1(\Omega), \quad W_0^{1,2}(\Omega) =: H_0^1(\Omega).$$

Analog sei für  $k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Wieder setzen wir

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{k,p}} - \text{clos}(C_c^\infty(\Omega)), \quad W_{(0)}^{k,2}(\Omega) = H_{(0)}^k(\Omega).$$

**Bemerkung 7.2.2.** i) Falls  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ , so folgt mit Hölder

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \text{ also auch } W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Dabei und auch im Folgenden bezeichnet das Symbol  $\hookrightarrow$  eine topologische (also stetige) und algebraische (homomorphe) Einbettung (häufig sogar Inklusion).

ii) Für  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  definiert wegen Lemma 7.1.2 der Ausdruck

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

eine zur  $H^1$ -Norm äquivalente Norm auf  $H_0^1(\Omega)$ .

iii) Allgemein gilt analog zu Lemma 7.1.2 für  $1 \leq p < \infty$  und  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^p \, dx &\leq \int_{\Omega} \left( \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \, dx_1 \right)^p \, dx \\ &\leq L \cdot L^{p-1} \int_{\Omega} \int_0^L |\nabla u|^p \, dx_1 \, dx' = L^p \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx. \end{aligned}$$

Folglich sind für  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  die durch  $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_{L^p}$  für  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  definierte Norm und die  $W^{1,p}$ -Norm auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$  äquivalent.

**Satz 7.2.1.** Der Raum  $W^{1,p}(\Omega)$  ist

- i) vollständig für  $1 \leq p \leq \infty$ ,
- ii) separabel für  $1 \leq p < \infty$ ,
- iii) und reflexiv für  $1 < p < \infty$ .

**Beweis.** i) Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$  eine Cauchy-Folge. Dann sind  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\frac{\partial u}{\partial x_i})_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen in  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Da der Raum  $L^p(\Omega)$  vollständig ist, existieren  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ ,  $g_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Behauptung 1.**  $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Beweis.** Für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_i \varphi \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi \, dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx. \end{aligned}$$

□

Somit folgt  $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), wie gewünscht.

ii) Die Einbettung

$$i : W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$$

ist isometrisch. Nach Beispiel 5.2.1.iii) ist  $L^p(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$  separabel, nach Satz 5.2.1 daher auch  $i(W^{1,p}(\Omega))$ . Da  $i$  isometrisch, ist also auch  $W^{1,p}(\Omega)$  separabel.

iii) Nach i) ist  $i(W^{1,p}(\Omega)) =: Y$  ein abgeschlossener linearer Unterraum von  $X := (L^p(\Omega))^{n+1}$ . Für  $1 < p < \infty$  ist  $X$  nach Beispiel 5.1.2.iii) reflexiv, nach Satz 5.1.3 dann auch  $Y$ , also auch  $W^{1,p}(\Omega)$ .

□

**Bemerkung 7.2.3.** Insbesondere ist  $H^1(\Omega)$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Analog für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ .

**Fragen:** Wann existiert mit der schwachen Ableitung auch eine punktweise Ableitung? – Was kann man über die Randwerte von Sobolev-Funktionen sagen?

### 7.3 Sobolev-Räume auf einem Intervall

Sei  $I = ]a, b[$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Im folgenden legen wir stets das Lebesguesche Mass zugrunde.

**Satz 7.3.1.** *i) Sei  $u \in W^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann existiert  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  mit  $u = \tilde{u}$  fast überall, und für  $x_0, x \in I$  gilt*

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t) dt.$$

*Insbesondere ist  $\tilde{u}$  absolut stetig und punktweise fast überall differenzierbar mit  $\tilde{u}'(x) = u'(x)$  für fast alle  $x \in I$ .*

*ii) Falls umgekehrt  $u \in C(I)$  absolut stetig ist, so gilt  $u \in W_{loc}^{1,1}(I)$ , und die fast überall definierte Ableitung stimmt überein mit der schwachen Ableitung  $u'$ . Falls  $u, u' \in L^p(I)$ , so gilt  $u \in W^{1,p}(I)$ .*

**Notation:** Im Folgenden identifizieren wir eine Funktion  $u \in W^{1,p}(I)$  meist mit ihrem stetigen Repräsentanten  $\tilde{u}$ .

**Lemma 7.3.1. (du Bois-Reymond)** *Sei  $f \in L_{loc}^1(I)$  mit*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): \int_I f \varphi' dx = 0.$$

*Dann gilt  $f \equiv c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Bemerkung 7.3.1.** Lemma 7.3.1 sagt aus, dass  $f$  konstant sein muss, falls die Distributionsableitung von  $f$  verschwindet, analog zum Fall  $f \in C^1(I)$ .

**Beweis.** i) Sei  $v \in C_c^\infty(I)$  mit  $\int_I v dx = 0$ . Dann gilt  $v = \varphi'$  für die Funktion

$$\varphi(x) = \int_a^x v(t) dt \in C_c^\infty(I).$$

ii) Sei  $w \in C_c^\infty(I)$  nun beliebig. Fixiere  $\psi \in C_c^\infty(I)$  mit  $\int_I \psi dx = 1$  und setze  $v = w - c_0 \psi$ , wobei  $c_0 \in \mathbb{R}$  so gewählt ist, dass

$$\int_I v dx = \int_I w dx - c_0 \int_I \psi dx = 0;$$

das heisst,  $c_0 = \int_I w dx$ . Nach i) gilt  $v = \varphi'$  für ein  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ , also

$$0 = \int_I f v dx = \int_I f w dx - c_0 \int_I f \psi dx = \int_I (f - c) w dx$$

mit  $c = \int_I f \psi dx$ . Da  $w \in C_c^\infty(I)$  beliebig war, folgt  $f \equiv c$ . □

**Lemma 7.3.2.** *Sei  $g \in L^1(I)$ ,  $x_0 \in I$ . Dann ist die Funktion*

$$v(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

*absolut stetig und von der Klasse  $W_{loc}^{1,1}(I)$  mit schwacher Ableitung  $v' = g$ .*

**Beweis.** Absolute Stetigkeit von  $v$  folgt aus Sätzen der Analysis III. Wir zeigen

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): \int_I g \varphi \, dx = - \int_I v \varphi' \, dx.$$

Sei  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ . Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_I v \varphi' \, dx &= \int_a^b \left( \int_{x_0}^x g(t) \, dt \right) \varphi'(x) \, dx \\ &= - \int_a^{x_0} \left( \int_x^{x_0} g(t) \varphi'(x) \, dt \right) dx + \int_{x_0}^b \left( \int_{x_0}^x g(t) \varphi'(x) \, dt \right) dx \\ &= - \int_a^{x_0} \left( \int_a^t g(t) \varphi'(x) \, dx \right) dt + \int_{x_0}^b \left( \int_t^b g(t) \varphi'(x) \, dx \right) dt \\ &= - \int_a^{x_0} g(t) \varphi(t) \, dt - \int_{x_0}^b g(t) \varphi(t) \, dt = - \int_a^b g(t) \varphi(t) \, dt, \end{aligned}$$

wie gewünscht.  $\square$

**Beweis von Satz 7.3.1.** i) Sei  $u \in W^{1,p}(I)$ , und sei  $x_0 \in I$  ein Lebesgue-Punkt von  $u$ . Setze

$$v(x) = \int_{x_0}^x u'(t) \, dt.$$

Nach Lemma 7.3.2 ist  $v$  absolut stetig und  $v \in W_{loc}^{1,1}(I)$  mit schwacher Ableitung  $v' = u' \in L^p(I)$ . Setze  $f = u - v \in L_{loc}^1(I)$  mit

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): \int_I f \varphi' \, dx = \int_I u \varphi' \, dx - \int_I v \varphi' \, dx = 0.$$

Mit Lemma 7.3.1 folgt  $f \equiv c$  fast überall, also  $u(x) = v(x) + c$  fast überall, wobei  $c = u(x_0) - v(x_0) = u(x_0)$ .

ii) Sei  $u \in C(I)$  absolut stetig. Dann gilt nach Korollar III.5.3.1

$$\forall x, x_0 \in I: u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t) \, dt$$

mit der punktweise fast überall definierten Ableitung  $u' \in L_{loc}^1(I)$ . Nach Lemma 7.3.2 hat  $u$  die schwache Ableitung  $u'$ .  $\square$

**Satz 7.3.2.** Sei  $1 < p \leq \infty$ , und sei  $u \in L^p(I)$ . Es sind äquivalent:

i)  $u \in W^{1,p}(I)$ ;

ii) es gibt  $C \geq 0$  mit

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): \left| \int_I u \varphi' \, dx \right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^q}, \text{ wobei } q = \frac{p}{p-1};$$

iii) mit einer Konstanten  $C \geq 0$  gilt für alle  $I' \subset\subset I$  und  $|h| < \text{dist}(I', \partial I)$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} \leq C \cdot |h|,$$

wobei  $\tau_h u(x) = u(x+h)$ .

**Bemerkung 7.3.2.** i) Der Beweis zeigt, dass man  $C = \|u'\|_{L^p}$  in ii), iii) wählen kann.

ii) Die Funktion  $u = \chi_{]0,1[}$  erfüllt ii) und iii) mit  $p = 1, q = \infty$ , aber  $u \notin W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R})$ .

iii) Es gelten jedoch auch im Falle  $p = 1$  die Aussagen "i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Leftrightarrow$  iii)". (Übung)

iv) Für  $p = \infty$  liefert Satz 7.3.2 die Äquivalenz:

$$u \in W^{1,\infty}(I) \Leftrightarrow u \text{ Lipschitz stetig.}$$

**Beweis von Satz 7.3.2.** Wir zeigen "i)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  i)".

"i)  $\Rightarrow$  iii)": Sei  $I' \subset\subset I, |h| < \text{dist}(I', \partial I)$ . Nach Satz 7.3.1 gilt für alle  $x \in I'$

$$\tau_h u(x) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt = h \cdot \int_0^1 u'(x+ht) dt,$$

und die Behauptung folgt, falls  $p = \infty$ . Falls  $p < \infty$ , so ergibt die Höldersche Ungleichung

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \left( \int_0^1 |u'(x+ht)| dt \right)^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+ht)|^p dt,$$

und mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^p(I')}^p &\leq |h|^p \int_{I'} \int_0^1 |u'(x+ht)|^p dt dx \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \int_{I'} |u'(x+ht)|^p dx dt \leq |h|^p \int_I |u'(x)|^p dx = |h|^p \|u'\|_{L^p(I)}^p. \end{aligned}$$

"iii)  $\Rightarrow$  ii)": Sei  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ . Wähle  $I' \subset\subset I$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset I'$ . Für  $|h| < \text{dist}(I', \partial I)$  liefert die Höldersche Ungleichung die Abschätzung

$$A := \int_I \underbrace{(u(x+h) - u(x))}_{=\tau_h u - u \in L^p} \varphi(x) dx \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} \cdot \|\varphi\|_{L^q(I')}.$$

Andererseits gilt nach Substitution  $y = x + h$

$$A = \int_I (u(y)\varphi(y-h) - u(y)\varphi(y)) dy = - \int_I u(y)(\varphi(y) - \varphi(y-h)) dy.$$

Nach Division durch  $|h|$  und Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  folgt mit Annahme iii) die Abschätzung

$$\left| \int_I u \varphi' dx \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_I u(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} dx \right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^q(I)}$$

mit einem von  $\varphi$  unabhängigen  $C \in \mathbb{R}$ .

"ii)  $\Rightarrow$  i)": Falls ii) gilt, so kann man die Abbildung

$$C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto \int_I u \varphi' dx$$

stetig zu  $l \in (L^q(I))^*$  erweitern. Da  $p > 1$ , also  $q < \infty$ , gibt es nach Satz 4.4.1 ein  $g \in L^p(I)$  mit

$$\forall \varphi \in L^q(I): l(\varphi) = - \int_I g \varphi \, dx ;$$

insbesondere

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): \int_I u \varphi' \, dx = l(\varphi) = - \int_I g \varphi \, dx ;$$

das heisst,  $g \in L^p(I)$  ist schwache Ableitung von  $u$ . □

**Satz 7.3.3.** Sei  $I = ]a, b[$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Es gibt einen stetigen, linearen Fortsetzungsoperator  $E: W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$  mit den Eigenschaften

i)  $(Eu)|_I = u$ ,

ii)  $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(I)}$ ,

iii)  $\|(Eu)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)}$

für alle  $u \in W^{1,p}(I)$ .

**Bemerkung 7.3.3.**  $C = C(I)$ ,  $E = E(I)$  sind unabhängig von  $p$ .

**Beweis.** a) Sei zunächst  $I = ]0, \infty[ = \mathbb{R}_+$ . Für  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$  setze

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \geq 0, \\ u(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \text{sowie} \quad g(x) = \begin{cases} u'(x), & x > 0, \\ -u'(-x), & x < 0. \end{cases}$$

wobei wir  $u$  bei  $x = 0$  gemäss Satz 7.3.1 stetig ergänzen. Dann sind  $v, g \in L^p(\mathbb{R})$  mit

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}, \quad \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u'\|_{L^p(\mathbb{R}_+)},$$

und offenbar gilt  $v|_{\mathbb{R}_+} = u$ .

**Behauptung 1.**  $g$  ist schwache Ableitung von  $v$ .

**Beweis.** Nach Satz 7.3.1 gilt für fast alle  $x > 0$

$$v(x) = u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) \, dt = v(0) + \int_0^x g(s) \, ds,$$

sowie für  $x < 0$

$$\begin{aligned} v(x) &= u(-x) = u(0) + \int_0^{-x} u'(t) \, dt \\ &\stackrel{(s=-t)}{=} u(0) + \int_0^x (-u'(-s)) \, ds = v(0) + \int_0^x g(s) \, ds. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.3.1.ii) oder Lemma 7.3.2 folgt  $g = v'$ . □

b) Sei  $I$  beschränkt, OBdA sei  $I = ]0, 1[$ . Fixiere eine "Abschneidefunktion"  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $0 \leq \eta \leq 1$  und so, dass

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{4}, \\ 0, & x > \frac{3}{4}, \end{cases} \quad |\eta'| \leq 3.$$



Für  $u \in W^{1,p}(I)$  setze  $u_1 = u\eta$ ,  $u_2 = u(1 - \eta)$  mit  $u = u_1 + u_2$ . Offenbar gilt  $u_1, u_2 \in L^p(I)$  mit

$$\|u_1\|_{L^p}, \|u_2\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}.$$

**Behauptung 2.**  $u_1 \in W^{1,p}(I)$  mit  $u_1' = u'\eta + u\eta' \in L^p(I)$ , da  $u'\eta, u\eta' \in L^p$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ . Beachte

$$(\eta\varphi)' = \eta'\varphi + \eta\varphi'.$$

Mit Definition 7.2.2 folgt

$$\int_I (u_1\varphi' + (u'\eta + u\eta')\varphi) dx = \int_I (u \underbrace{(\eta\varphi' + \eta'\varphi)}_{=(\eta\varphi)'} + u'(\eta\varphi)) dx = 0.$$

□

Setze  $u_1$  fort durch  $u(x) = 0$  für  $x \geq 1$  zu  $u_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$  mit

$$\|u_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Mit a) folgt die Behauptung. Analog erhalten wir  $u_2 \in W^{1,p}(-\infty, 1])$  mit

$$\|u_2\|_{W^{1,p}(-\infty, 1])} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}.$$

□

**Satz 7.3.4.** Sei  $u \in W^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann gibt es  $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit

$$\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Bemerkung 7.3.4.** i) Insbesondere liegt für beschränktes  $I$  der Raum  $C^\infty(\bar{I})$  dicht in  $W^{1,p}(I)$ , falls  $1 \leq p < \infty$ . (Beachte, dass  $\{u|_I; u \in C_c^\infty(\mathbb{R})\} \subset C^\infty(\bar{I})$ .)

ii) Für  $I = \mathbb{R}$  liegt  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dicht in  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ ; das heisst,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \|\cdot\|_{W^{1,p}} - \text{clos}(C_c^\infty(\mathbb{R})) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq p < \infty.$$

iii) Ein analoges Resultat gilt für  $W^{k,p}(I)$  für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ .

iv) Für  $p = \infty$  ist die Aussage des Satzes falsch, da für  $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,\infty}(I)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) stets folgt  $u \in C^1$ .

Zum Beweis von Satz 7.3.4 genügt es,  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  zu betrachten. (Sonst betrachte  $\tilde{u} = Eu$  gemäss Satz 7.3.3.) Wir können dann  $u$  durch Faltung mit einem "regularisierenden Kern" (oder "mollifier") glätten; vergleiche Analysis III.4.2.

**Repetition: Faltung auf  $\mathbb{R}^n$ .** Seien  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(x-z) dz \\ &= (g * f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

mit

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}, \quad 1 \leq p \leq \infty; \quad (7.3.2)$$

vergleiche Korollar III.4.2.1. Falls  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , so gilt  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y) \right) g(y) dy = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x); \quad (7.3.3)$$

analog

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \left( f * \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)(x),$$

falls auch  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt  $g * h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(g * h) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{g(x-y)h(y)}_{\tilde{g}(y-x)} dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f * \tilde{g}) h dy \quad (7.3.4)$$

mit  $\tilde{g}(x) = g(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sei nun  $0 \leq \rho \in C_c^\infty(B_1(0))$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1.$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  setze  $\rho_k(x) = k^n \rho(kx) \in C_c^\infty(B_{1/k}(0))$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(kx) d(kx) = 1.$$

**Lemma 7.3.3.** Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Beweis.** Zu  $\varepsilon > 0$  wähle eine Treppenfunktion  $f_0$  mit kompaktem Träger und mit  $\|f - f_0\|_{L^p} < \varepsilon$ . Betrachte die Folge  $f_k = \rho_k * f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit

$$\text{supp}(f_k) \subset \bigcup_{y \in \text{supp}(f_0)} B_{1/k}(y) \subset B_{R_0}(0)$$

für ein  $R_0 > 0$ . Beachte

$$|(f_k - f_0)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_0(x-y) - f_0(x)| \rho_k(y) dy \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

an jedem Lebesgue-Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  von  $f_0$  (und damit fast überall in  $\mathbb{R}^n$ ). Da zudem für Lebesgue-messbare Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  gleichmässig in  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_A |f_k(x)|^p dx &\leq \int_A \int_{\mathbb{R}^n} |f_0(x-y)|^p \rho_k(y) dy dx \\ &\leq \sup_{|y| \leq 1/k} \int_A |f_0(x-y)|^p dx \rightarrow 0, \quad \text{falls } \mathcal{L}^n(A) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ergibt der Satz von Vitali Konvergenz  $\|f_k - f_0\|_{L^p} \rightarrow 0$ , mit (7.3.2) also

$$\begin{aligned} \|\rho_k * f - f\|_{L^p} &\leq \|\rho_k * (f - f_0)\|_{L^p} + \|\rho_k * f_0 - f_0\|_{L^p} + \|f_0 - f\|_{L^p} \\ &\leq \|\rho_k\|_{L^1} \|f - f_0\|_{L^p} + \|f_k - f_0\|_{L^p} + \varepsilon \leq 2\varepsilon + o(1), \end{aligned}$$

wobei  $o(1) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $\square$

Die Aussage von Lemma 7.3.3 ergibt sich auch aus dem Differentiationssatz von Lebesgue, siehe Analysis III, Satz 5.1.1, zusammen mit dem Satz von Vitali, siehe Analysis III, Satz 3.4.1.

**Beweis von Satz 7.3.4.** Sei  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze  $v_k = \rho_k * u$ , wobei  $\rho_k(x) = k\rho(kx)$  für ein  $0 \leq \rho \in C_c^\infty(-1, 1]$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx = 1$  wie oben.

**Behauptung 1.**  $v_k \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  mit  $v_k' = \rho_k * u' \in L^p(\mathbb{R})$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Mit (7.3.3), (7.3.4) und mit  $\tilde{\rho}_k(x) = \rho_k(-x)$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v_k \varphi' \, dx &= \int_{\mathbb{R}} (\rho_k * u) \varphi' \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(\varphi' * \tilde{\rho}_k) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(\varphi * \tilde{\rho}_k)' \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u'(\varphi * \tilde{\rho}_k) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} (\rho_k * u') \varphi \, dx. \end{aligned}$$

$\square$

Mit Lemma 7.3.3 folgt

$$\|v_k - u\|_{L^p} + \|v_k' - u'\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

das heisst,  $\|v_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Schliesslich sei  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ , mit

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  setze  $\eta_k(x) = \eta(x/k)$ ,  $u_k = \eta_k v_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $u_k' = \eta_k' v_k + \eta_k v_k'$ . Schreibe

$$\begin{aligned} u_k - u &= \eta_k(v_k - u) + \eta_k u - u, \\ u_k' - u' &= \eta_k(v_k' - u') + \eta_k' v_k + \eta_k u' - u'. \end{aligned}$$

Da  $\eta_k u \rightarrow u$ ,  $\eta_k u' \rightarrow u'$  punktweise, folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\|\eta_k u - u\|_{L^p} + \|\eta_k u' - u'\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Mit  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\|\eta_k'\|_{L^\infty} = k^{-1} \|\eta'\|_{L^\infty} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) erhalten wir andererseits auch Konvergenz

$$\|\eta_k(v_k - u)\|_{L^p} + \|\eta_k(v_k' - u')\|_{L^p} \leq \|v_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$$

sowie

$$\|\eta_k' v_k\|_{L^p} \leq Ck^{-1} \cdot \|v_k\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

also  $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $\square$

**Satz 7.3.5. (Sobolev-Einbettung)** Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Es gilt  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$  und

$$\forall u \in W^{1,p}(I): \|u\|_{L^\infty} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}$$

mit  $C = C(I) \leq 1 + l^{-1}$ , wobei  $l = |b - a| = \mathcal{L}^1(I) = |I|$ .

**Beweis.** Sei  $u \in W^{1,p}(I)$ , und sei  $x \in I$ . OBdA sei  $l = |I| \leq 1$ . (Sonst betrachte  $x \in I' \subset I$  mit  $|I'| = 1$ .) Für fast alle  $y \in I$  gilt nach Satz 7.3.1 die Abschätzung

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_I |u'(t)| dt,$$

und nach Mittelung bzgl.  $y \in I$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq l^{-1} \int_I |u(y)| dy + \|u'\|_{L^1} \\ &\leq (1 + l^{-1}) \|u\|_{W^{1,1}} \leq (1 + l^{-1}) \|u\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

**Korollar 7.3.1.** Falls  $I$  unbeschränkt,  $1 \leq p < \infty$ , so gilt für  $u \in W^{1,p}(I)$  stets

$$u(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty, x \in I).$$

**Beweis.** Sei  $u \in W^{1,p}(I)$ . Da  $p < \infty$ , liefert Satz 7.3.4 eine Folge  $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|u_k - u\|_{W^{1,p}(I)} < \varepsilon$  für  $k \geq k_0$ . Mit Satz 7.3.5 folgt für  $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} \limsup_{|x| \rightarrow \infty, x \in I} |u(x)| &\leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty, x \in I} \underbrace{|u_k(x)|}_{=0} + \|u_k - u\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq \|u_k - u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u_k - u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \downarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 7.3.2. (Produktregel)** Seien  $u, v \in W^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt  $uv \in W^{1,p}(I)$ , und

$$\|uv\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)} \cdot \|v\|_{W^{1,p}(I)}.$$

**Beweis.** Nach Satz 7.3.5 gilt  $u, v \in L^\infty(I)$ , also  $uv \in L^p(I)$  mit

$$\|uv\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^p} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)} \cdot \|v\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Analog  $u'v + uv' \in L^p(I)$  mit

$$\|u'v + uv'\|_{L^p} \leq \|u'\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v'\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \cdot \|v\|_{W^{1,p}}.$$

**Behauptung.**  $u'v + uv' \in L^p$  ist schwache Ableitung von  $uv$ .

**Beweis.** i) Sei  $p < \infty$ . Wähle  $(u_k), (v_k)$  in  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit

$$\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}} + \|v_k|_I - v\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0,$$

also auch  $u_k \rightarrow u$ ,  $v_k \rightarrow v$  in  $L^\infty(I)$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann folgt

$$(u_k v_k)' = u_k' v_k + u_k v_k' \rightarrow u' v + u v' \text{ in } L^p(I) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Nach Satz 7.2.1 ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k v_k)' = u' v + u v' \in L^p(I)$  schwache Ableitung von  $uv \in L^p(I)$ .

ii) Sei nun  $p = \infty$ . Zu gegebenem  $\varphi \in C_c^\infty(I)$  wähle  $I' \subset\subset I$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset I'$ . Nach Bemerkung 7.2.2 können wir  $u|_{I'}, v|_{I'}$  auffassen als  $u|_{I'}, v|_{I'} \in W^{1,1}(I')$ , da

$$W^{1,\infty}(I) \hookrightarrow W^{1,\infty}(I') \hookrightarrow W^{1,1}(I').$$

Gemäss i) ist  $(uv' + u'v)|_{I'} \in L^1(I')$  schwache Ableitung von  $(uv)|_{I'} \in L^1(I')$ . Insbesondere gilt

$$\int_I (uv)\varphi' dx = - \int_I (uv' + u'v)\varphi dx,$$

wie gewünscht. □

Es folgt  $uv \in W^{1,p}(I)$ . □

## 7.4 Lösung des Modellproblems auf $I$

### 7.4.1 Dirichlet-Problem

Sei  $I = ]a, b[$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ . Zu  $f \in C^0(\bar{I})$  suche  $u \in C^2(\bar{I})$  mit

$$-u'' = f \quad \text{in } I, \tag{7.4.1}$$

$$u(a) = 0 = u(b). \tag{7.4.2}$$

Gemäss Abschnitt 7.1 finden wir mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H_0^1(I)$  von (7.4.1), (7.4.2) im Sinne von

$$\forall v \in H_0^1(I): \int_I u'v' dx = \int_I f v dx. \tag{7.4.3}$$

**Satz 7.4.1.** *Für das so bestimmte  $u$  gilt  $u \in C^2(\bar{I})$ , und  $u$  löst (7.4.1), (7.4.2) klassisch.*

**Beweis.** i)  $u \in C^2(\bar{I})$ . Da (7.4.3) insbesondere gilt für  $v \in C_c^\infty(I)$ , hat  $u' \in L^2(I)$  die schwache Ableitung

$$(u')' = -f \in C^0(\bar{I}) \hookrightarrow L^\infty(I);$$

das heisst,  $u' \in W^{1,\infty}(I)$ . Nach Satz 7.3.1 gilt

$$u'(x) = u'(x_0) - \int_{x_0}^x f(t) dt \in C^1(\bar{I})$$

gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da  $f \in C^0(\bar{I})$ . Also folgt  $u \in C^2(\bar{I})$ , und  $u$  löst (7.4.1) klassisch.

ii) Da  $H_0^1(I) = \|\cdot\|_{H^1} - \text{clos}(C_c^\infty(I))$  gibt es  $(u_k) \subset C_c^\infty(I)$  mit

$$\|u_k - u\|_{L^\infty} \leq C \cdot \|u_k - u\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Es folgt für beliebige  $k \in \mathbb{N}$

$$|u(a)| \leq \underbrace{|u_k(a)|}_{=0} + \|u_k - u\|_{L^\infty} \leq C \|u_k - u\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

also  $u(a) = 0$ . Analog  $u(b) = 0$ . □

## 7.4.2 Neumann-Problem

Sei  $f \in C^0(\bar{I})$ . Wir suchen zunächst  $u \in C^2(\bar{I})$  mit

$$-u'' + u = f \quad \text{in } I, \tag{7.4.4}$$

$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.5}$$

**Bemerkung 7.4.1.** i) Für  $u \in W^{1,p}(I)$  sind die Randwerte  $u'(a)$ ,  $u'(b)$  nicht definiert.

ii) Falls  $u \in C^2(\bar{I})$  klassische Lösung von (7.4.4), (7.4.5), so folgt für  $v \in C^1(\bar{I})$  nach partieller Integration

$$(u, v)_{H^1} = \int_I (u'v' + uv) dx = \int_I fv dx. \tag{7.4.6}$$

**Definition 7.4.1.**  $u \in H^1$  heißt **schwache Lösung in der Klasse  $H^1$**  von (7.4.4), (7.4.5), falls (7.4.6) erfüllt ist für alle  $v \in H^1(I)$ .

Existenz einer Lösung liefert der folgende Satz.

**Satz 7.4.2.** Für jedes  $f \in C^0(\bar{I})$  besitzt (7.4.4), (7.4.5) genau eine schwache Lösung  $u \in H^1(I)$ , und  $u \in C^2(\bar{I})$  löst (7.4.4), (7.4.5) klassisch.

**Beweis.** i) Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung  $u \in H^1(I)$  folgt aus Satz 4.3.2. Wie in Beweis von Satz 7.4.1 sieht man, dass  $u' \in L^2$  die schwache Ableitung  $(u')' = u - f \in L^2$  besitzt; das heisst,  $u' \in H^1(I)$ , und mit Satz 7.3.1 folgt

$$u'(x) = u'(x_0) + \int_{x_0}^x (u - f)(t) dt \in C^1(\bar{I}),$$

da  $u \in H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{I})$ ,  $f \in C^0(\bar{I})$ . Das heisst,  $u \in C^2(\bar{I})$ , und  $u$  erfüllt (7.4.4) klassisch.

ii) Sei  $v \in C^1(\bar{I})$  beliebig. Da  $u$  Lösung von (7.4.6), folgt nach partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (u'v' + uv - fv) dx \\ &= \int_a^b \underbrace{(-u'' + u - f)}_{=0} v dx + u'(b)v(b) - u'(a)v(a). \end{aligned}$$

Da  $v(a)$ , bzw.  $v(b)$  beliebig sind, folgt  $u'(a) = 0 = u'(b)$ , also (7.4.5). □

**Bemerkung 7.4.2.** Somit erhalten wir (7.4.5) als “natürliche Randbedingung” aus (7.4.6) und der Wahl des Raumes der zulässigen Testfunktionen  $v \in H^1(I)$ .

### 7.4.3 Varianten des Neumann-Problems

Zu  $f \in C^0(\bar{I})$  suche  $u \in C^2(\bar{I})$  mit

$$-u'' = f \quad \text{in } I, \quad (7.4.7)$$

$$u'(a) = 0 = u'(b). \quad (7.4.8)$$

**Bemerkung 7.4.3.** i) Wie Integration von (7.4.7) über  $I$  zeigt, ist die Bedingung

$$\int_I f \, dx = 0 \quad (7.4.9)$$

notwendig für die Existenz einer Lösung  $u \in C^2(\bar{I})$  von (7.4.7), (7.4.8).

ii) Falls  $u \in C^2(\bar{I})$  Lösung ist, so auch jede Funktion  $u + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Wir können daher Ansatzfunktionen  $u$  normieren durch die Bedingung

$$0 = \bar{u} = \frac{1}{|I|} \int_I u \, dx = 0.$$

Setze

$$X = \{u \in H^1(I); \bar{u} = 0\}.$$

$X$  ist abgeschlossener linearer Unterraum von  $H^1(I)$ .

**Lemma 7.4.1.** Für  $u \in X$  gilt  $\|u\|_{L^2} \leq C \cdot \|u'\|_{L^2}$  mit einer nur von  $|I|$  abhängigen Konstanten  $C$ .

**Beweis.** Für  $x, y \in I$  gilt nach Satz 7.3.1

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_I |u'(t)| \, dt = \|u'\|_{L^1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |u(x) - \bar{u}| = \left| \frac{1}{|I|} \int_I (u(x) - u(y)) \, dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(x) - u(y)| \, dy \leq \frac{1}{|I|} \|u'\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Integration über  $I$  und die Höldersche Ungleichung liefern die Behauptung.  $\square$

Aufgrund von Lemma 7.4.1 ist  $X$  ein Hilbert-Raum mit dem zum  $H^1$ -Skalarprodukt äquivalenten Skalarprodukt

$$(u, v)_X = \int_I u'v' \, dx, \quad u, v \in X.$$

**Definition 7.4.2.**  $u \in H^1(I)$  heisst **schwache Lösung** von (7.4.7), (7.4.8) der Klasse  $H^1$ , falls gilt

$$\forall v \in H^1(I): \int_I u'v' dx = \int_I fv dx . \quad (7.4.10)$$

**Bemerkung 7.4.4.** i) Falls eine schwache Lösung  $u \in H^1(I)$  von (7.4.7), (7.4.8) existiert, so folgt bei Wahl von  $v = 1$  als Testfunktion in (7.4.10), dass  $f$  die Bedingung (7.4.9) erfüllt.

ii) Falls  $f$  die notwendige Bedingung (7.4.9) erfüllt, so ist (7.4.10) äquivalent zu

$$\forall v \in X: \int_I u'v' dx = \int_I fv dx . \quad (7.4.11)$$

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, folgt

**Satz 7.4.3.** Falls  $f$  die Bedingung (7.4.9) erfüllt, so besitzt (7.4.7), (7.4.8) genau eine schwache Lösung  $u \in X$ , und  $u \in C^2(\bar{I})$  erfüllt (7.4.7), (7.4.8) klassisch.

**Beweis.** Existenz und Eindeutigkeit von  $u \in X$  mit (7.4.11) folgt aus Satz 4.3.2. Wegen (7.4.9) erfüllt  $u$  auch (7.4.10). Regularität von  $u$ , etc., folgt wie in Satz 7.4.2.  $\square$

**Alternativer Ansatz:** Für  $\varepsilon > 0$  suche  $u_\varepsilon \in C^2(\bar{I})$  mit

$$-u'' + \varepsilon u = f \quad \text{in } I, \quad (7.4.12)$$

$$u'(a) = 0 = u'(b). \quad (7.4.13)$$

Nach Satz 7.4.2 gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  genau ein  $u_\varepsilon \in C^2(\bar{I})$  mit (7.4.12), (7.4.13).

**Satz 7.4.4.** Die Bedingung (7.4.9) ist notwendig und hinreichend für Konvergenz  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $C^1(\bar{I})$  für  $\varepsilon \downarrow 0$ , wobei  $u$  die Lösung von (7.4.7), (7.4.8) ist.

**Beweis.** i) Integration von (7.4.12) unter Berücksichtigung von (7.4.13) ergibt

$$\varepsilon \bar{u}_\varepsilon = \varepsilon \frac{1}{|I|} \int_I u_\varepsilon dx = \frac{1}{|I|} \int_I f dx = \bar{f}. \quad (7.4.14)$$

Falls  $\bar{f} \neq 0$ , so folgt

$$|\bar{u}_\varepsilon| \geq \frac{|\bar{f}|}{\varepsilon} \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Also ist (7.4.9) notwendig für Konvergenz  $u_\varepsilon \rightarrow u$ .

ii) Falls  $\bar{f} = 0$ , so folgt mit (7.4.14) die Gleichung  $\bar{u}_\varepsilon = 0$ ; das heisst,  $u_\varepsilon \in X$ . Mit Lemma 7.4.1 und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} C^{-1} \|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 &\leq \|u'_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \int_I (|u'_\varepsilon|^2 + \varepsilon u_\varepsilon^2) dx \\ &= \int_I (-u''_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon) u_\varepsilon dx = \int_I f u_\varepsilon dx \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|u_\varepsilon\|_{L^2}; \end{aligned}$$



also  $\|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$  und damit auch  $\|u'_\varepsilon\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$ . Mit Satz 7.3.5 folgt

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C \|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Gleichung (7.4.12) liefert somit

$$\|u''_\varepsilon - u''_\delta\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^\infty} + \delta \|u_\delta\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon, \delta \downarrow 0);$$

also  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $C^2(\bar{I})$ , und  $u$  löst (7.4.7), (7.4.8). Die Bedingung (7.4.9) ist somit auch hinreichend für die Konvergenz.  $\square$

## 7.5 Der Laplace-Operator auf $I$

Wir kehren zurück zu unserem ersten Zugang zur Lösung des Dirichlet-Problems (7.4.1), (7.4.2) via Banach's Closed Range Theorem, Satz 6.2.1. Mit den in den Abschnitten 7.3 und 7.4 bereitgestellten Methoden und Resultaten können wir nun das Lemma 7.1.1 im Falle der Dimension  $n = 1$  beweisen.

Sei  $I = ]a, b[$ , wobei  $-\infty < a < b < \infty$ , und sei  $A : D_A \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  mit  $Au = -u''$  auf

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{I}); u(a) = 0 = u(b)\}$$

wie in Abschnitt 7.1. Betrachte  $\bar{A}$  mit

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\bar{I}); \exists (u_k) \subset D_A, f \in L^2(I): u_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} u, -u''_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f \text{ in } L^2(I)\}.$$

**Lemma 7.5.1.**  $D_{\bar{A}} = \{u \in H^2(I); u(a) = 0 = u(b)\} = H^2 \cap H_0^1(I)$ .

Für den Beweis benötigen wir die folgende elementare Beobachtung.

**Bemerkung 7.5.1.**  $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I); u(a) = 0 = u(b)\}$ .

**Beweis.** “ $\supset$ ”: OBdA dürfen wir annehmen, dass  $I = ]-1, 1[$ . Sei  $u \in H^1(I)$  mit  $u(a) = 0 = u(b)$ . Setze  $u$  fort zu  $u \in H^1(\mathbb{R})$  mit  $u(x) = 0$  für  $|x| \geq 1$ .

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $u_k(x) = u((1+2/k)x) \in H^1(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(u_k) \subset B_{1-1/k}(0)$ ,  $k \geq 2$ . Anwendung der Substitutionsregel ergibt  $\|u_k\|_{H^1} \rightarrow \|u\|_{H^1}$  sowie  $u_k \xrightarrow{w} u$  in  $H^1(\mathbb{R})$ ; also  $u_k \rightarrow u$  in  $H^1(\mathbb{R})$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Mit  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  wie in Lemma 7.3.3 erhalten wir  $v_k = u_k * \rho_k \in C_c^\infty(I)$  mit  $v_k \rightarrow u$  in  $H^1(\mathbb{R})$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

“ $\subset$ ”: Verfahre wie im Teil ii) des Beweises von Satz 7.4.1.  $\square$

**Beweis von Lemma 7.5.1.** i) Sei  $u \in H^2 \cap H_0^1(I)$ . Gemäss Satz 7.3.4 gibt es  $(v_k) \subset C^\infty(\bar{I})$  mit  $v_k \rightarrow u$  in  $H^2(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit Bemerkung 7.5.1 folgt  $v_k(a), v_k(b) \rightarrow 0$ , also auch

$$v_k^{(0)}(x) = v_k(a) + \frac{x-a}{b-a}(v_k(b) - v_k(a)) \rightarrow 0 \text{ in } H^2(I) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Setze  $u_k = v_k - v_k^{(0)}$  mit  $u_k(a) = 0 = u_k(b)$ , also  $u_k \in D_A$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt  $u_k \rightarrow u$  in  $H^2(I)$ , und  $u \in D_{\bar{A}}$ , wie gewünscht.

ii) Sei  $u \in D_{\bar{A}}$  und dazu  $(u_k) \subset D_A$ ,  $f \in L^2(I)$  mit

$$u_k \rightarrow u, \quad Au_k = -u_k'' \rightarrow f \quad \text{in } L^2(I) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (7.5.1)$$

Für die Konvergenz  $u_k \rightarrow u$  in  $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$  fehlt nur noch die Konvergenz  $u_k' \rightarrow u'$  in  $L^2$ . Mit Lemma 7.1.2 und partieller Integration erhalten wir jedoch

$$\begin{aligned} \|u_k' - u_l'\|_{L^2}^2 &= \int_I |(u_k - u_l)'|^2 dx = - \int_I (u_k'' - u_l'')(u_k - u_l) dx \\ &\leq \|u_k'' - u_l''\|_{L^2} \|u_k - u_l\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Da  $u_k \in D_A \subset H_0^1(I)$  gemäss Bemerkung 7.5.1, folgt  $u_k \rightarrow u$  in  $H_0^1(I)$ , und mit (7.5.1) dann auch  $u_k \rightarrow u$  in  $H^2(I)$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $\square$

Schliesslich können wir nun die Selbstadjungiertheit von  $\bar{A}$  beweisen.

**Lemma 7.5.2.** Sei  $v \in L^2(I)$  und für ein  $C \in \mathbb{R}$  gelte

$$\forall u \in D_{\bar{A}}: |(v, \bar{A}u)_{L^2}| \leq C \cdot \|u\|_{L^2}. \quad (7.5.2)$$

Dann gilt  $v \in D_{\bar{A}}$ .

**Beweis.** Mit (7.5.2) folgt die Existenz von  $g = \bar{A}^*v \in L^2(I)$  mit

$$\forall u \in D_{\bar{A}}: (v, \bar{A}u)_{L^2} = (g, u)_{L^2}. \quad (7.5.3)$$

Da  $C_c^\infty(I) \subset D_A \subset D_{\bar{A}}$  gilt insbesondere

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): - \int_I v \varphi'' dx = \int_I g \varphi dx. \quad (7.5.4)$$

Setze

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt \in H^1(I).$$

Mit (7.5.4) und Lemma 7.3.1 erhalten wir

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): - \int_I v \varphi'' dx + \int_I G \varphi' dx = - \int_I v \varphi'' dx - \int_I g \varphi dx = 0. \quad (7.5.5)$$

**Behauptung.** Es gilt  $v \in H^2(I)$ .

**Beweis.** Gleichung (7.5.5) lässt erwarten, dass  $v' + G = C$  für geeignetes  $C \in \mathbb{R}$ , analog zu Lemma 7.3.1.

Fixiere  $\psi \in C_c^\infty(I)$  mit  $\int_I \psi dx = 1$  wie im Beweis von Lemma 7.3.1. Für  $w \in C_c^\infty(I)$  gilt dann

$$\varphi(x) = \int_a^x \left( w(t) - \psi(t) \int_I w(s) ds \right) dt \in C_c^\infty(I)$$

mit

$$\varphi' = w - \psi \int_I w dx, \quad \varphi'' = w' - \psi' \int_I w dx.$$

Mit (7.5.5) folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_I -v\varphi'' dx + \int_I G\varphi' dx \\
 &= \int_I \left( -v(w' - \psi' \int_I w dt) \right) dx + \int_I G(w - \psi \int_I w dt) dx \\
 &= \int_I \left( -vw' + Gw - w \int_I (G\psi - v\psi') dt \right) dx \\
 &= - \int_I vw' dx + \int_I (G - C)w dx,
 \end{aligned}$$

wobei wir

$$C = \int_I (G\psi - v\psi') dx$$

setzen. Somit gilt  $v' = C - G \in H^1(I)$ , und  $v \in H^2(I)$ , wie gewünscht, mit  $v'' = -G' = -g$ .  $\square$

ii) Mit (7.5.3) und partieller Integration erhalten wir für  $u \in D_A$  die Identität

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_I (vu'' + gu) dx = \int_I \underbrace{(v'' + g)}_{=0} u dx + (vu')|_a^b \\
 &= u'(b)v(b) - u'(a)v(a).
 \end{aligned}$$

Da für geeignetes  $u \in D_A$  die Werte  $u'(a) = 0$ ,  $u'(b) = 1$ , beziehungsweise  $u'(a) = 1$ ,  $u'(b) = 0$  angenommen werden, folgt  $v(a) = 0 = v(b)$ ; also  $v \in D_{\bar{A}}$  gemäss Lemma 7.5.1  $\square$



# Kapitel 8

## Sobolev-Räume im $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Erste Beispiele

Im Falle  $n = 1$  hat jedes  $u \in W^{1,p}(I)$  gemäss Satz 7.3.1 einen stetigen Repräsentanten. Für  $n \geq 2$  gilt diese Aussage nicht mehr. Zur Konstruktion entsprechender Beispiele ist folgender Begriff nützlich.

**Definition 8.1.1.** Ein  $K \subset\subset \mathbb{R}^n$  hat **verschwindende  $W^{1,p}$ -Kapazität**,  $\text{cap}_{W^{1,p}}(K) = 0$ , falls ein Ball  $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  und  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(B)$  existieren mit  $0 \leq \psi_k \leq 1$  und  $\psi_k \equiv 1$  in einer Umgebung  $U_k$  von  $K$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $\psi_k \rightarrow 0$  fast überall und  $\|\nabla \psi_k\|_{L^p} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Bemerkung 8.1.1.** i) Mit der Poincaré'schen Ungleichung, Lemma 7.1.2, folgt aus der Konvergenz  $\|\nabla \psi_k\|_{L^p(B)} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) auch die Konvergenz  $\|\psi_k\|_{L^p} \rightarrow 0$  und damit die Konvergenz (einer Teilfolge)  $\psi_k \rightarrow 0$  fast überall.

ii) Da wegen der Hölderschen Ungleichung für jeden Ball  $B \subset \mathbb{R}^n$  und für alle  $1 \leq s \leq p$  gilt  $L^p(B) \hookrightarrow L^s$ , hat jedes  $K \subset\subset \mathbb{R}^n$  mit verschwindende  $W^{1,p}$ -Kapazität auch verschwindende  $W^{1,s}$ -Kapazität für jedes  $1 \leq s \leq p$ .

iii) Falls  $K$  verschwindende  $W^{1,p}$ -Kapazität hat, so folgt  $\mathcal{L}^n(K) = 0$ .

**Beispiel 8.1.1.** Für  $n > 1$  und  $1 \leq p \leq n$  hat die Menge  $K = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  verschwindende  $W^{1,p}$ -Kapazität.

**Beweis.** i) Für  $p < n$  kann man die Aussage sehr leicht beweisen. Sei dazu  $\psi \in C_c^\infty(B_2(0))$  mit  $\psi \equiv 1$  in  $B_1(0)$ . Skalieren  $\psi_k(x) = \psi(kx) \in C_c^\infty(B_{2/k}(0))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\psi_k \equiv 1$  in einer Umgebung von  $x = 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , und nach Substitution  $y = kx$  erhalten wir

$$\|\nabla \psi_k\|_{L^p}^p = k^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(y)|^p dy = Ck^{p-n} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

ii) Für  $p = n$  versagt die unter i) beschriebene Konstruktion. Betrachte statt

dessen die Folge

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/e^{e^{k+1}} = r_k, \\ \log \log(1/|x|) - k, & \text{sonst,} \\ 0, & |x| \geq 1/e^{e^k} = R_k. \end{cases}$$

Wegen

$$|\nabla \psi_k(x)|^n = \begin{cases} |x|^{-n} |\log |x||^{-n}, & r_k < |x| < R_k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt nach Substitution  $s = \log(1/r)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_k|^n dx &\leq C \int_{r_k}^{R_k} \frac{r^{n-1} dr}{r^n |\log r|^n} = C \int_{\log(1/R_k)}^{\log(1/r_k)} \frac{ds}{s^n} \\ &= \frac{C(n)}{|\log r|^{n-1}} \Big|_{r_k}^{R_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Nach Glättung erhalten wir eine Folge  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**Satz 8.1.1.** Sei  $K \subset \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in L^p \cap L^q(\Omega) \cap C^1(\Omega \setminus K)$  mit  $|\nabla u| \in L^p(\Omega \setminus K)$ , wobei  $1 \leq p, q \leq \infty$ , und sei  $s$  zu  $q$  konjugiert. Falls  $\text{cap}_{W^{1,s}}(K) = 0$ , dann gilt  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  mit schwacher Ableitung  $\nabla u(x)$  fast überall.

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , und sei  $(\psi_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 \leq \psi_k \leq 1$  und  $\psi_k = 1$  in einer Umgebung von  $K$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , eine Folge mit  $\psi_k \rightarrow 0$  fast überall und  $\|\nabla \psi_k\|_{L^s} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann gilt  $\varphi(1 - \psi_k) \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt

$$\int_{\Omega} u \varphi |\nabla \psi_k| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

und mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \partial_i (\varphi(1 - \psi_k)) dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \partial_i u \varphi (1 - \psi_k) dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \varphi dx, \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

wobei  $\partial_i u = \frac{\partial_i u}{\partial x_i}$ , etc. Also besitzt  $u$  die schwache Ableitung  $\nabla u \in L^p$ .  $\square$

**Beispiel 8.1.2.** Sei  $n > 1$ .

i) Betrachte  $u(x) = \log |x| \in L^q(B_1(0)) \cap C^1(B_1(0) \setminus \{0\})$  für jedes  $q < \infty$ ; insbesondere  $u \in L^{\frac{n}{n-1}}(B_1(0))$ . Da  $K = \{0\}$  nach Beispiel 8.1.1 verschwindende  $W^{1,n}$ -Kapazität hat, und da

$$\nabla u(x) = \frac{x}{|x|^2} \in L^p(B_1(0; \mathbb{R}^n)), \quad p < n,$$

liegt  $u$  in  $W^{1,p}(B_1(0))$  für jedes  $p < n$ .

ii) Die Funktion

$$u(x) = \log \log \left( \frac{1}{|x|} \right) \in \bigcap_{1 \leq q < \infty} L^q(B_{1/e}(0)) \cap C^1(B_{1/e}(0) \setminus \{0\})$$

mit

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x| |\log |x||} \in L^n(B_{1/e}(0))$$

liegt in  $W^{1,n}(B_{1/e}(0; \mathbb{R}^n))$ .

iii) Für  $0 < \alpha < n$  gilt

$$u(x) = \frac{x}{|x|^{n-\alpha}} \in W^{1,p}(B_1(0); \mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p < \frac{n}{n-\alpha}.$$

**Beweis.** Es gilt  $u \in L^q(B_1(0)) \cap C^1(B_1(0) \setminus \{0\})$  für jedes  $q < \frac{n}{n-1-\alpha}$ ; insbesondere  $u \in L^{\frac{n}{n-1}}(B_1(0))$ . Weiter gilt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}} \in L^p(B_1(0)), \quad p < \frac{n}{n-\alpha}.$$

Die Behauptung folgt daher mit Satz 8.1.1.  $\square$

iv) Die Funktion

$$u(x) = \frac{x}{|x|^n} \in L^q(B_1(0; \mathbb{R}^n)), \quad q < \frac{n}{n-1},$$

erfüllt  $\operatorname{div}(u(x)) = 0$  ( $x \neq 0$ ), aber im Distributionssinne gilt  $\operatorname{div}(u) = c(n)\delta_{\{x=0\}}$  für ein  $c(n) \neq 0$ , vgl. Analysis III.

**Folge:** Die Menge  $K = \{0\}$  hat für kein  $p > n$  verschwindende  $W^{1,p}$ -Kapazität.

## 8.2 Approximation von Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen

Um mit Sobolev-“Funktionen” rechnen zu können, müssen wir diese durch glatte Funktionen approximieren. Ob dies im Allgemeinen möglich ist, war lange Zeit offen, bis diese Frage überraschend durch den folgenden Satz von Meyers-Serrin beantwortet wurde.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

**Satz 8.2.1.** (Meyers-Serrin (1964)) Für jedes  $1 \leq p < \infty$  liegt der Raum  $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$  dicht in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Für den Beweis hilft die folgende Vorbetrachtung. Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  mit

$$K := \operatorname{supp}(u) = \bigcap_{A \text{ abg.}; u(x)=0 \text{ für fast alle } x \notin A} A \subset\subset \Omega.$$

Sei  $\rho \in C_c^\infty(B_1(0))$  ein „mollifier“ wie in Abschnitt 7.3 mit  $\rho \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx = 1$ , und für  $\varepsilon > 0$  sei

$$0 \leq \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0)) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon \, dx = 1.$$

Setze  $u(x) = 0$  für  $x \notin \Omega$ . Für  $0 < \varepsilon < \text{dist}(K, \partial\Omega)$  gilt dann  $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u \in C_c^\infty(\Omega)$ , und

$$u_\varepsilon \rightarrow u, \quad \nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \nabla u \rightarrow \nabla u \quad \text{in } L^p \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

gemäss Lemma 7.3.3.

Für allgemeines  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  benötigen wir eine Zerlegung der Eins auf  $\Omega$ .

**Definition 8.2.1.** Eine offene Überdeckung  $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$  einer Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heisst **lokal endlich**, falls zu jedem  $x_0 \in \Omega$  eine Umgebung  $U$  existiert mit

$$\#\{\iota \in I; \Omega_\iota \cap U \neq \emptyset\} < \infty. \quad (8.2.1)$$

**Beispiel 8.2.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$\Omega_k = \{x \in \Omega; |x| < k, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

sowie  $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$ , und setze  $U_k = \Omega_k \setminus \overline{\Omega_{k-2}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  offene Überdeckung von  $\Omega$ . Für  $x \in U_k$  gilt

$$k-2 < |x| < k \quad \text{oder} \quad \frac{1}{k-2} > \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k};$$

daher ist  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal endlich.

**Bemerkung 8.2.1.** i) Für beliebige  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  können wir (8.2.1) nicht erwarten. Z.B. gilt in Beispiel 8.2.1 für  $x_0 \in \partial\Omega$  und eine beliebige Umgebung  $U_0$  von  $x_0$  stets  $U_0 \cap U_k \neq \emptyset$  für genügend grosse  $k$ .

ii) Nach allgemeinen Sätzen der mengentheoretischen Topologie besitzt eine offene Überdeckung  $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$  in einem metrischen Raum stets eine lokal endliche Verfeinerung; vgl. Kelly „General topology“, Korollar 5.35, p.160.

**Definition 8.2.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}$  eine offene Überdeckung von  $\Omega$ . Eine Schar  $(\varphi_\iota)_{\iota \in I} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  heisst eine **glatte Zerlegung der Eins auf  $\Omega$  bzgl.  $\mathcal{F}$** , falls gilt:

i)  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \iota \in I: 0 \leq \varphi_\iota(x) \leq 1;$

ii) die Mengen  $U_\iota = \text{supp}(\varphi_\iota)$ ,  $\iota \in I$ , bilden eine lokal endliche Überdeckung von  $\Omega$ , und für jedes  $\iota \in I$  gibt es  $U \in \mathcal{F}$  mit  $U_\iota \subset U$ ;

iii)  $\forall x \in \Omega: \sum_{\iota \in I} \varphi_\iota(x) = 1.$

**Beispiel 8.2.2.** Sei  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Überdeckung von  $\Omega$  in Beispiel 8.2.1. Setze  $\psi_k(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann sind die Funktionen  $\psi_k$  Lipschitz mit



$\text{supp}(\psi_k)^\circ = U_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nach Glättung durch Faltung mit einem geeigneten mollifier erhält man  $\psi_k \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $\text{supp}(\psi_k) \subset V_k := \cup_{|k-l| \leq 1} U_l$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und mit

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

Da  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und damit auch  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal endlich, ist  $\psi$  wohldefiniert und glatt. Setze  $\varphi_k = \psi_k/\psi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis von Satz 8.2.1.** Überdecke  $\Omega$  mit  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gemäss Beispiel 8.2.1, und wähle eine Zerlegung der Eins  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  bzgl.  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gemäss Beispiel 8.2.2, wobei  $V_k = \cup_{|k-l| \leq 1} U_l$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $0 \leq \varphi_k \leq 1$ ,  $\varphi_k \in C_c^\infty(V_k)$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = 1$  in  $\Omega$ .

Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Zerlege

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

mit  $u_k = u\varphi_k \in W^{1,p}(\Omega)$  und  $\text{supp}(u_k) \subset V_k \subset\subset \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Fixiere  $\delta > 0$ . Zu  $k \in \mathbb{N}$  wähle  $\varepsilon_k > 0$  mit  $\varepsilon_k < 1/(k+2)^2 < \text{dist}(V_k, \Omega_{k-4} \cup \partial\Omega_{k+2})$  und

$$\|\rho_{\varepsilon_k} * u_k - u_k\|_{W^{1,p}} < \delta \cdot 2^{-k}.$$

Setze  $v_k := \rho_{\varepsilon_k} * u_k \in C_c^\infty(W_k)$ , wobei  $W_k := \cup_{|k-l| \leq 2} U_l$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Da auch  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal endlich, gilt

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} v_k \in C^\infty(\Omega), \quad (8.2.2)$$

und  $v$  erfüllt die Abschätzung

$$\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - u_k) \right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta.$$

Da  $\delta > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 8.2.2.** i) Im allgemeinen konvergiert die Darstellung (8.2.2) für  $v$  nicht gleichmässig für Punkte in der Nähe des Randes von  $\Omega$ . Die Darstellung (8.2.2) liefert daher im Allgemeinen keine Funktion  $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

ii) In der Tat liegt für manche Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  der Raum  $C^\infty(\bar{\Omega})$  nicht dicht in  $W^{1,1}(\Omega)$ . Dies gilt sogar im Falle  $n = 1$ .

**Beispiel 8.2.3.** i) Sei  $S = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ . Betrachte  $u = \chi_{]0,1[}$ . Offenbar gilt  $u \in W^{1,1}(S)$  mit  $u' = 0$ . Die Funktion  $u$  lässt sich nicht durch Funktionen der Klasse  $C^1(\bar{S})$  auf  $\bar{S} = [-1, 1]$  in  $W^{1,1}(S)$  approximieren.

Nimm widerspruchswise an, es gilt  $\|u_k - u\|_{W^{1,1}(S)} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für eine Folge  $(u_k) \subset C^1(\bar{S})$ . Gemäss Satz 7.3.5 ist  $(u_k)$  Cauchy-Folge in  $C^0(\bar{S})$ , und  $u_k \rightarrow u$  gleichmässig auf  $S$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Somit lässt sich  $u$  zu einer stetigen Funktion auf  $\bar{S} = [-1, 1]$  ergänzen. Der Widerspruch zeigt insbesondere, dass  $C^\infty(\bar{S})$  nicht dicht liegt in  $W^{1,1}(S)$ .

ii) Sei analog  $\Omega = (] - 1, 0] \times S) \cup (]0, 1[ \times ] - 1, 1[)$ . Betrachte

$$u(x, y) = \begin{cases} x, & x < 0 \text{ und } y > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ . Wiederum lässt sich  $u$  nicht durch Funktionen der Klasse  $C^1(\bar{\Omega})$  auf  $\bar{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  im Raum  $W^{1,1}(\Omega)$  approximieren.

Falls nämlich für  $(u_k) \subset C^1(\bar{\Omega})$  gilt  $\|u_k - u\|_{W^{1,1}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so folgt mit Fubini

$$\int_{-1}^1 \|u_k(x, \cdot) - u(x, \cdot)\|_{W^{1,1}(S)} dx \leq \|u_k - u\|_{W^{1,1}(\bar{\Omega})} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

also

$$\|u_k(x, \cdot) - u(x, \cdot)\|_{W^{1,1}(S)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

für fast alle  $x$ , wobei  $u_k(x, \cdot) \in C^1(\bar{S})$ . Mit i) erhalten wir wieder einen Widerspruch, und  $C^1(\bar{\Omega})$  liegt nicht dicht in  $W^{1,1}(\Omega)$ .

Im Abschnitt 8.4 werden wir die Frage, für welche Gebiete  $\Omega$  der Raum  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dicht liegt in  $W^{k,p}(\Omega)$  wieder aufgreifen.

### 8.3 Weitere Eigenschaften von $W^{1,p}(\Omega)$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

**Satz 8.3.1.** Sei  $1 < p \leq \infty$ ,  $u \in L^p(\Omega)$ . Es sind äquivalent:

i)  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ;

ii)  $\exists C \geq 0 \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ :

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{wobei } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

iii)  $\exists C \geq 0 \forall \Omega' \subset\subset \Omega \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ :

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq C |h|,$$

wobei  $\tau_h u(x) = u(x + h)$ ,  $x \in \Omega'$ .

Die Aussagen ii) und iii) gelten mit  $C = \|\nabla u\|_{L^p}$ .

**Beweis.** iii)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  i) zeigt man wie in Satz 7.3.2. (Beachte, dass  $p > 1$ .)

i)  $\Rightarrow$  iii): Sei  $u \in C^1(\Omega)$ , und sei  $\Omega' \subset\subset \Omega$ . Für  $|h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ,  $x \in \Omega'$  gilt

$$\begin{aligned} |\tau_h u(x) - u(x)| &= |u(x+h) - u(x)| = \left| \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th) dt \right| \\ &\leq |h| \int_0^1 |\nabla u(x+th)| dt. \end{aligned}$$

Wir müssen nun die Fälle  $p < \infty$  und  $p = \infty$  unterscheiden.

Falls  $p < \infty$ , so folgt mit der Hölderschen Ungleichung zunächst

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt$$

und anschliessend mit dem Satz von Fubini

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')}^p \leq |h|^p \int_{\Omega'} \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt dx \leq |h|^p \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (8.3.1)$$

Zu  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  gibt es nach Satz 8.2.1 eine Folge  $(u_k) \subset C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$  mit  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Da (8.3.1) für jedes  $u_k$  gilt, erhalten wir nach Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  die Abschätzung (8.3.1) auch für  $u$ .

$p = \infty$ : Zu  $\Omega' \subset\subset \Omega$  wähle  $\Omega''$  mit  $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ . Da  $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega'')$  für jedes  $p < \infty$ , erhalten wir mit (8.3.1) und der Hölderschen Ungleichung für  $|h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$  die Abschätzung

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega'')} \leq |h| \cdot \mathcal{L}^n(\Omega'')^{\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Für  $p \rightarrow \infty$  folgt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^\infty},$$

wie gewünscht. □

**Korollar 8.3.1.** Sei  $u \in L^\infty(\Omega)$ . Dann sind äquivalent:

i)  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ;

ii)  $u$  besitzt einen lokal Lipschitz-stetigen Repräsentanten  $\tilde{u} = u$ , und es gibt  $C \geq 0$ , so dass

$$\forall x, y \in \Omega: |u(x) - u(y)| \leq C \cdot \text{dist}_\Omega(x, y) \quad (8.3.2)$$

mit  $\text{dist}_\Omega(x, y) = \inf\{L(\gamma); \gamma \in C^1([0, 1], \Omega), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$ , wobei

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

für jedes  $\gamma \in C^1([0, 1], \Omega)$  die Länge der Kurve  $\gamma$  bezeichnet.

Die Aussage ii) gilt mit  $C = \|\nabla u\|_{L^\infty}$ .

**Bemerkung 8.3.1.** i) Falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  konvex, so gilt  $\text{dist}_\Omega(x, y) = |x - y|$ ; das heisst,  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$  genau dann, wenn  $u$  (gleichmässig) Lipschitz stetig ist.

ii) Für  $\Omega = ]-1, 1[^2 \setminus ([0, 1[ \times \{0\})$  und die Funktion  $u(x, y) = \text{sgn}(y)x$  für  $x > 0$ ,  $u(x, y) = 0$  sonst, gilt  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ; jedoch ist  $u$  nicht gleichmässig Lipschitz stetig auf  $\Omega$ . (Andernfalls könnte man  $u$  stetig zu  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  ergänzen.)

iii)

**Beweis von Korollar 8.3.1.** i)  $\Rightarrow$  ii): Seien  $x, y \in \Omega$ , dazu  $\gamma \in C^1([0, 1], \Omega)$  mit  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ . Setze  $2\delta = \text{dist}(\gamma([0, 1]), \partial\Omega) > 0$  und definiere weiter  $\Omega' = U_\delta(\gamma([0, 1])) \subset\subset \Omega$ .

Wähle  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  mit  $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \delta$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Für festes  $1 \leq i \leq N$  setze  $h = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ . Mit Satz 8.3.1 folgt

$$|u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| = |(\tau_h u - u)(\gamma(t_{i-1}))| \leq C|h| = C|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Nach Summieren über  $i$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x)| &= \left| \sum_{i=1}^N u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^N |u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| \\ &\leq C \sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq CL(\gamma). \end{aligned}$$

Mit Übergang zum Infimum bzgl.  $\gamma$  folgt ii).

ii)  $\Rightarrow$  i): Sei  $u$  lokal Lipschitz mit (8.3.2). Sei  $x_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  mit  $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ . Gemäss ii) gilt für alle  $x \in B_r(x_0)$  und  $0 < |h| < r$  die Abschätzung

$$|u(x+h) - u(x)| \leq C \text{dist}_\Omega(x, x+h) = C|h|$$

mit der Konstanten  $C$  aus (8.3.2), also

$$\forall x \in B_r(x_0), 0 < |h| < r: \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right| \leq C.$$

Die Behauptung folgt somit aus Satz 8.3.1.  $\square$

Als weitere Anwendung von Satz 8.2.1 erhalten wir die Kettenregel.

**Satz 8.3.2.** (Kettenregel) Sei  $G \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $G(0) = 0$ ,  $|G'(s)| \leq L$ , und sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt  $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$  mit

$$\nabla(G \circ u) = (G' \circ u) \cdot \nabla u \in L^p(\Omega).$$

Im Unterschied zum Fall  $n = 1$  kann man auf die Annahme  $G' \in L^\infty$  im Allgemeinen nicht verzichten.

**Beispiel 8.3.1.** Sei  $n = 4$ . Es gilt  $u(x) = |x|^{-\frac{1}{2}} \in W^{1,2}(B_1(0; \mathbb{R}^4))$ ; jedoch  $u^2(x) = |x|^{-1} \notin W^{1,2}$ , da  $|\nabla(u^2)| \cong |x|^{-2} \notin L^2(B_1(0; \mathbb{R}^4))$ .

**Beweis von Satz 8.3.2.** Setze  $v = G \circ u$ . Da  $G(0) = 0$ ,  $|G'(s)| \leq L$ , gilt

$$|v(x)| = |G(u(x)) - G(0)| \leq L|u(x)| \in L^p(\Omega);$$

analog erhalten wir für die Funktion  $g = (G' \circ u) \cdot \nabla u$  die Abschätzung

$$|g(x)| = |G'(u(x))| \cdot |\nabla u(x)| \leq L|\nabla u(x)| \in L^p(\Omega).$$

Zwischen  $v$  und  $g$  gilt die folgende Beziehung.

**Behauptung 1.**  $g = \nabla v$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Wähle  $\Omega' \subset\subset \Omega$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega'$ . Fasse  $u|_{\Omega'}$  auf als  $u \in W^{1,1}(\Omega')$ . Nach Satz 8.2.1 gibt es  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1 \cap W^{1,1}(\Omega')$  mit  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,1}(\Omega')$ . Gemäss der üblichen Kettenregel gilt

$$\int_{\Omega} G(u_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} G'(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi dx, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt

$$\left| \int_{\Omega} (G(u_k) - G(u)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|u_k - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

da  $|G(u_k) - G(u)| \leq L |u_k - u|$ ,  $|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| \leq C$ . Analog folgern wir

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (G'(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}) \varphi dx \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} G'(u_k) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx \right| + \left| \int_{\Omega} (G'(u_k) - G'(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \right| \\ & \leq LC \|u_k - u\|_{W^{1,1}(\Omega')} + C \int_{\Omega'} |G'(u_k) - G'(u)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei wir zur Abschätzung des letzten Integrals Lebesgue's Theorem von der dominierten Konvergenz benutzen. Beachte hierzu, dass  $|G'(u_k) - G'(u)| \leq 2L$  mit  $G'(u_k) \rightarrow G'(u)$  fast überall in  $\Omega'$ , und dass  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega')$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} G(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(u_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G'(u_k) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx. \end{aligned}$$

□

Die Behauptung des Satzes folgt. □

**Satz 8.3.3.** (Substitutionsregel) Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $H \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$  ein Diffeomorphismus mit  $H(V) = U$  und  $|dH|, |dH^{-1}| \leq C < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Für  $u \in W^{1,p}(U)$  gilt dann  $v := u \circ H \in W^{1,p}(V)$ , und

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = \frac{\partial (u \circ H)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ H \right) \frac{\partial H_j}{\partial y_i} =: g_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Beweis.** i) Sei  $p < \infty$ . Wir zeigen:  $v, g = (g_i)_{1 \leq i \leq n} \in L^p(V)$ . Es gilt

$$\int_V |v|^p dy = \int_U |u \circ H|^p dy = \int_U |u|^p |\det(dH^{-1})| dx \leq C \|u\|_{L^p(U)}^p, \quad (8.3.3)$$

wobei wir  $x = H(y)$  substituiert und  $|\det(dH^{-1})| \leq C$  benutzt haben; analog

$$\int_V |g|^p dy \leq C \int_V |\nabla u \circ H|^p dy \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}^p. \quad (8.3.4)$$

Wähle  $(u_k) \subset C^1 \cap W^{1,p}(U)$  gemäss Satz 8.2.1 mit  $\|u_k - u\|_{W^{1,p}(U)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Mit (8.3.3) und (8.3.4) folgt  $v_k = u_k \circ H \in W^{1,p}(V)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und

$$\|v_k - v\|_{L^p(V)} + \|\nabla v_k - g\|_{L^p(V)} \leq C \|u_k - u\|_{W^{1,p}(U)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit Satz 7.2.1.i) folgt  $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k \in W^{1,p}(V)$  mit  $\nabla v = g$ .

ii) Sei  $p = \infty$ . Da  $W^{1,\infty}(U) \hookrightarrow W_{loc}^{1,1}(U)$  genügt es zu zeigen, dass  $v \in W^{1,\infty}(V)$ . Offenbar gilt  $v \in L^\infty(V)$ , und für jedes  $x \in V$  und jedes genügend kleine  $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$  können wir abschätzen

$$\frac{|v(x+h) - v(x)|}{|h|} = \frac{|u(H(x+h)) - u(H(x))|}{|H(x+h) - H(x)|} \leq C \|\nabla u\|_{L^\infty},$$

wobei wir die Injektivität von  $H$  und die Annahme  $|dH| \leq C$  benutzt haben. Die Behauptung folgt mit Satz 8.3.1.  $\square$

## 8.4 Fortsetzung von $W^{1,p}$ -Funktionen, Spursatz

Betrachte zunächst den Zylinder

$$Q = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |x'| < 1, |x_n| < 1\}$$

mit

$$Q_\pm = \{x = (x', x_n) \in Q; \pm x_n > 0\}$$

und

$$Q_0 = \{x = (x', x_n) \in Q; x_n = 0\}.$$

**Lemma 8.4.1.** Sei  $1 \leq p \leq \infty$ , und sei  $u \in W^{1,p}(Q_+)$ . Setze

$$u^*(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann gilt  $u^* \in W^{1,p}(Q)$ , und  $\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}$ .

**Beweis.** Setze  $g_i = (\frac{\partial u}{\partial x_i})^*$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , bzw.

$$g_n(x', x_n) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n), & x_n > 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt  $u^* \in L^p(Q)$  mit

$$\|u^*\|_{L^p(Q)}^p = 2 \|u\|_{L^p(Q_+)}^p, \quad \text{falls } p < \infty,$$

bzw.

$$\|u^*\|_{L^\infty(Q)} = \|u\|_{L^\infty(Q_+)}, \quad \text{falls } p = \infty;$$

das heisst, in jedem Fall

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leq 2 \|u\|_{L^p(Q_+)}.$$

Analog gilt  $g_i \in L^p(Q)$  mit

$$\|g_i\|_{L^p(Q)} \leq 2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q_+)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Behauptung 1.**  $g_i = \frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ . Für  $1 \leq i \leq n-1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{Q_+} u(x', x_n) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_n) \right) dx \\ &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \end{aligned}$$

wobei  $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)$ , bzw. für  $i = n$

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx &= \int_{Q_+} u(x', x_n) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', -x_n) \right) dx \\ &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \rho}{\partial x_n} dx, \end{aligned}$$

wobei  $\rho(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$ .

Sei  $1 \leq i \leq n-1$ . Wähle  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\eta(t) = 1$  für  $t \geq 2$ ,  $\eta(t) = 0$  für  $t \leq 1$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze  $\eta_k(t) = \eta(kt)$ . Dann gilt

$$\psi_k = \psi_k(x', x_n) := \eta_k(x_n) \psi \in C_c^\infty(Q_+)$$

und

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi_k dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beachte

$$\psi_k = \eta_k \psi \rightarrow \psi, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad \text{fast überall} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi_k dx \\ &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx = - \int_Q \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^* \varphi dx = - \int_Q g_i \varphi dx. \end{aligned}$$

Sei nun  $i = n$ . Beachte  $\rho(x', 0) = 0$ ,  $\rho \in C^1(\overline{Q_+})$ ; insbesondere also

$$|\rho(x', x_n)| \leq C |x_n|. \quad (8.4.1)$$

Setze  $\rho_k = \eta_k(x_n) \rho \in C_c^\infty(Q_+)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \rho_k dx \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \rho dx = - \int_Q g_n \varphi dx.$$

Schätze ab

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_+} u \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} - \frac{\partial \rho}{\partial x_n} \right) dx \right| &\leq \int_{Q_+} |u| \left| \frac{\partial \eta_k}{\partial t}(x_n) \right| |\rho| dx + \left| \int_{Q_+} u(1 - \eta_k) \frac{\partial \rho}{\partial x_n} dx \right| \\ &=: I_k + II_k. \end{aligned}$$

Wegen  $\eta_k \rightarrow 1$  fast überall folgt  $II_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit Definition von  $\eta_k$  und (8.4.1) erhalten wir weiter  $\left| \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \rho \right| \leq C$ , und absolute Stetigkeit von  $\int |u| dx$  ergibt

$$I_k \leq C \int_{\{x=(x', x_n); 0 < x_n < \frac{2}{k}\}} |u| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Es folgt

$$- \int_Q g_n \varphi dx = \int_{Q_+} u \frac{\partial \rho}{\partial x_n} dx = \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx.$$

□

Betrachte nun ein beliebiges offenes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega = \Gamma$ .

**Definition 8.4.1.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist von der Klasse  $C^1$ , falls zu jedem  $x_0 \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $U$  sowie ein Diffeomorphismus  $\Psi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$  auf  $V := \Psi(U)$  existieren mit

$$\Psi(x_0) = 0 \text{ und } \Psi(U \cap \Omega) = V \cap \{x = (x_1, \dots, x_n); x_n > 0\},$$

also auch

$$\Psi(U \cap \partial\Omega) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}).$$

Auf Gebiete der Klasse  $C^1$  können wir das Resultat aus Lemma 8.4.1 übertragen.

**Satz 8.4.1.** Sei  $\Omega$  von der Klasse  $C^1$  mit kompaktem Rand  $\Gamma$ . Dann gibt es einen linearen Fortsetzungsoperator  $E$ , der für jedes  $p \in [1, \infty]$  einen stetigen Operator  $E: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  induziert, so dass für jedes  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  gilt

i)  $(Eu)|_\Omega = u$ ,

ii)  $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$ ,

iii)  $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ ,

mit einer von  $p$  unabhängigen Konstanten  $C = C(\Omega)$ .

**Beweis.** Da  $\Omega$  von der Klasse  $C^1$ , und da  $\Gamma = \partial\Omega$  kompakt, existieren Umgebungen  $U_1, \dots, U_L$  mit  $\Gamma \subset \bigcup_{l=1}^L U_l$  und  $C^1$ -Diffeomorphismen  $H_l: Q \rightarrow U_l$  mit

$$H_l(Q_+) = U_l \cap \Omega, \quad H_l(Q_0) = U_l \cap \Gamma, \quad 1 \leq l \leq L.$$

Wähle  $U_0 \subset \Omega$  offen mit  $\text{dist}(U_0, \Gamma) > 0$  und mit  $\Omega \subset \bigcup_{l=0}^L U_l$ . Weiter sei  $(\varphi_l)_{0 \leq l \leq L}$  eine Zerlegung der Eins auf  $\Omega$  bzgl.  $(U_l)_{0 \leq l \leq L}$  mit

$$0 \leq \varphi_l \leq 1, \quad \text{supp}(\varphi_l) \subset U_l, \quad 0 \leq l \leq L, \quad \text{und} \quad \sum_{l=0}^L \varphi_l = 1 \quad \text{in } \Omega.$$



Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Zerlege  $u = \sum_{l=0}^L u_l$ , wobei  $u_l = \varphi_l u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $0 \leq l \leq L$ .

**Behauptung 1.**  $v_0 = \varphi_0 u \in W^{1,p}(\Omega)$  lässt sich durch

$$v_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

fortsetzen zu  $v_0 =: E u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\nabla v_0(x) = g(x) = \begin{cases} (u \nabla \varphi_0 + \varphi_0 \nabla u)(x), & x \in \Omega, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beweis.** Offenbar gilt  $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$ ; analog erhalten wir  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Beachte  $\varphi_0 \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_0 \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega} u \varphi_0 \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \nabla(\varphi_0 \varphi) \, dx - \int_{\Omega} u \varphi \nabla \varphi_0 \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u(\varphi_0 \varphi) \, dx - \int_{\Omega} u \varphi \nabla \varphi_0 \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (\varphi_0 \nabla u + u \nabla \varphi_0) \varphi \, dx = - \int_{\Omega} g \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} g \varphi \, dx; \end{aligned}$$

also  $g = \nabla v_0$ , und  $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Für  $1 \leq l \leq L$  setze

$$v_l(x) = \begin{cases} ((u_l \circ H_l)^* \circ H_l^{-1})(x), & x \in U_l, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $(u_l \circ H_l)^* \in W^{1,p}(Q)$  wie in Lemma 8.4.1 definiert ist.

**Behauptung 2.**  $v_l =: E u_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  ist wohldefiniert und hat die Eigenschaften i) - iii) des Satzes,  $1 \leq l \leq L$ .

**Beweis.** Nach Satz 8.3.3 gilt  $v_l|_{U_l} \in W^{1,p}(U_l)$ . Da mit

$$\text{supp}(u_l) \subset \text{supp}(\varphi_l) \cap \overline{\Omega} \subset\subset U_l$$

auch gilt  $\text{supp}(v_l) \subset\subset U_l$ , ist  $v_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  analog zu Behauptung 1 eine Fortsetzung von  $u_l$ . Weiter folgt mit Satz 8.3.3 bei geeigneter Substitution

$$\begin{aligned} \|v_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|((u_l \circ H_l)^* \circ H_l^{-1})\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C \|(u_l \circ H_l)^*\|_{W^{1,p}(Q)} \\ &\leq C \|u_l \circ H_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} \leq C \|u_l\|_{W^{1,p}(U_l \cap \Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

für jedes  $1 \leq l \leq L$  mit einer von  $p$  unabhängigen Konstanten  $C = C(\Omega)$ . Analog erhalten wir die Abschätzung ii).  $\square$

Mit der Linearität der verwendeten Zerlegung folgt der Satz aus den Behauptungen 1 und 2.  $\square$

Der Rand beschränkter Gebiete ist stets kompakt. Satz 8.4.1 zusammen mit Satz 8.2.1 liefern dann das folgende Resultat.

**Korollar 8.4.1.** *Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann liegt der Raum  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{1,p}(\Omega)$ .*

**Beweis.** Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  die Fortsetzung von  $u$  gemäss Satz 8.4.1. Nach Satz 8.2.1 gibt es  $(v_k) \subset C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit  $v_k \rightarrow v$  in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Für  $u_k = v_k|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$  gilt dann  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $\square$

Erstaunlicherweise gilt die Aussage von Korollar 8.4.1 auch für unbeschränkte Gebiete ohne weitere Annahmen an den Rand.

**Korollar 8.4.2.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann existiert zu jedem  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  eine Folge  $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|u_k|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).*

**Bemerkung 8.4.1.**  $\partial\Omega$  muss nicht kompakt sein.

**Beweis von Korollar 8.4.2.** Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  und sei  $\delta > 0$  vorgegeben.

**Behauptung 1.**  $\exists \tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$  mit  $\text{supp}(\tilde{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$  und  $\|\tilde{u} - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta$ .

**Beweis.** Sei  $\eta \in C_c^\infty(B_2(0))$  mit  $0 \leq \eta \leq 1$  und  $\eta \equiv 1$  auf  $B_1(0)$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze  $\eta_k(x) = \eta(x/k) \in C_c^\infty(B_{2k}(0))$  mit  $|\nabla \eta_k| \leq C/k$  und  $\eta_k \rightarrow 1$  fast überall ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\|\eta_k u - u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(1 - \eta_k)|^p dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Weiter gilt  $\nabla(\eta_k \cdot u) = u \nabla \eta_k + \eta_k \nabla u$ . Mit

$$\|u |\nabla \eta_k|\|_{L^p} \leq Ck^{-1} \|u\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

und  $\|\eta_k \nabla u - \nabla u\|_{L^p} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) erhalten wir

$$\|\nabla(\eta_k u) - \nabla u\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

also  $\eta_k u \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Setze  $\tilde{u} = \eta_k u$  für geeignetes  $k = k(\delta)$ .  $\square$

Da  $\partial\Omega \cap \text{supp}(\tilde{u})$  kompakt, liefert das im Beweis von Satz 8.4.1 benutzte Argument eine Fortsetzung  $\tilde{v} = E\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp}(\tilde{v}) \subset\subset \mathbb{R}^n$  und den Eigenschaften i)-iii) aus Satz 8.4.1; insbesondere  $\tilde{v}|_\Omega = \tilde{u}$ . Glättung durch Faltung liefert eine Schar  $\tilde{v}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{v} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) gemäss Lemma 7.3.3. Zum vorgegebenen  $\delta > 0$  wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$ . Es folgt

$$\|\tilde{v}_\varepsilon|_\Omega - u\|_{W^{1,p}} \leq \|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{v}|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < 2\delta.$$

$\square$

Steigen die Anforderungen an das Gebiet  $\Omega$ , wenn wir Funktionen in  $W^{k,p}(\Omega)$  für ein  $k > 1$  durch Funktionen in  $C^\infty(\bar{\Omega})$  approximieren wollen?

**Satz 8.4.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und von der Klasse  $C^1$  mit kompaktem Rand  $\partial\Omega = \Gamma$ . Dann liegt der Raum  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{k,p}(\Omega)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und jedes  $1 \leq p < \infty$ .

**Bemerkung 8.4.2.**  $\Omega \in C^1$  genügt für jedes  $k$ ! Wir können jedoch nicht gleich argumentieren wie im Beweis der Korollare 8.4.1 und 8.4.2.

**Beweis von Satz 8.4.2.** Da  $\Omega \in C^1$ , gibt es zu jedem Punkt  $x_0 \in \Gamma$  Koordinaten und einen Zylinder  $U = Q_r = B_r(0; \mathbb{R}^{n-1}) \times ]-r, r[$  um  $x_0 = 0$ , so dass  $U \cap \Gamma$  Graph einer  $C^1$ -Funktion  $\psi$  über dem Tangentialraum  $T_{x_0}\Gamma = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  an  $\Gamma$  im Punkt  $x_0$  ist und mit

$$U \cap \Omega = \{(x', x_n); |x'| < r, \psi(x') < x_n < r\}.$$

Zudem können wir annehmen, dass

$$\nu(x) \cdot \nu(x_0) \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in \Gamma \cap U, \quad (8.4.2)$$

wobei  $\nu(x)$  die äussere Normale an  $\Omega$  bezeichnet, mit  $\nu(x_0) = -e_n$ .

Überdecke  $\Gamma$  mit endlich vielen derartigen Umgebungen  $U_1, \dots, U_L$  um Punkte  $x_l \in \Gamma$ ,  $1 \leq l \leq L$ , und wähle  $U_0 \subset \Omega$  offen mit  $\Omega \subset \cup_{l=0}^L U_l$  wie im Beweis von Satz 8.4.1. Weiter sei  $(\varphi_l)_{0 \leq l \leq L}$  eine Zerlegung der Eins auf  $\Omega$  bezüglich  $(U_l)_{0 \leq l \leq L}$ , und sei  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ .

Zerlege  $u = \sum_{l=0}^L u_l$  mit  $u_l = u\varphi_l \in W^{k,p}(\Omega)$  für jedes  $l$ . Wir konstruieren glatte Näherungen für  $u_l$ ,  $0 \leq l \leq L$ . Sei dazu  $0 \leq \rho \in C_c^\infty(B_1(0))$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$  ein Standard-Mollifier, und skaliere  $\rho_\delta(x) = \delta^{-n} \rho(x/\delta) \in C_c^\infty(B_\delta(0))$ ,  $\delta > 0$ .

$l = 0$ : Da  $K_0 := \text{supp}(u_0) \subset \text{supp}(\varphi_0) \subset U_0 \subset \Omega$  mit  $\delta_0 := \text{dist}(K_0, \partial\Omega) > 0$ , gilt für  $0 < \delta < \delta_0$  die Beziehung

$$v_0^\delta = \rho_\delta * u_0 \in C_c^\infty(\Omega), \quad \text{und } \|v_0^\delta - u_0\|_{W^{k,p}} \rightarrow 0 \quad (\delta \downarrow 0)$$

analog zum Beweis von Satz 8.2.1.

$l \geq 1$ : Wähle Koordinaten mit  $x_l = 0$  und  $U_l = Q_{r_l}$  wie oben. Es gilt

$$K_l := \text{supp}(u_l) \subset \text{supp}(\varphi_l) \subset\subset U_l$$

mit  $\delta_l := \text{dist}(K_l, \partial U_l) > 0$ . Mit (8.4.2) erhalten wir für  $x \in U_l \cap \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $x + \varepsilon e_n \in K_l$  die Abschätzung  $\text{dist}(x + \varepsilon e_n, U_l \cap \Gamma) \geq \varepsilon/2$ .

Für  $\varepsilon > 0$  setze  $v_l^\varepsilon = u_l \circ T_\varepsilon \in W^{k,p}(U_l \cap \Omega)$ , wobei  $T_\varepsilon$  die Verschiebung

$$T_\varepsilon: U_l \cap \Omega \ni x \mapsto x + \varepsilon e_n \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet.

**Behauptung 1.** Es gilt  $v_l^\varepsilon \in W^{k,p}(U_l \cap \Omega)$  mit  $\partial^\alpha v_l^\varepsilon = (\partial^\alpha u_l) \circ T_\varepsilon \in L^p$  für alle  $|\alpha| \leq k$ , und  $\|v_l^\varepsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

**Beweis.** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(U_l \cap \Omega)$ ,  $|\alpha| \leq k$ . Für  $\varepsilon > 0$  gilt nach geeigneter Substitution

$$\begin{aligned} \int_{U_l \cap \Omega} ((\partial^\alpha u_l) \circ T_\varepsilon) \varphi \, dx &= \int_\Omega \partial^\alpha u_l (\varphi \circ T_\varepsilon^{-1}) \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_l \partial^\alpha (\varphi \circ T_\varepsilon^{-1}) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_l ((\partial^\alpha \varphi) \circ T_\varepsilon^{-1}) \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (u_l \circ T_\varepsilon) \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{U_l \cap \Omega} v_l^\varepsilon \partial^\alpha \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Da weiter für  $f \in C^0(U_l \cap \overline{\Omega})$  gilt  $\|f \circ T_\varepsilon - f\|_{L^p(U_l \cap \Omega)} \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), und da jedes  $\partial^\alpha u_l$ ,  $|\alpha| \leq k$ , durch Funktionen  $(f_{lm}^\alpha)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^0(U_l \cap \overline{\Omega})$  in  $L^p(U_l \cap \Omega)$  approximiert werden kann, folgt die Behauptung.  $\square$

Beachte, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  zur Definition von  $v_l^\varepsilon$  nur die Definition von  $u$  an Punkten  $x \in K_l$  benutzt wird, wo  $\text{dist}(x, U_l \cap \Gamma) \geq \varepsilon/2$ . Für  $\varepsilon \leq 2\delta_l$  können wir daher wie im Falle  $l = 0$  durch Faltung glätten.

Für  $0 < \delta < \varepsilon/2 \leq \delta_l$  setze  $v_l^{\delta, \varepsilon} = \rho_\delta * v_l^\varepsilon \in C^\infty(U_l \cap \overline{\Omega})$ . Wie in Lemma 7.3.3 folgt  $\|v_l^{\delta, \varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{L^p(U_l \cap \Omega)} \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ). Analog erhalten wir für jedes  $|\alpha| \leq k$  für  $\partial^\alpha v_l^{\delta, \varepsilon} = \rho_\delta * \partial^\alpha v_l^\varepsilon$  die Konvergenz

$$\|\partial^\alpha v_l^{\delta, \varepsilon} - \partial^\alpha v_l^\varepsilon\|_{L^p(U_l \cap \Omega)} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0);$$

also  $\|v_l^{\delta, \varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ).

Zu vorgegebenem  $\gamma > 0$  gibt es also  $0 < \delta < \varepsilon/2 \leq \delta_l$  mit

$$\|v_l^{\delta, \varepsilon} - u_l\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} \leq \|v_l^{\delta, \varepsilon} - v_l^\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} + \|v_l^\varepsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} < \gamma.$$

Die Behauptung des Satzes folgt.  $\square$

**Bemerkung 8.4.3.** i) Allgemeiner genügt für die Aussage des Satz 8.4.2, dass  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen mit kompaktem Rand  $\partial\Omega$  die Segmenteigenschaft besitzt; vergleiche Adams: “Sobolev spaces”, S. 66.

ii) Es lassen sich sogar für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 < p < \infty$  Funktionen  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  analog zu Satz 8.4.1 fortsetzen, sofern  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen mit kompaktem Rand  $\partial\Omega$  nur eine gleichmässige Kegelbedingung erfüllt; siehe Adams, Satz 4.32. Dies ist insbesondere bei Gebieten  $\Omega \in C^1$  mit kompaktem Rand der Fall. Der Beweis dieses auf Calderón zurückgehenden Fortsetzungssatzes benutzt die Calderón-Zygmund Abschätzung aus der Theorie der singulären Integraloperatoren, was die Einschränkung  $1 < p < \infty$  erklärt.

Wie kann man für  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  sinnvoll die “Spur”  $u|_{\partial\Omega}$  erklären?

**Lemma 8.4.2.** Sei  $u \in W^{1,p}(Q_+)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann ist  $u|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$  wohldefiniert, und der „Spuroperator“

$$W^{1,p}(Q_+) \ni u \mapsto u|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$$

ist linear und stetig.

**Beweis.** i) Sei  $u \in C^1(Q)$ . Für  $x' \in Q_0$  gilt

$$u(x', 0) = u(x', x_n) - \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s) ds.$$

Nach Mittelung bzgl.  $x_n$  erhalten wir die Abschätzung

$$|u(x', 0)| \leq \int_0^1 |u(x', x_n)| dx_n + \int_0^1 |\nabla u(x', s)| ds.$$

Für  $1 \leq p < \infty$  folgt mit der Minkowski- und der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u(x', 0)\|_{L^p(Q_0)} &\leq \int_0^1 \|u(\cdot, x_n)\|_{L^p(Q_0)} dx_n + \int_0^1 \|\nabla u(\cdot, x_n)\|_{L^p(Q_0)} dx_n \\ &\leq \|u\|_{L^p(Q_+)} + \|\nabla u\|_{L^p(Q_+)} = \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}. \end{aligned}$$

ii) Sei  $u \in W^{1,p}(Q)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Nach Satz 8.2.1 gibt es  $(u_k) \subset W^{1,p} \cap C^1(Q)$  mit  $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit i) folgt

$$\|u_k|_{Q_0} - u_l|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \leq \|u_k - u_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty).$$

Da  $L^p(Q_0)$  vollständig ist, existiert  $u|_{Q_0} := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$ , und

$$\|u|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{W^{1,p}(Q_+)} = \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

iii) Sei  $u \in W^{1,p}(Q_+)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Betrachte  $u^* \in W^{1,p}(Q)$  gemäss Lemma 8.4.1 und benutze ii)!

iv) Sei  $u \in W^{1,\infty}(Q_+)$ . Da  $Q_+ \subset \subset \mathbb{R}^n$ , gilt  $u \in W^{1,p}(Q_+)$  für jedes  $p < \infty$ . Wähle  $(u_k) \subset C^1(Q)$  mit  $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für jedes  $p < \infty$ . Mit ii) erhalten wir eine von  $p < \infty$  unabhängige Spur  $u|_{Q_0} \in \bigcap_{p < \infty} L^p(Q_0)$  mit

$$\|u|_{Q_0}\|_{L^\infty(Q_0)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(Q_+)}.$$

□

Für ein  $\Omega$  der Klasse  $C^1$  mit kompaktem Rand  $\partial\Omega = \Gamma$  kann man den "Spurraum"  $L^p(\Gamma)$  mittels lokaler "Karten"  $H: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $H(Q_+) = \Omega \cap U$ ,  $H(Q_0) = \Gamma \cap U$  erklären. Die durch verschiedene Überdeckungen von  $\Gamma$  definierten Normen auf  $L^p(\Gamma)$  sind äquivalent.

**Satz 8.4.3. (Spursatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, von der Klasse  $C^1$ , und sei der Rand  $\partial\Omega = \Gamma$  kompakt. Dann ist der Spuroperator

$$W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto u|_\Gamma \in L^p(\Gamma)$$

für alle  $1 \leq p \leq \infty$  wohldefiniert und stetig; das heisst, es gilt

$$\|u|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

**Beweis.** Übung

□

**Bemerkung 8.4.4.** i) Der Spuroperator ist nicht surjektiv. Insbesondere liefert Korollar 8.3.1 für  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$  einen lokal Lipschitz stetigen Repräsentanten  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  mit Spur  $u|_\Gamma \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ . Daher “definiert” man für  $1 \leq p \leq \infty$  als Spurraum

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = \{u|_\Gamma; u \in W^{1,p}(\Omega)\}$$

mit der Norm

$$\|u|_\Gamma\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} = \inf_{v \in W^{1,p}(\Omega); u-v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Die Räume  $W^{s,p}$  mit  $s \notin \mathbb{Z}$  lassen sich auch intrinsisch definieren; siehe Adams, “Sobolev spaces”, S. 208 ff.

ii) Für  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$  für geeignete  $(u_k) \subset C_c^\infty(\Omega)$  gilt  $u|_\Gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k|_\Gamma = 0$  in  $L^2(\Gamma)$ ; das heisst, die schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  des Dirichlet Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

erfüllt die Randbedingung  $u = 0$  fast überall.

Betrachte nun auch Randdaten  $u_0|_\Gamma$ , wobei  $u_0 \in H^1(\Omega)$ .

**Satz 8.4.4.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ . Dann gilt

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \{u_0 \in H^1(\Omega); \Delta u_0 = 0\}, \quad (8.4.3)$$

und für  $u = u_0 + u_1 \in H^1(\Omega)$  mit  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\Delta u_0 = 0$  gilt

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2. \quad (8.4.4)$$

Zu jedem  $u \in H^1(\Omega)$  gibt es also eine eindeutige harmonische Fortsetzung  $u_0$  von  $u|_\Gamma$ , und  $u_0$  hat minimale Dirichlet-Energie

$$E(u_0) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \min_{v \in H^1(\Omega), u-v \in H_0^1(\Omega)} E(v).$$

**Beweis.** Zu  $u \in H^1(\Omega)$  sei  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$  die eindeutige Lösung des Problems

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega): \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx, \quad (8.4.5)$$

gemäss Riesz, Satz 4.3.2, wobei wir beachten, dass  $\nabla u \in L^2$ . Setze  $u_0 = u - u_1$ . Dann gilt wegen (8.4.5) für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  die Gleichung

$$\int_\Omega (-\Delta u_0) \varphi dx = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi dx = 0,$$

wobei wir  $\Delta u_0$  als Distributionsableitung deuten; das heisst,  $\Delta u_0 = 0$ , und der erste Teil von (8.4.3) ist bewiesen. Weiter erhalten wir

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla(u_0 + u_1)\|_{L^2}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + 2 \int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1 dx.$$

Da  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ , existiert  $(\varphi_k) \subset C_c^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi_k \rightarrow u_1$  in  $H^1(\Omega)$ , und

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla u_1 \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \varphi_k \, dx = 0, \quad (8.4.6)$$

was (8.4.4) zeigt. Falls  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit  $\Delta u = 0$ , so ergibt (8.4.6) zudem mit  $u_0 = u_1 = u/2$  sofort  $\nabla u = 0$ , zusammen mit der Poincaré'schen Ungleichung, Lemma 7.1.2, also  $u = 0$ . Die Zerlegung (8.4.3) von  $H^1(\Omega)$  ist daher direkt.  $\square$

**Korollar 8.4.3.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ . Es gilt  $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u|_{\Gamma} = 0\}$ , wobei die Spur  $u|_{\Gamma}$  gemäss Satz 8.4.3 erklärt ist.

**Beweis.** “ $\subset$ ” folgt mit Bemerkung 8.4.4.ii). Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei  $u \in H^1(\Omega)$  mit  $u|_{\Gamma} = 0$ . Dann ist  $u_0 = 0$  schwache Lösung des Dirichlet Problems  $\Delta u_0 = 0$  in  $\Omega$ ,  $u_0|_{\Gamma} = 0$ ; gemäss Satz 8.4.4 also  $u = u_1 \in H_0^1(\Omega)$ .  $\square$

## 8.5 Sobolev-Einbettung, $p < n$

Betrachte zunächst  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

**Satz 8.5.1. (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)** Sei  $1 \leq p < n$  und sei der “Sobolev-Exponent”  $p^* > p$  gegeben durch  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ; das heisst,  $p^* = \frac{np}{n-p}$ . Dann gilt  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ , und

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , wo  $C = C(n, p) = \frac{(n-1)p}{n-p}$ .

**Bemerkung 8.5.1.** Bei Skalierung  $u \mapsto u_R(x) = u(Rx)$  gilt

$$\begin{aligned} \|\nabla u_R\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^p \, dx = R^{p-n} \|\nabla u\|_{L^p}^p, \\ \|u_R\|_{L^q}^q &= R^{-n} \|u\|_{L^q}^q. \end{aligned}$$

Falls es eine Beziehung  $\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$  gibt, so gilt

$$R^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q} = \|u_R\|_{L^q} \leq C \|\nabla u_R\|_{L^p} = CR^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p},$$

für alle  $R > 0$ , also

$$\forall R > 0: R^{(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - 1)} \leq C(n);$$

das heisst,  $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q}$ . Die Zahl  $p^*$  ist somit der einzig mögliche Exponent.

**Beweis von Satz 8.5.1.** i) Betrachte zunächst  $p = 1$  und  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für festes  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  schätze ab

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |u(x_1, \dots, x_n) - \lim_{s \rightarrow -\infty} u(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) \, ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)| \, ds =: f_i(x'_i), \end{aligned}$$

wobei  $x'_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Es folgt

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n (f_i(x'_i))^{\frac{1}{n-1}} \quad (8.5.1)$$

mit  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(x'_i) dx'_i = \|\nabla u\|_{L^1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Behauptung 1.** Es gilt  $\prod_{i=1}^n (f_i(x'_i))^{\frac{1}{n-1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\left\| \prod_{i=1}^n (f_i(x'_i))^{\frac{1}{n-1}} \right\|_{L^1} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_i(y)) dy \right)^{\frac{1}{n-1}} = \|\nabla u\|_{L^1}^{\frac{n}{n-1}}.$$

**Beweis.** (Induktion nach  $n$ )

$n = 2$ : Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \prod_{i=1}^2 f_i(x'_i) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2) f_2(x_1) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1) dx_1 = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

$n \rightarrow n+1$ : Da  $\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$ , folgt mit  $x = (x', x_{n+1})$  zu festem  $x_{n+1}$  mit Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n+1} (f_i(x'_i))^{\frac{1}{n}} dx' &\leq \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n (f_i(x'_i))^{\frac{1}{n-1}} dx' \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \cdot \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(y, x_{n+1}) dy \right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Induktionsvoraussetzung benutzen. Da weiter  $1 = n \cdot 1/n$ , folgt erneut mit Hölder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(y, x_{n+1}) dy \right)^{\frac{1}{n}} dx_{n+1} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}};$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} (f_i(x'_i))^{\frac{1}{n}} dx \leq \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})}^{\frac{n+1}{n}},$$

wie gewünscht.  $\square$

Mit Behauptung 1 und (8.5.1) folgt für alle  $n \geq 2$ ,  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  die Abschätzung

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (8.5.2)$$

ii) Sei nun  $1 < p < n$ , und sei zunächst weiter  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Betrachte  $v = u^t$  für ein noch zu bestimmendes  $t \geq 1$ . Sei  $q = \frac{p}{p-1}$  zu  $p$  konjugiert. Mit (8.5.2) folgt mit Hölder

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^t \leq \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| |u|^{t-1} dx \leq t \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{(t-1)q}(\mathbb{R}^n)}^{t-1}. \end{aligned} \quad (8.5.3)$$



Wähle  $t$  so, dass

$$\frac{tn}{n-1} = (t-1)q = \frac{(t-1)p}{p-1};$$

das heisst,

$$t\left(\frac{n}{n-1} - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{p}{p-1} = 0$$

oder

$$t = \frac{p(n-1)}{p(n-1) - n(p-1)} = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

Somit erhalten wir den Sobolev Exponenten

$$\frac{tn}{n-1} = \frac{pn}{n-p} = p^*,$$

und Abschätzung (8.5.3) ergibt

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq t \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{p(n-1)}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

iii) Schliesslich sei  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Nach Satz 8.2.1 gibt es  $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|u - u_k\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit (8.5.2), bzw. (8.5.3) folgt

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty),$$

also  $u_k \rightarrow u$  in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$  ( $k \rightarrow \infty$ ), und  $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .  $\square$

**Bemerkung 8.5.2.** i) Für  $p = 1$  gibt es eine enge Beziehung zwischen Satz 8.5.1 und der isoperimetrischen Ungleichung

$$(\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n) \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \quad (8.5.4)$$

für  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  der Klasse  $C^1$ .

Sei  $0 \leq u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit nur endlich vielen kritischen Punkten in  $\text{supp}(u)$ . Nach lokaler Substitution  $\Phi(x', x_n) = (x', u(x))$  (in geeigneten Koordinaten, so dass  $\frac{\partial u}{\partial x_n} \neq 0$ ) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \, dx = \int_0^\infty \left( \int_{\{x; u(x)=t\}} d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t)) \, dt, \quad (8.5.5)$$

wobei  $\Omega(t) = \{x; u(x) > t\}$ ,  $t \geq 0$ . Mit der Darstellung

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{\Omega(t)}(x) \, dt,$$

und mit der Minkowski-Ungleichung erhalten wir sodann

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} &\leq \int_0^\infty \|\chi_{\Omega(t)}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} dt = \int_0^\infty (\mathcal{L}^1(\Omega(t)))^{\frac{n-1}{n}} dt \\ &\stackrel{(8.5.4)}{\leq} C(n) \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t)) \, dt \stackrel{(8.5.5)}{\leq} C(n) \|\nabla u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man für  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  der Klasse  $C^1$  glatte Funktionen  $0 \leq u_k \leq 1$  finden mit  $u_k = 0$  auf  $\partial\Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $u_k \rightarrow \chi_\Omega$  fast überall in  $\Omega$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k| \, dx = \int_0^\infty \left( \int_{\{x; u_k(x)=t\}} d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt \rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit

$$\|u_k\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \rightarrow \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = (\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \quad (k \rightarrow \infty)$$

und Satz 8.5.1 folgt (8.5.4).

ii) Der Grenzfall  $p = n$ : Nach Beispiel 8.1.2.ii) gilt

$$\log \log \left( \frac{1}{|x|} \right) \in W^{1,n}(B_{1/e}(0)), \quad n \geq 2;$$

das heisst,  $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ . Bemerkung 8.5.1 zeigt, dass andererseits auch keine Ungleichung der Art

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^n}$$

für ein  $q < \infty$  bestehen kann.

**Satz 8.5.2.** *Es gilt  $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $n \leq p < \infty$ , und*

$$\forall u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n): \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Beweis.** Sei  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ . Mit (8.5.3) und Hölder folgt

$$\|u\|_{L^{\frac{tn}{n-1}}}^t \leq t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| |u|^{t-1} \, dx \leq t \|\nabla u\|_{L^n} \|u\|_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}}^{t-1}.$$

Bei Wahl von  $t = n$  erhalten wir aus der Youngschen Ungleichung

$$\|u\|_{L^{\frac{n^2}{n-1}}}^n \leq n \|\nabla u\|_{L^n} \|u\|_{L^n}^{n-1} \leq \|\nabla u\|_{L^n}^n + (n-1) \|u\|_{L^n}^n \leq C \|u\|_{W^{1,n}}^n.$$

Iteration mit  $t = n+1, n+2, \dots$  ergibt  $\|u\|_{L^{p_k}} \leq C_k \|u\|_{W^{1,n}}$  für eine Folge von Exponenten  $p_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die Behauptung für jedes  $q \geq n$ .  $\square$

Wir betrachten nun auch Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Satz 8.5.3.** *Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ , und sei  $1 \leq p < n$  mit Sobolev-Exponent  $p^*$ , wo  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ . Dann gilt  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  für jedes  $1 \leq q \leq p^*$ , und die Einbettung ist kompakt für  $q < p^*$ .*

**Bemerkung 8.5.3.** i) Wegen Skalierungsinvarianz entsprechend Bemerkung 8.5.1 können wir für  $q = p^*$  keine Kompaktheit erwarten. Sei z.B.  $\Omega = B_1(0)$ ,  $u \in C_c^\infty(B_1(0))$ , und für  $R \geq 1$  betrachte  $u_R(x) = R^{\frac{n-p}{p}} u(Rx) \in C_c^\infty(B_{1/R}(0))$  mit  $\|\nabla u_R\|_{L^p} = \|\nabla u\|_{L^p}$ ,  $\|u_R\|_{L^{p^*}} = \|u\|_{L^{p^*}}$  und mit

$$u_R \xrightarrow{w} 0 \text{ in } W^{1,p}(B_1(0)) \quad (R \rightarrow \infty).$$

ii) Die Kompaktheitsaussage im Fall  $q < p^*$  stammt von Rellich und Kondrakov.

iii) Falls  $\Omega$  nicht von der Klasse  $C^1$  ist, so ist die Kompaktheitsaussage im Allgemeinen falsch. Betrachte dazu  $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} B_{1/k^3}(x_k)$ , wobei  $x_k \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ) mit  $|x_k - x_l| > 2/k^2$  für  $k > l \in \mathbb{N}$ , und dazu die Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$  mit  $u_k = k^{3n/p}$  auf  $B_{1/k^3}(x_k)$  und  $u_k = 0$  sonst,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $u_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) fast überall bei konstanter Norm  $\|u_k\|_{W^{1,p}} = \|u_k\|_{L^p} = c > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis von Satz 8.5.3.** i) Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Nach Satz 8.4.1 gibt es  $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  mit  $v|_{\Omega} = u$ , und mit Satz 8.5.1 folgt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Da  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, folgt  $u \in L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq p^*$  und

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(n, p, q, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

ii) Sei  $\mathcal{F} \subset W^{1,p}(\Omega)$  beschränkt. Zu  $u \in \mathcal{F}$  betrachte  $v = Eu$  aus Satz 8.4.1. Nach Satz 8.3.1 gilt für  $|h| \leq 1$  die Abschätzung

$$\sup_{v=Eu, u \in \mathcal{F}} \|\tau_h v - v\|_{L^p(\Omega)} \leq C|h| \sup_{v=Eu, u \in \mathcal{F}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C|h| \sup_{u \in \mathcal{F}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

wobei  $\tau_h v = v(\cdot + h)$ . Mit dem Satz von Fréchet-Kolmogorov, Satz 6.3.2, folgt relative Kompaktheit von  $\mathcal{F}$  in  $L^p(\Omega)$ .

Sei nun  $1 \leq q < p^*$  beliebig,  $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$  beschränkt. OBdA gelte  $u_k \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$ . Da  $\Omega$  beschränkt, können wir für  $q \leq p$  mit Hölder abschätzen

$$\|u_k - u\|_{L^q} \leq C \|u_k - u\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Für  $p < q < p^*$  wähle  $0 < \alpha < 1$  mit  $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$  und schätze ab

$$\|u_k - u\|_{L^q} \leq \|u_k - u\|_{L^p}^{\alpha} \|u_k - u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

□

**Korollar 8.5.1.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ . Dann gilt  $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  für  $1 \leq q < \infty$ , und die Einbettung ist kompakt für jedes  $q$ .

**Beweis.** Es gilt  $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$  für jedes  $p < n$ . □

## 8.6 Sobolev-Einbettung, $p > n$

### 8.6.1 Hölder-Räume

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Definition 8.6.1.**  $u$  ist Hölder stetig mit Exponent  $\alpha$ , falls

$$\forall x, y \in \Omega: |u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^{\alpha}.$$

Der Ausdruck

$$[u]_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

heißt Hölder (Halb-)Norm.

**Bemerkung 8.6.1.** i) Ein mit Exponent  $\alpha > 0$  Hölder stetiges  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig und lässt sich daher zu  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  fortsetzen.

ii) Falls  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ , so definiert

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}}$$

eine Norm auf dem Raum

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^0(\bar{\Omega}); u \text{ ist Hölder stetig mit Exponent } \alpha\}.$$

iii) Für allgemeines offenes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert  $\|u\|_{C^{0,\alpha}}$  eine Norm auf dem Raum

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^0(\bar{\Omega}); \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}} < \infty\}.$$

**Beispiel 8.6.1.** i)  $u \in C^{0,1}(\Omega)$ , genau dann, wenn  $u$  Lipschitz stetig ist.

ii) Sei  $\Omega = ]-1, 1[$ ; dann ist  $u(x) = |x|^\alpha \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ .

iii) Für  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$  gilt  $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$ , wo  $C^{0,0}(\Omega) = C^0(\bar{\Omega})$ .

**Satz 8.6.1.**  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  ist vollständig,  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Beweis.** Sei  $(u_k) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$  eine Cauchy-Folge. Dann ist  $(u_k)$  auch Cauchy-Folge in  $C^0(\bar{\Omega})$ , und es existiert  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  mit

$$\|u_k - u\|_{C^0} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Behauptung 1.**  $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ .

**Beweis.** Für  $x \neq y \in \Omega$  schätze ab

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(x) - u_k(y)| \leq \sup_k [u_k]_{C^{0,\alpha}} |x - y|^\alpha \leq C |x - y|^\alpha.$$

□

**Behauptung 2.**  $u_k \rightarrow u$  ( $k \rightarrow \infty$ ) in  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ .

**Beweis.** Für  $x \neq y \in \Omega$  schätze ab

$$\begin{aligned} \frac{|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} [u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

gleichmäßig bzgl.  $x, y \in \Omega$ . Nach Übergang zum Supremum bzgl.  $x \neq y \in \Omega$  folgt die Behauptung. □

Somit konvergiert  $(u_k)$  in  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ , wie gewünscht.  $\square$

**Satz 8.6.2.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist für  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$  die Einbettung

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$$

kompakt.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{F} \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$  beschränkt. Dann ist  $\mathcal{F}$  auch beschränkt in  $C^0(\bar{\Omega})$ . Da für  $x \neq y$  und beliebiges  $u \in \mathcal{F}$  gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{v \in \mathcal{F}} [v]_{C^{0,\alpha}} |x - y|^\alpha,$$

ist  $\mathcal{F}$  zudem gleichgradig stetig und daher gemäss dem Satz von Arzela-Ascoli, Satz 6.3.1, relativ kompakt in  $C^0(\bar{\Omega})$ . Fixiere nun  $\beta < \alpha$ .

**Behauptung 1.**  $\mathcal{F}$  ist relativ kompakt in  $C^{0,\beta}(\Omega)$ .

**Beweis.** Sei  $(u_k) \subset \mathcal{F}$ . OBdA  $u_k \rightarrow u$  in  $C^0(\bar{\Omega})$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Für  $x \neq y \in \Omega$  schätze ab

$$\begin{aligned} & \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\beta} \\ & \leq 2 \|u_k - u_l\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} \left( \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\alpha} \right)^{\beta/\alpha} \\ & \leq 2 \|u_k - u_l\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} [u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}}^{\beta/\alpha} \leq C \|u_k - u_l\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$[u_k - u_l]_{C^{0,\beta}} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\beta} \leq C \|u_k - u_l\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha},$$

und  $(u_k)$  ist Cauchy-Folge in  $C^{0,\beta}(\Omega)$ . Da  $C^{0,\beta}(\Omega)$  nach Satz 8.6.1 vollständig ist, folgt  $u \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$  und

$$[u_k - u]_{C^{0,\beta}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

$\square$

Die Aussage des Satzes folgt.  $\square$

**Bemerkung 8.6.2.** Im Unterschied zum Fall  $\alpha = 0$  liegt für  $0 < \alpha \leq 1$  der Raum  $C^\infty(\bar{\Omega})$  nicht dicht in  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ .

**Beweis.** Betrachte z.B.  $\Omega = ]-1, 1[$ ,  $u(x) = |x|^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Nimm an, es existiere  $(u_k) \subset C^1([0, 1])$  mit  $\|u_k - u\|_{C^{0,\alpha}} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Beachte, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$ , alle  $0 < |x| < 1$  gemäss Mittelwertsatz eine Zahl  $0 \leq \theta \leq 1$  existiert mit

$$u_k(x) - u_k(0) = u_k'(\theta x)x.$$

Es folgt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \lim_{|x| \downarrow 0} \frac{u_k(x) - u_k(0)}{x} = u_k'(0),$$

und damit

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}: [u_k - u]_{C^{0,\alpha}} &\geq \limsup_{|x| \downarrow 0} \frac{|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(0)|}{|x|^\alpha} \\ &= \limsup_{x \downarrow 0} \left| u'_k(0) \frac{x}{|x|^\alpha} - 1 \right| \geq 1 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Wir können nun den Sobolev-Einbettungssatz auf  $\mathbb{R}^n$  formulieren.

**Satz 8.6.3.** Sei  $p > n$ . Dann gilt  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ , und mit einer von  $u$  unabhängigen Konstanten  $C > 0$  gilt

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n): \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Zum Beweis benützen wir eine äquivalente Integral-Norm auf  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ .

## 8.6.2 Campanato Räume

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für  $x_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  setze

$$\Omega_r(x_0) = B_r(x_0) \cap \Omega.$$

**Definition 8.6.2.**  $\Omega$  heisst vom Typ  $A$  für ein  $A > 0$ , falls für alle  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r < \min\{1, \text{diam}(\Omega)\} =: r_0(\Omega)$  gilt

$$\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0)) \geq Ar^n.$$

**Beispiel 8.6.2.** Jedes  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$  ist vom Typ  $A$  für eine Zahl  $A > 0$ .

Für  $\Omega$  vom Typ  $A > 0$ ,  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r < r_0(\Omega)$  setze

$$u_{x_0,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} u \, dx =: \int_{\Omega_r(x_0)} u \, dx.$$

**Definition 8.6.3.** Für  $1 \leq p < \infty$ ,  $\lambda > 0$  setze

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} < \infty\},$$

wobei

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x_0 \in \Omega, 0 < r < r_0} \left( r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Satz 8.6.4.**  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  ist vollständig bzgl. der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \|u\|_{L^p} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

**Beweis.** Übung. □

**Satz 8.6.5. (Campanato)** Sei  $\Omega$  von Typ  $A$  für ein  $A > 0$ , und seien  $\lambda > n$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ . Dann gilt  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , und

$$\forall u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega): \|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$$

mit einer von  $u$  unabhängigen Konstanten  $C > 0$ .

Satz 8.6.3 lässt sich auf Satz 8.6.5 zurückführen mit der folgenden Variante der Poincaré-Ungleichung.

**Satz 8.6.6. (Poincaré)** Sei  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p dx \leq Cr^p \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p dx.$$

**Beweis von Satz 8.6.3.** Mit Satz 8.6.6 und Satz 8.6.5 folgt

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

wobei  $\alpha = \frac{p-n}{p} = 1 - \frac{n}{p}$ . □

**Beweis von Satz 8.6.6.** Sei  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ . OBdA  $x_0 = 0$ ,  $B_r(0) = B_r$ . Schätze ab mit Hölder

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |u - u_{x_0,r}|^p dx &= \int_{B_r} \left| \int_{B_r} (u(x) - u(y)) dy \right|^p dx \\ &= Cr^{-np} \int_{B_r} \left| \int_{B_r} 1 \cdot (u(x) - u(y)) dy \right|^p dx \\ &\leq Cr^{-np+n(p-1)} \int_{B_r} \int_{B_r} |u(x) - u(y)|^p dy dx. \end{aligned}$$

Da  $np - n(p-1) = n$ , folgt für  $x, y \in B_r$  mit

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(y-x)) dt \right| \\ &\leq |x-y| \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)| dt \leq 2r \left( \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\int_{B_r} |u(x) - u_{x_0,r}|^p dx \leq Cr^{p-n} \int_{B_r} \int_{B_r} \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p dt dx dy.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie in  $x, y \in B_r$  erhalten wir mit Fubini und bei

Substitution von  $z = ty + (1-t)x \in B_{(1-t)r}(ty) \subset B_r$  bei festem  $y \in B_r$  somit

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |u(x) - u_{x_0,r}|^p dx &\leq Cr^{p-n} \int_0^{1/2} \int_{B_r} \int_{B_r} |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p dx dy dt \\ &\leq Cr^{p-n} \int_0^{1/2} \int_{B_r} \int_{B_{(1-t)r}(ty)} |\nabla u(z)|^p dz dy dt \\ &= Cr^p \int_{B_r} |\nabla u(z)|^p dz, \end{aligned}$$

wie gewünscht. Da der Raum  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  nach Korollar 8.4.2 in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  dicht liegt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 8.6.5.** Sei  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  für ein  $\lambda > n$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

i) Wir konstruieren zunächst einen geeigneten Repräsentanten. Sei  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r < r_0(\Omega) = \min\{1, \text{diam}(\Omega)\}$ . Für  $i \in \mathbb{N}$  setze  $r_i = 2^{-i}r$  und betrachte  $(u_{x_0,r_i})_{i \in \mathbb{N}}$ .

**Behauptung 1.**  $(u_{x_0,r_i})_{i \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge.

**Beweis.** Da  $\Omega$  vom Typ A, gilt für jedes  $i \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_{x_0,r_{i+1}} - u_{x_0,r_i}| &\leq \int_{\Omega_{r_{i+1}}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}| dx \\ &\leq Cr_{i+1}^{-n} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}| dx \leq C \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}| dx. \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}| dx \leq \left( \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}|^p dx \right)^{1/p}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |u_{x_0,r_{i+1}} - u_{x_0,r_i}| &\leq C \left( \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq Cr_i^{\frac{\lambda-n}{p}} (r_i^{-\lambda} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u - u_{x_0,r_i}|^p dx)^{1/p} \leq Cr_i^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

mit einer nur von der Zahl  $A$  abhängigen Konstanten  $C \geq 0$ , und

$$\begin{aligned} |u_{x_0,r_{i+k}} - u_{x_0,r_i}| &\leq \sum_{j=1}^k |u_{x_0,r_{i+j}} - u_{x_0,r_{i+j-1}}| \leq C \sum_{j=1}^k r_{i+j}^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \\ &\leq Cr_i^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty, k = k_i \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

$\square$

Für alle  $x_0 \in \Omega$  existiert somit  $\bar{u}(x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_{x_0,r_i}$ , und

$$\forall i \in \mathbb{N}: |\bar{u}(x_0) - u_{x_0,r_i}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u_{x_0,r_{i+k}} - u_{x_0,r_i}| \leq Cr_i^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}. \quad (8.6.3)$$



Wegen Absolutstetigkeit des Integrals ist für festes  $r > 0$  die Funktion  $x_0 \mapsto u_{x_0,r}$  stetig. Gemäss (8.6.3) konvergiert  $(u_{x_0,r_i})_{i \in \mathbb{N}}$  gleichmässig gegen  $\bar{u}$ ; also ist auch  $\bar{u}$  stetig. Schliesslich gilt mit dem Differentiationsatz von Lebesgue

$$\bar{u}(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} u \, dx = u(x_0)$$

fast überall. Das heisst,  $\bar{u}$  ist Repräsentant von  $u$ , und wir dürfen oBdA annehmen,  $\bar{u} \equiv u$  überall.

ii) Wir zeigen nun  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  und  $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}$ . Zunächst folgt mit (8.6.3) bei Wahl von  $r = r_0$  die gleichmässige Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{x_0} |u(x_0)| &\leq \sup_{x_0} |u_{x_0,r}| + \sup_{x_0} |u(x_0) - u_{x_0,r}| \\ &\leq C \|u\|_{L^p} + C [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \leq C \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}. \end{aligned}$$

**Behauptung 2.**  $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ , und für  $x_0 \neq y_0 \in \Omega$  mit  $0 < |x_0 - y_0| = r \leq \frac{r_0}{2}$  gilt

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq Cr^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

**Beweis.** Mit (8.6.3) schätzen wir ab

$$\begin{aligned} |u(x_0) - u(y_0)| &\leq |u(x_0) - u_{x_0,2r}| + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| + |u_{y_0,r} - u(y_0)| \\ &\leq Cr^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}|. \end{aligned}$$

Weiter folgt wie in (8.6.1), (8.6.2) mit  $\Omega_r(y_0) \subset \Omega_{2r}(x_0)$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| &\leq \int_{\Omega_r(y_0)} |u - u_{x_0,2r}| \, dx \leq C \int_{\Omega_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}| \, dx \\ &\leq C \left( \int_{\Omega_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}|^p \, dx \right)^{1/p} \leq Cr^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}. \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

□

Der Behauptung 2 entnehmen wir insbesondere auch die Abschätzung

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \leq C [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}},$$

wie gewünscht. □

**Satz 8.6.7.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  vom Typ  $A$  für ein  $A > 0$ , und seien  $1 \leq p < \infty$ ,  $\lambda > n$ ,  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p} \leq 1$ . Dann sind die Räume  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  und  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  topologisch und algebraisch isomorph; also

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \cong C^{0,\alpha}(\Omega).$$

**Beweis.** i)  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  folgt mit Satz 8.6.5.

ii) Da  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ , gilt  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ . Weiter gilt für  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r \leq r_0$  und  $x, y \in \Omega_r(x_0)$  stets  $|u(x) - u(y)| \leq Cr^\alpha [u]_{C^{0,\alpha}}$ , also auch

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx \leq \int_{\Omega_r(x_0)} \int_{\Omega_r(x_0)} |u(x) - u(y)|^p \, dy \, dx \leq Cr^{\alpha p + n} [u]_{C^{0,\alpha}}^p.$$

Mit  $r^{\alpha p+n} = r^\lambda$  folgt

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0, 0 < r \leq r_0} \left( r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C [u]_{C^{0,\alpha}},$$

wie behauptet.  $\square$

**Satz 8.6.8.** Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ , und sei  $n < p < \infty$ . Dann gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

für  $0 \leq \alpha \leq \alpha^* = 1 - \frac{n}{p}$ , und die Einbettung ist kompakt für  $0 \leq \alpha < \alpha^*$ .

**Beweis.** Die Aussage folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) & \xrightarrow{E \text{ (Satz 8.4.1)}} & W^{1,p}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{(Satz 8.6.3)}} & C^{0,\alpha^*}(\mathbb{R}^n) \\ & & \xrightarrow{u \mapsto u|_\Omega} & & \xrightarrow{\text{(Satz 8.6.2)}} \\ & & C^{0,\alpha^*}(\bar{\Omega}) & \xrightarrow{\text{(kompakt für } \alpha < \alpha^*)} & C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}). \end{array}$$

$\square$

Das folgende Theorem liefert eine für Anwendungen in der Regularitätstheorie sehr nützliche hinreichende Bedingung für die Hölderstetigkeit von Sobolev-Funktionen, die wir direkt aus Satz 8.6.5 gewinnen können. Beachte, dass der Exponent  $p \geq 1$  hier beliebig sein kann.

**Korollar 8.6.1.** (Dirichlet Growth-Theorem, Morrey) Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ , und sei  $1 \leq p < \infty$ . Sei weiter  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , und mit Konstanten  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $M \geq 0$  gelte

$$\int_{\Omega_r(x)} |\nabla u|^p dx \leq M^p r^{n-p+p\alpha}, \quad (8.6.5)$$

gleichmässig in  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r \leq r_0$ . Dann gilt  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , und  $[u]_{C^{0,\alpha}} \leq CM$ .

**Beweis.** Die nach Satz 8.4.1 konstruierte Fortsetzung  $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  erfüllt offenbar ebenfalls (8.6.5). Daher dürfen wir oBdA annehmen,  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Mit Satz 8.6.6 und (8.6.5) erhalten wir für jedes  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r \leq r_0$  die Abschätzung

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p dx \leq Cr^p \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p dx \leq CM^p r^{n+p\alpha},$$

das heisst,  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  für  $\lambda = n + p\alpha$ , und

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0, 0 < r < r_0} \left( r^{-\lambda} \int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq CM.$$

Da  $\lambda > n$  folgt mit Satz 8.6.5, dass  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  und

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \leq C[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \leq CM.$$

$\square$

### 8.6.3 Schwache und klassische Differenzierbarkeit

Für  $p > n$  ist jedes  $u \in W^{1,p}$  fast überall klassisch differenzierbar. Zunächst gilt

**Lemma 8.6.1.** *Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ , und sei  $n < p < \infty$ . Dann existiert  $C = C(n, p, \Omega)$ , so dass für alle  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alle  $y_0 \in B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$  gilt*

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq C \left( r^p \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (8.6.6)$$

**Beweis.** Nach Satz 8.6.8 gilt  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  mit  $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$ ; insbesondere ist jedes  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  stetig, und wie in (8.6.3) gilt für alle  $x_0 \in \Omega$  mit  $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$  die Darstellung

$$u(x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_{x_0, r_i},$$

wobei  $r_i = 2^{-i} r$ ,  $i \geq -1$ .

Für  $y_0 \in B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$  schätze ab

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq |u(x_0) - u_{x_0, 2r}| + |u_{x_0, 2r} - u_{y_0, r}| + |u_{y_0, r} - u(y_0)|,$$

mit

$$|u(x_0) - u_{x_0, 2r}| = \lim_{i \rightarrow \infty} |u_{x_0, r_i} - u_{x_0, 2r}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_{x_0, r_i} - u_{x_0, r_{i-1}}|$$

wie in (8.6.3). Mit (8.6.2) und Satz 8.6.6 gilt weiter

$$\begin{aligned} |u_{x_0, r_i} - u_{x_0, r_{i-1}}| &\leq C \left( \int_{B_{r_{i-1}}(x_0)} |u - u_{x_0, r_{i-1}}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( r_{i-1}^p \int_{B_{r_{i-1}}(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( 2^{(1-i)(p-n)} r^p \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Da  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{(1-i)(p-n)}{p}} < \infty$ , folgt

$$|u(x_0) - u_{x_0, 2r}| \leq C \left( r^p \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analog erhalten wir

$$|u(y_0) - u_{y_0, r}| \leq C \left( r^p \int_{B_r(y_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( r^p \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Schliesslich gilt mit Satz 8.6.6, nachdem wir zunächst wie in (8.6.4) abschätzen

$$\begin{aligned} |u_{x_0, 2r} - u_{y_0, r}| &\leq \int_{B_r(y_0)} |u - u_{x_0, 2r}| dx \\ &\leq C \left( \int_{B_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0, 2r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( r^p \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 8.6.9.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, und sei  $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  für ein  $p > n$ . Dann ist (der stetige Repräsentant von)  $u$  in fast allen  $x \in \Omega$  klassisch differenzierbar, und das klassisch definierte Differential repräsentiert die schwache Ableitung von  $u$ .

**Beweis.** OBdA  $p < \infty$ . Sei  $x_0 \in \Omega$  ein Lebesgue-Punkt der schwachen Ableitung  $\nabla u \in L^p(\Omega)$ , das heisst,

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u(x_0) - \nabla u(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0). \quad (8.6.7)$$

Sei  $\overline{B_{2r_0}(x_0)} \subset \Omega$ ,  $C_0 = C_0(n, p, B_{2r_0}(x_0))$  die Konstante aus Lemma 8.6.1. Betrachte die Funktion

$$v(y) = u(y) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y - x_0).$$

Für  $r < r_0$ ,  $y_0 \in B_r(x_0)$  mit  $|y_0 - x_0| > \frac{r}{2}$  liefert Lemma 8.6.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|u(y_0) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y_0 - x_0)|}{|x_0 - y_0|} &\leq 2 \frac{|v(y_0)|}{r} = 2 \frac{|v(y_0) - v(x_0)|}{r} \\ &\leq 2C_0 \left( \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla v|^p dx \right)^{1/p} = 2C_0 \left( \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

und die rechte Seite konvergiert gegen 0 für  $r \rightarrow 0$  nach (8.6.7). Also ist  $u$  im Punkt  $x_0$  klassisch differenzierbar mit Ableitung  $\nabla u(x_0)$ .  $\square$

**Bemerkung 8.6.3.** i) Falls insbesondere die schwache Ableitung einer Funktion  $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  einen stetigen Repräsentanten besitzt, so gilt zum einen  $u \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ ; zum anderen ist dann auch jeder Punkt  $x_0 \in \Omega$  ein Lebesgue-Punkt von  $\nabla u$ , und mit Satz 8.6.9 folgt  $u \in C^1(\Omega)$ .

ii) Für  $p \leq n$  ist die Aussage von Satz 8.6.9 im Allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 8.6.3.** Sei  $u_0(x) = \log \log(1/|x|) \in W_0^{1,n}(B_{1/\varepsilon}(0))$ ,  $n \geq 2$ . Setze  $u_0$  durch  $u_0(x) = 0$  für  $x \notin B_{1/\varepsilon}(0)$  fort zu  $u_0 \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ . Sei weiter  $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap B_1(0)$ . Für  $j \in \mathbb{N}$  setze  $u_j(x) = j^{-2} u_0(x - q_j)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$u := \sum_{j=1}^{\infty} u_j \in W^{1,n}(B_1(0)),$$

und  $u$  ist an keiner Stelle  $x_0 \in B_1(0)$  stetig, da  $u$  auf keinem offenen Ball  $B_\delta(x_0)$  mit  $\delta > 0$  beschränkt ist. Also ist  $u$  auch an keiner Stelle  $x_0 \in B_1(0)$  klassisch differenzierbar,

## 8.6.4 Allgemeine Poincaré-Ungleichung

Mit Hilfe der Sätze 8.5.3 und 8.6.8 erhalten wir nützliche Varianten der Poincaré-Ungleichung, Satz 8.6.6. Der Beweis dieser Aussagen folgt der Darstellung

von Jindrich Necas “Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques” (1967).

**Satz 8.6.10.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und von der Klasse  $C^1$ , und sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann gibt es  $C = C(n, p, \Omega)$  mit

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega): \int_{\Omega} |u - \bar{u}_{\Omega}|^p dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx,$$

wobei

$$\bar{u}_{\Omega} = \int_{\Omega} u dx = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_{\Omega} u dx.$$

**Beweis.** (indirekt) Nimm an, es gibt  $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$  mit

$$1 = \int_{\Omega} |u_k - \bar{u}_{k,\Omega}|^p dx \geq k \int_{\Omega} |\nabla u_k|^p dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Folge  $v_k := u_k - \bar{u}_{k,\Omega} \in W^{1,p}(\Omega)$  beschränkt in  $W^{1,p}(\Omega)$  mit

$$\nabla v_k \rightarrow 0 \text{ in } L^p(\Omega) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Nach Satz 8.5.3 ist  $(v_k) \subset L^p(\Omega)$  relativ kompakt. Also existiert eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  und ein  $v \in L^p(\Omega)$  mit  $v_k \rightarrow v$  in  $L^p(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ ; wegen  $\|\nabla v_k\|_{L^p} \rightarrow 0$  also  $v_k \rightarrow v$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Weiter folgt

$$\int_{\Omega} |v|^p dx = 1, \quad \bar{v}_{\Omega} = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} \bar{v}_{k,\Omega} = 0,$$

und

$$\nabla v = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} \nabla v_k = 0 \in \bigcap_{1 \leq q \leq \infty} L^q(\Omega).$$

Durch wiederholte Anwendung von Satz 8.5.3 erhalten wir in endlich vielen Schritten  $v \in L^q(\Omega)$  und damit  $v \in W^{1,q}(\Omega)$  für ein  $q > n$ . Mit Satz 8.6.8 folgt  $v \in C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$ , und  $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$  ist lokal Lipschitz. Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, liefert Korollar 8.3.1 nun jedoch  $v \equiv \text{const.} = \bar{v}_{\Omega} = 0$ , und wir erhalten den gewünschten Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 8.6.4.** In Satz 8.6.10 kann man  $\bar{u}_{\Omega}$  durch das Mittel  $\bar{u}_{\Gamma}$  von  $u$  über den Rand  $\partial\Omega = \Gamma$  von  $\Omega$  ersetzen, indem man zusätzlich zu Satz 8.5.3 den Spursatz, Satz 8.4.3, verwendet. Der Beweis von Satz 8.6.10 kann dann unverändert übernommen werden.

### 8.6.5 Allgemeiner Sobolev-Einbettungssatz

Wenden wir die Sätze 8.5.3 und 8.6.8 nacheinander an, so erhalten wir die Einbettungseigenschaften der Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  für allgemeine Ordnungen  $k \in \mathbb{N}$  und Exponenten  $1 \leq p \leq \infty$ .

Für  $l \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  setze

$$C^{l,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}); \nabla^k u \in C^{0,\alpha}(\Omega)\}.$$

**Satz 8.6.11. (Sobolev)** Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ , und seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  sei weiter  $[x] = \max\{j \in \mathbb{N}; j \leq x\}$ .

i) Falls  $kp < n$ , so gilt  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  für alle  $1 \leq q \leq q_0$  mit  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ , und die Einbettung ist kompakt für  $q < q_0$ .

ii) Falls  $kp = n$ , so gilt  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  für alle  $1 \leq q < \infty$ , und diese Einbettungen sind kompakt.

iii) Falls  $kp > n$  mit  $k - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ , so gilt  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$  für  $l = [k - \frac{n}{p}] \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = k - l - \frac{n}{p}$ , und die Einbettung ist kompakt für  $\alpha < \alpha_0$ .

iv) Falls  $kp > n$  mit  $k - \frac{n}{p} = l + 1 \in \mathbb{N}$ , so gilt  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , und diese Einbettungen sind kompakt.

**Beweis.** i) Mit Satz 8.5.3 folgt

$$W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha| < k} \in W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega),$$

also

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-2,p_2}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L^{p_k}$$

mit

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}, \dots, \quad \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n} = \frac{1}{q_0},$$

und die Einbettung  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  ist kompakt für  $q < q_0$ .

iii) Sei  $l = [k - \frac{n}{p}] \geq 0$ , so dass  $n < (k-l)p < n+p$ . Mit i) erhalten wir zunächst  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l+1,q}(\Omega)$  mit  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-l-1}{n} > 0$ . Da

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n} = \frac{n - (k-l)p}{np} < 0,$$

gilt  $q > n$ . Also folgt mit Satz 8.6.8, dass  $W^{l+1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_0}(\Omega)$ , und mit Bemerkung 8.6.3.i) erhalten wir

$$W^{l+1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha_0}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

für

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = 1 - \frac{n}{q} = k - l - \frac{n}{p},$$

und die Einbettung  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$  ist kompakt für  $\alpha < \alpha_0$ .

Da  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,s}(\Omega)$  für  $1 \leq s \leq p$ , folgen ii) und iv) aus i), bzw. iii).  $\square$

**Bemerkung 8.6.5.** Im Fall  $p = 1$  kann man mit Methoden wie in Abschnitt 8.5 die Aussage von Satz 8.6.11 verbessern. Zum Beispiel erhält man auf diesem Weg, dass  $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

# Kapitel 9

## Regularität schwacher Lösungen

### 9.1 Klassische Regularität via Sobolev

Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  mit glattem Rand  $\partial\Omega$ ,  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  die schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (9.1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (9.1.2)$$

Wir erwarten  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Wie zeigt man dies? Wir würden gerne vorgehen wie im Fall  $n = 1$ .

**Erinnerung:** Sei  $\Omega = ]a, b[ \subset \subset \mathbb{R}$ , und sei  $u \in H_0^1(I)$  schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2). Dann ist wegen (9.1.1)  $u \in H^2(I)$  mit

$$u'' = \Delta u = -f \in C^\infty(\bar{I}) \hookrightarrow L^2(I),$$

und weiter  $u \in H^3(I)$  mit  $u''' = -f' \in L^2(I)$ . Mit Satz 7.3.1 folgt  $u \in C^2(\bar{I})$ , woraus man dann auf klassischem Weg die volle Regularität  $u \in C^\infty(\bar{I})$  erhält.

Analog können wir für  $n > 1$  argumentieren; wir benötigen jedoch mehr als nur drei schwache Ableitungen. Zudem ergibt (9.1.1) nicht sofort die  $H^2$ -Regularität von  $u$  mit zugehörigen Abschätzungen.

Für das weitere Vorgehen orientieren wir uns an dem folgenden Beispiel.

**Beispiel 9.1.1.** Sei  $u \in C_c^\infty(\Omega)$ . Mit der Identität

$$\begin{aligned} |\Delta u|^2 &= \sum_{i,j} (\partial_i(\partial_i u \partial_j^2 u) - \partial_i u \partial_j^2 \partial_i u) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j} (\partial_i(\partial_i u \partial_j^2 u) - \partial_j(\partial_i u \partial_i \partial_j u))}_{\text{Divergenzterm}} + \underbrace{\sum_{i,j} |\partial_i \partial_j u|^2}_{=|\nabla^2 u|^2} \end{aligned}$$

und dem Divergenzansatz von Gauss folgt

$$\forall u \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^2 dx = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx = \int_{\Omega} |f|^2 dx, \quad (9.1.3)$$

mit  $f := -\Delta u \in C_c^\infty(\Omega)$ . Durch wiederholtes Anwenden von (9.1.3) kann man für jedes  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  nun auch höhere Ableitungen durch  $f := -\Delta u$  abschätzen. Beispielsweise erhält man unter Beachtung der Beziehung  $\Delta \nabla u = \nabla \Delta u$  für die 3. Ableitungen von  $u$  die Identität

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla^3 u|^2 dx &= \sum_{i,j,k} \int_{\Omega} |\partial_i \partial_j \partial_k u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla^2(\nabla u)|^2 dx \\ &\stackrel{(9.1.3)}{=} \int_{\Omega} |\Delta(\nabla u)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx. \end{aligned}$$

Es scheint, dass zwei Schritte erforderlich sind, um die Abschätzungen aus Beispiel 9.1.1 auch für schwache Lösungen  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (9.1.1), (9.1.2) zu erhalten. Zunächst einmal muss man das Problem *lokalisieren*, damit wir nur Lösungen mit kompakten Träger betrachten müssen; anschliessend muss deren Regularität *qualitativ* und *quantitativ* (mit Abschätzungen) gezeigt werden.

Ausgehend von (9.1.3) erscheint dabei der Zugang über die  $L^2$ -basierten Sobolev-Räume  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , natürlich. Mit dem folgenden Korollar zu Satz 8.6.11 erhalten wir dann für genügend grosse  $k \in \mathbb{N}$  die gewünschte (klassische) Regularität.

**Korollar 9.1.1.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ , und sei  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Zusätzlich gelte  $u \in H^k(\Omega)$  für ein  $k > 2 + \frac{n}{2}$ . Dann gilt  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Für  $k > 2 + \frac{n}{2}$  und  $l = 2 = p$  erhalten wir  $(k-l)p > n$ . Die Behauptung folgt aus Satz 8.6.11.iii).  $\square$

In den nächsten Abschnitten führen wir diese Ideen aus und zeigen den folgenden Satz, wobei wir die Fragen der Regularität einer schwachen Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (9.1.1), (9.1.2) im Innern und am Rande von  $\Omega$  gesondert untersuchen.

**Satz 9.1.1.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^{k+2}$  und sei  $f \in H^k(\Omega)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Weiter sei  $u \in H_0^1(\Omega)$  die eindeutige schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2). Dann gilt  $u \in H^{k+2}(\Omega)$ , und

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C \|f\|_{H^k} \quad (9.1.4)$$

mit einer von  $f$  und  $u$  unabhängigen Konstanten  $C = C(\Omega, k, n)$ .

**Bemerkung 9.1.1.** Bei Wahl von  $v = u$  in (7.1.3) erhalten wir mit

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f u dx \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u\|_{H_0^1}$$

sofort die Abschätzung (9.1.4) im Fall  $k = -1$ , wobei  $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$ . Mit  $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$  und der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.1, folgt dann auch

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}. \quad (9.1.5)$$



## 9.2 Innere Regularität

Analog zu (9.1.3) erwarten wir für eine Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (9.1.1), (9.1.2) mit  $f \in H^k(\Omega)$  “innere Regularität” im Sinne des folgenden Satzes.

**Satz 9.2.1.** *Sei  $f \in H^k(\Omega)$  für  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , und sei  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2). Dann gilt  $u \in H_{loc}^{k+2}(\Omega)$ , und für alle  $\Omega' \subset \subset \Omega$  gilt*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{H^k(\Omega)} \quad (9.2.1)$$

mit einer von  $f$  und  $u$  unabhängigen Konstanten  $C = C(\Omega', \Omega, k, n)$ .

Die Beweisidee ist sehr einfach. Durch “Abschneiden” erhalten wir aus einer schwachen Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (9.1.1), (9.1.2) stets eine schwache Lösung  $v \in H_0^1(\Omega)$  einer verwandten Gleichung, welche nun jedoch kompakten Träger hat und durch Faltung geglättet werden kann.

**Beweis von Satz 9.2.1.** Sei  $\Omega' \subset \subset \Omega$ . Wähle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi \equiv 1$  auf  $\Omega'$ . Die Funktion  $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega)$  ist dann schwache Lösung der Gleichung

$$-\Delta v = (-\Delta u)\varphi - 2\nabla u \nabla \varphi - u\Delta \varphi =: g \quad \text{in } \Omega \quad (9.2.2)$$

mit  $\text{supp}(v) \subset \subset \Omega$ , wobei wir

$$g = f\varphi - 2\nabla u \nabla \varphi - u\Delta \varphi \in L^2(\Omega) \quad (9.2.3)$$

unter Beachtung von (9.1.5) durch

$$\|g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + C \|\nabla u\|_{L^2} + C \|u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}. \quad (9.2.4)$$

abschätzen können. Die gewünschte Regularität zusammen mit der Abschätzung (9.2.1) ergibt das folgende Lemma.  $\square$

**Lemma 9.2.1.** *Sei  $v \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (9.2.2) mit kompaktem Träger  $\text{supp}(v) \subset \subset \Omega$  für ein  $g \in L^2$ . Dann gilt  $v \in H^2(\Omega)$ , und*

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (9.2.5)$$

**Beweis.** Sei  $0 \leq \rho \in C_c^\infty(B_1(0))$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$  ein Standard-Mollifier, und für  $\varepsilon > 0$  sei  $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon) \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0))$ . Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt dann  $v_\varepsilon = v * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$  mit

$$-\Delta v_\varepsilon = g * \rho_\varepsilon =: g_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega),$$

und mit (9.1.3), (9.1.5) erhalten wir

$$\|v_\varepsilon - v_\delta\|_{H^2} \leq C \|g_\varepsilon - g_\delta\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (\delta, \varepsilon \downarrow 0).$$

Also  $v = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} v_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ , und wiederum mit (9.1.3), (9.1.5) folgt

$$\|v\|_{H^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|v_\varepsilon\|_{H^2} \leq C \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|g_\varepsilon\|_{L^2} = C \|g\|_{L^2},$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 9.2.1 (vollendet).** Wir argumentieren mit Induktion. Betrachte zunächst den Fall  $k = 0$ : Zu  $\Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$  und mit  $\varphi \equiv 1$  auf  $\Omega'$  sei  $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega)$  wie oben. Mit Lemma 9.2.1 erhalten wir  $v \in H^2(\Omega)$ , und da  $\varphi = 1$  auf  $\Omega'$  folgt  $u \in H^2(\Omega')$ . Weiter ergibt Kombination der Abschätzungen (9.2.4) und (9.2.5) wie gewünscht

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

“ $k - 1 \mapsto k$ ”: Nimm an,  $u \in H_{loc}^{k+1}(\Omega)$  erfüllt (9.2.1), und seien  $\Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$  und mit  $\varphi \equiv 1$  auf  $\Omega'$  wie zuvor. Dann gilt  $v = u\varphi \in H_0^{k+1}(\Omega)$ , und die Komponenten  $w = \partial^\alpha v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq k$ , sind schwache Lösungen der Gleichung

$$-\Delta w = \partial^\alpha(-\Delta v) = \partial^\alpha(f\varphi - 2\nabla u \nabla \varphi - u\Delta\varphi) =: g_\alpha \quad \text{in } \Omega$$

mit  $\text{supp}(w) \subset\subset \Omega$ , wobei wir (9.2.3) verwendet haben. Nach Induktionsannahme können wir abschätzen

$$\|g_\alpha\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{H^k} + \|u\|_{H^{k+1}(\text{supp}(\varphi))}) \leq C\|f\|_{H^k},$$

und mit Lemma 9.2.1 folgen  $u \in H^{k+2}(\Omega')$  und (9.2.1).  $\square$

### 9.3 Regularität am Rande eines Halbraums

Zur Untersuchung der Regularität schwacher Lösungen von (9.1.1), (9.1.2) am Rande betrachten wir zunächst den Fall des Halbraums

$$\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n); x_n > 0\}.$$

Sei  $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$  schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}_+^n, \tag{9.3.1}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n, \tag{9.3.2}$$

mit  $\text{supp}(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$ . Definiere  $\bar{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\bar{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Analog definieren wir  $\bar{f}$ .

**Lemma 9.3.1.**  $\bar{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$  ist schwache Lösung von

$$-\Delta \bar{u} = \bar{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{9.3.3}$$

mit  $\text{supp}(\bar{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$ , und  $\|\bar{f}\|_{L^2} \leq 2\|f\|_{L^2}$ .

**Beweis von (9.3.3).** Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt (mit  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ )

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \bar{u} \nabla \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} ((\partial_i u \cdot \partial_i \varphi)(x', x_n) - \partial_i u(x', x_n) \partial_i \varphi(x', -x_n)) \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial_n u \cdot \partial_n \varphi)(x', x_n) + \partial_n u(x', x_n) \partial_n \varphi(x', -x_n) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla u \nabla (\varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)) \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla u \nabla \psi \, dx, \end{aligned}$$

mit  $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n) \in C^\infty \cap H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ . Mit (9.3.1), (9.3.2) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \bar{u} \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla u \nabla \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} f \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \varphi \, dx,$$

wie gewünscht.  $\square$

Mit Satz 9.2.1 folgt  $\bar{u} \in H^2$ , und

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|\nabla^2 \bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}. \quad (9.3.4)$$

Im Allgemeinen ist  $\bar{f}$  auch für glatte  $f$  nicht regulär, und Satz 9.2.1 versagt für  $k > 0$ . Die zu Satz 9.2.1 analoge Aussage gilt aber dennoch.

**Satz 9.3.1.** Sei  $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$  schwache Lösung von (9.3.1), (9.3.2) mit  $\text{supp}(u) \subset\subset \overline{\mathbb{R}_+^n}$ , und sei  $f \in H^k(\mathbb{R}_+^n)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}_+^n)$ , und

$$\|u\|_{H^{k+2}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{H^k}$$

mit einer von  $u$  unabhängigen Konstanten  $C$ .

**Beweis.** Für  $k = 0$  benutze Lemma 9.3.1 und Lemma 9.2.1.

$k = 1$ : Betrachte die tangentialen Ableitungen  $u_i = \partial_i u$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Da  $u \in H^2(\mathbb{R}_+^n)$ , gilt  $u_i \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ , und

$$\begin{aligned} -\Delta u_i &= \partial_i f \in L^2(\mathbb{R}_+^n), \\ u_i &= 0 \quad \text{auf } \partial \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Mit (9.3.4) folgt  $u_i \in H^2(\mathbb{R}_+^n)$ , und

$$\|\nabla^2 u_i\|_{L^2} \leq \|u_i\|_{H^2} \leq C \|f\|_{H^1}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Da  $u \in H_{loc}^3(\mathbb{R}_+^n)$  gemäss Satz 9.2.1, kann man mit der Gleichung (9.3.1) den noch fehlenden Term

$$\partial_n^3 u = \Delta u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i^2 u_n = \partial_n f - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \partial_n u_i$$

abschätzen

$$\|\partial_n^3 u\|_{L^2} \leq \|\partial_n f\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \|\nabla^2 u_i\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^1}.$$

Den allgemeinen Fall zeigen wir nun mittels Induktion.

$k - 1 \mapsto k$ : Nimm an,  $u \in H^{k+1}(\mathbb{R}_+^n)$ . Betrachte eine beliebige tangentielle Ableitungen

$$u^{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}} =: \partial^k u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$$

mit

$$-\Delta u^{(k)} = \partial^k f =: f^{(k)} \in L^2$$

und mit

$$u^{(k)} = 0 \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Mit Lemma 9.3.1 und Lemma 9.2.1 folgt  $u^{(k)} \in H^2(\mathbb{R}_+^n)$  und

$$\|\nabla^2 u^{(k)}\|_{L^2} \leq C \|f^{(k)}\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^k}. \quad (9.3.5)$$

Für einen Multi-Index  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  hatten wir definiert

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i, \quad \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wie für  $k = 1$  erhalten wir dann mittels

$$\partial_n^{k+2} u = \partial_n^k (\Delta u - \sum_{i < n} \partial_i^2 u) = -\partial_n^k f - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_n^k \partial_i^2 u$$

und analoger Identitäten, die sich aus (9.3.1) ergeben, für die Zahlen

$$M_l := \sup_{|\alpha|=k+2, \alpha_n \leq l} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}, \quad 2 \leq l \leq k+2,$$

iterativ die Abschätzung

$$M_{k+2} \leq M_k + C \|f\|_{H^k} \leq \dots \leq M_2 + C \|f\|_{H^k} \leq C \|f\|_{H^k},$$

wobei wir für die letzte Ungleichung (9.3.5) benutzen, und  $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}_+^n)$  mit

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C M_{k+2} \leq C \|f\|_{H^k},$$

wie gewünscht.  $\square$

## 9.4 Randregularität für allgemeine Gebiete

Für den Beweis des zu Satz 9.3.1 analogen Resultats im allgemeinen Fall sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^{k+2}$ , und sei  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2) mit  $f \in H^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Zu  $x_0 \in \partial\Omega$  wähle eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  entsprechend der Definition 8.4.1, mit zugehörigem Diffeomorphismus  $\Psi \in C^{k+2}(U, \mathbb{R}^n)$  von  $U$  auf  $V = Q$  und mit  $\Phi = \Psi^{-1} \in C^{k+2}(Q, \mathbb{R}^n)$ , so dass

$$\Phi(Q_+) = U \cap \Omega, \quad \Phi(Q_0) = U \cap \partial\Omega,$$

wobei  $|d\Phi|, |d\Psi| \leq C$ .

Fixiere  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi \equiv 1$  in einer Umgebung von  $x_0$  und betrachte  $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega)$  mit  $\text{supp}(v) \subset\subset U$ . Wie in Beweis von Satz 9.2.1 ist  $v \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung der Gleichung (9.2.2), also

$$-\Delta v = g \quad \text{in } \Omega, \quad (9.4.1)$$

wobei  $g \in L^2$  wie in (9.2.3) erklärt ist.

Setze  $w = v \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$ . Die Funktion  $w$  erfüllt wieder eine der Laplace-Gleichung verwandte Gleichung von elliptischem Typ. Im Unterschied zum in Satz 9.3.1 betrachteten Fall sind die darin auftretenden Koeffizienten nun jedoch nicht konstant.

#### 9.4.1 Transformation der Gleichung (9.4.1)

Am leichtesten erhält man die Gleichung für  $w$  auf variationellem Weg. Dazu erinnern wir an die Charakterisierung der schwachen Lösung  $v \in H_0^1(\Omega)$  der Gleichung (9.2.2) analog zu Beispiel 5.4.2.

**Lemma 9.4.1.** *Die eindeutige schwache Lösung  $v \in H_0^1(\Omega)$  von (9.3.5) erfüllt*

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} gv dx = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} E(w).$$

**Beweis.** Sei  $w \in H_0^1(\Omega)$ . Schreibe  $w = v + \varphi$  mit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Es gilt

$$E(w) = E(v + \varphi) = E(v) + \int_{\Omega} (\nabla v \nabla \varphi - g\varphi) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx. \quad (9.4.2)$$

Falls  $v$  die Gleichung (9.4.1) löst, folgt

$$E(w) = E(v + \varphi) = E(v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \geq E(v),$$

und “=” gilt genau dann, wenn  $w = v$ . □

Es gilt auch die Umkehrung von Lemma 9.4.1.

**Lemma 9.4.2.** *Falls  $v \in H_0^1(\Omega)$  die Energie  $E$  unter allen  $w \in H_0^1(\Omega)$  minimiert, so ist  $v$  schwache Lösung von (9.4.1).*

**Beweis.** Ersetzt man in (9.4.2) die Funktion  $\varphi$  durch  $\epsilon\varphi$ , so erhält man

$$0 = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} E(v + \epsilon\varphi) = \int_{\Omega} (\nabla v \nabla \varphi - g\varphi) dx$$

als notwendige Bedingung für eine Minimalstelle von  $E$  an der Stelle  $v$ . □

Wir ziehen nun das Energiefunktional  $E$  mittels  $\Phi$  zurück. Zur Vereinfachung der Notation benutzen wir im folgenden die Einsteinsche Summenkonvention; das heisst, über doppelt auftretende Indices wird implizit summiert. Zudem

unterscheiden wir Vektoren, die wir als Spalten  $x = (x^1, \dots, x^n)^t$  mit hochgestellten Indices schreiben, und co-Vektoren, die wir als Zeilen  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit unten stehenden Indices schreiben. Somit gilt etwa  $dv = (\frac{\partial v}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x^n})$ , und die Funktionalmatrix  $d\Psi$  hat die Form  $d\Psi = (\frac{\partial \Psi^i}{\partial x^j})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Zu  $v \in H_0^1(\Omega \cap U)$  mit  $\text{supp}(v) \subset\subset U$  setze  $\tilde{v} = v \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$  mit  $\text{supp}(\tilde{v}) \subset\subset Q$ . Beachte, dass dann  $v = \tilde{v} \circ \Psi$  mit  $\Psi = \Phi^{-1} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap U} \frac{\partial \tilde{v} \circ \Psi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \tilde{v} \circ \Psi}{\partial x^i} dx - \int_{\Omega \cap U} g(\tilde{v} \circ \Psi) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap U} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^l} \frac{\partial \Psi^l}{\partial x^i} dx - \int_{\Omega \cap U} g(\tilde{v} \circ \Psi) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{Q_+} a^{ij} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^j} |\det(d\Phi)| dy - \int_{Q_+} \tilde{g} \tilde{v} |\det(d\Phi)| dy \end{aligned}$$

mit  $\tilde{g} = g \circ \Phi$  und mit

$$a^{ij} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \Psi^j}{\partial x^k} = (d\Psi \cdot (d\Psi)^t)_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Setze

$$h_{ij} = \frac{\partial \Phi^m}{\partial y^i} \frac{\partial \Phi^m}{\partial y^j} = ((d\Phi)^t \cdot d\Phi)_{ij}.$$

Beachte

$$\underbrace{d\Psi (d\Psi)^t \cdot (d\Phi)^t d\Phi}_{=(d\Phi \cdot d\Psi)^t = id} = id;$$

das heisst,

$$a^{ij} h_{jk} = \delta_k^i, \quad (a^{ij}) = (h_{ij})^{-1} =: (h^{ij}).$$

Weiter gilt

$$|\det(d\Phi)| = \sqrt{\det((d\Phi)^t \cdot d\Phi)} = \sqrt{\det(h_{ij})} =: \sqrt{|h|}.$$

Wir deuten

$$D_h(\tilde{v}) := \frac{1}{2} \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^j} \sqrt{|h|} dy$$

als Dirichlet-Integral von  $\tilde{v}$  bzgl. der Riemannschen Metrik  $h = (h_{ij})$  auf  $Q_+$ .

**Bemerkung 9.4.1.** Das Dirichlet-Integral ist eine geometrische Grösse. Seien  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Falls  $S \subset\subset M$ ,  $\tilde{S} \subset\subset N$  und falls  $\Phi \in C^1$  ein Diffeomorphismus ist von einer Umgebung von  $\tilde{S}$  nach  $M$  mit  $\Phi(\tilde{S}) = S$  und  $\Phi^*g = h$ , wo

$$\forall X, Y \in T_p N: (\Phi^*g)(p)(X, Y) = g(\Phi(p))(d\Phi(p)X, d\Phi(p)Y),$$

dann gilt für jedes  $u \in C^1(M)$  mit  $\tilde{u} = u \circ \Phi$  die Identität

$$D_g(u; S) = D_{\Phi^*g}(u \circ \Phi; \tilde{S}) = D_h(\tilde{u}; \tilde{S}).$$

Sei nun wieder  $v \in H_0^1(\Omega)$  mit  $\text{supp}(v) \subset\subset U$  Lösung von (9.4.1). Setze  $\tilde{g} = g \circ \Phi$ ,  $w = v \circ \Phi$ , und definiere

$$\tilde{E}(w) = \frac{1}{2} \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial w}{\partial y^j} \sqrt{|h|} \, dy - \int_{Q_+} \tilde{g} w \sqrt{|h|} \, dy.$$

**Lemma 9.4.3.** Sei  $v \in H_0^1(\Omega \cap U)$  mit  $\text{supp}(v) \subset\subset U$ , und setze weiter  $w = v \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$ . Es sind äquivalent:

i)  $v$  ist schwache Lösung von (9.4.1);

ii) es gilt

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega \cap U): E(v) \leq E(v + \varphi); \quad (9.4.3)$$

iii) es gilt

$$\forall \psi \in H_0^1(Q_+): \tilde{E}(w) \leq \tilde{E}(w + \psi); \quad (9.4.4)$$

iv)  $w$  ist schwache Lösung der Gleichung

$$-\Delta_h w := -\frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left( h^{ij} \sqrt{|h|} \frac{\partial w}{\partial y^j} \right) = \tilde{g} \quad \text{in } Q_+. \quad (9.4.5)$$

**Bemerkung 9.4.2.** Der Operator

$$-\Delta_h w = -\frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( h^{ij} \sqrt{|h|} \frac{\partial w}{\partial y^j} \right)$$

heißt Laplace-Beltrami Operator bezüglich der Metrik  $h$ .

**Beweis von Lemma 9.4.3.** “i)  $\Leftrightarrow$  ii)”: Siehe Lemma 9.4.1 und Lemma 9.4.2.

“ii)  $\Leftrightarrow$  iii)”: Zu  $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U)$  ist  $\psi = \varphi \circ \Phi \in H_0^1(Q_+)$ , und umgekehrt. Weiter gilt

$$E(v) = \tilde{E}(w), \quad E(v + \varphi) = \tilde{E}(w + \psi).$$

“iii)  $\Leftrightarrow$  iv)”: Sei  $\psi \in H_0^1(Q_+)$ . Entwickle

$$\begin{aligned} \tilde{E}(w + \epsilon\psi) &= \tilde{E}(w) + \epsilon \int_{Q_+} \left( h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^j} - \tilde{g}\psi \right) \sqrt{|h|} \, dy \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^j} \sqrt{|h|} \, dy, \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Bedingung (9.4.4) gilt also genau dann, wenn

$$\forall \psi \in H_0^1(Q_+): \int_{Q_+} \left( h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^j} - \tilde{g}\psi \right) \sqrt{|h|} \, dy = 0. \quad (9.4.6)$$

Dies ist die schwache Form von (9.4.5).  $\square$

### 9.4.2 Regularität schwacher Lösungen von (9.4.5)

Analog zu Satz 9.3.1 die folgende Aussage.

**Satz 9.4.1.** Sei  $w \in H_0^1(Q_+)$  mit  $\text{supp}(w) \subset\subset Q$  schwache Lösung von (9.4.5), wobei  $(h_{ij}) \in C^{k+1}(\bar{Q}_+)$  mit Konstanten  $0 < \lambda \leq \Lambda$  gleichmässig in  $Q_+$  die Bedingung erfüllt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n: \lambda |\xi|^2 \leq h^{ij}(y) \xi^i \xi^j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad (9.4.7)$$

und sei  $\tilde{g} \in H^k(Q_+)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $w \in H^{k+2}(Q_+)$ , und

$$\|w\|_{H^{k+2}} \leq C \|\tilde{g}\|_{H^k}$$

mit einer von  $\tilde{g}$  und  $w$  unabhängigen Konstanten  $C = C(n, \lambda, \Lambda, h)$ .

**Bemerkung 9.4.3.** i) Eine Matrix  $(h_{ij})$ , welche die Bedingung (9.4.7) erfüllt, heisst gleichmässig elliptisch.

ii) Im Unterschied zur Gleichung (9.4.1) ist es im Falle einer Lösung der Gleichung (9.4.5) im Allgemeinen nicht möglich, durch Spiegelung eine Fortsetzung zu finden, welche eine Gleichung erfüllt von demselben Typ und mit glatten Koeffizienten.

iii) Auch Glättung einer schwachen Lösung durch Faltung ist in diesem Fall im Allgemeinen nicht möglich.

Die oben genannten Schwierigkeiten kann man elegant umgehen, indem man Differentialoperatoren durch Differenzenoperatoren

$$D_h u = \frac{\tau_h u - u}{|h|}, \quad \tau_h u(x) = u(x+h), \quad 0 < |h| < 1,$$

ersetzt (Nirenberg). Offenbar gilt für jedes  $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$  und jedes  $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$  die Beziehung

$$\nabla D_h u = D_h \nabla u \in L^2,$$

und für  $\psi, \rho \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$  erhalten wir bei geeigneter Substitution die folgende Regel zur “partiellen Integration”

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi D_{-h} \rho \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\rho(x-h) - \rho(x)}{|h|} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{|h|} \rho(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} D_h \psi \cdot \rho \, dx. \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

Weiter folgt mit

$$D_h(\psi\rho)(x) = |h|^{-1} \left( (\psi(x+h) - \psi(x))\rho(x+h) + \psi(x)(\rho(x+h) - \rho(x)) \right)$$

die “Produktregel”

$$D_h(\psi\rho) = D_h \psi \tau_h \rho + \psi D_h \rho, \quad (9.4.9)$$

und Satz 8.3.1 ergibt

$$\|D_h \psi\|_{L^2} \leq \|\nabla \psi\|_{L^2}. \quad (9.4.10)$$



**Beweis von Satz 9.4.1.** Einsetzen von  $\psi = w \in H_0^1(Q_+)$  in die schwache Form (9.4.6) von (9.4.5) ergibt unter Beachtung von (9.4.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda \int_{Q_+} |\nabla w|^2 \sqrt{|h|} \, dy &\leq \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial w}{\partial y^j} \sqrt{|h|} \, dy = \int_{Q_+} \tilde{g} w \sqrt{|h|} \, dy \\ &\leq C \|\tilde{g}\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.2, verwenden. Es folgt

$$\|w\|_{H^1} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2}. \quad (9.4.11)$$

Weiter argumentieren wir nun mit Induktion.

$k = 0$ : Fixiere  $1 \leq i \leq n-1$ . Für  $0 \neq h \in \mathbb{R}$  setze

$$\partial_i^h w = D_{he_i} w = \frac{\tau_{he_i} w - w}{|h|}.$$

Dann ist  $\psi = \partial_i^{-h} \partial_i^h w \in H_0^1(Q_+)$  für genügend kleines  $0 < h < h_0$  zulässig als Testfunktion in (9.4.5), und mit (9.4.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^j} \sqrt{|h|} \, dy &= \int_{Q_+} \tilde{g} \psi \sqrt{|h|} \, dy \\ &\leq C \|\tilde{g}\|_{L^2} \|\partial_i^{-h} \partial_i^h w\|_{L^2} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2} \|\nabla \partial_i^h w\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt mit (9.4.8), (9.4.9) bei geeigneter Substitution

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} h^{kl} \frac{\partial w}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial y^l} (\partial_i^{-h} \partial_i^h w) \sqrt{|h|} \, dy &= \int_{Q_+} \partial_i^h (h^{kl} \sqrt{|h|} \frac{\partial w}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^l} (\partial_i^h w) \, dy \\ &\geq \int_{Q_+} h^{kl} \frac{\partial}{\partial y^k} (\partial_i^h w) \frac{\partial}{\partial y^l} (\partial_i^h w) \sqrt{|h|} \, dy - C \|h^{ij}\|_{C^1} \int_{Q_+} |\nabla w| |\nabla \partial_i^h w| \, dy \\ &\geq C_0 \lambda \|\nabla \partial_i^h w\|_{L^2}^2 - C \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla \partial_i^h w\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei  $C_0 = \inf_{Q_+} \sqrt{|h|} > 0$ . Mit (9.4.11) folgt

$$\|\nabla \partial_i^h w\|_{L^2} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2}, \quad \text{gleichmässig in } 0 < h < h_0.$$

Wie in Satz 8.3.1 folgt  $\partial_i w = \frac{\partial w}{\partial x^i} \in H_0^1(Q_+)$  mit

$$\|\nabla \partial_i w\|_{L^2} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Mit Hilfe der Gleichung (9.4.5) kann man auch den fehlenden Term

$$\|\nabla \partial_n w\|_{L^2} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2}$$

abschätzen. Der Induktionsschritt " $k-1 \mapsto k$ " verläuft vollkommen analog zu Satz 9.3.1.  $\square$

### 9.4.3 Beweis von Satz 9.1.1

Sei  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2) auf  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $\Omega \in C^{k+2}$ ,  $f \in H^k(\Omega)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Bemerkung 9.1.1 liefert zunächst die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}. \quad (9.4.12)$$

Überdecke  $\partial\Omega$  mit Umgebungen  $U_1, \dots, U_L$ , für die ein  $C^{k+2}$ -Diffeomorphismus  $\Phi_l: Q \rightarrow U_l$  existiert mit

$$\Phi_l(Q_+) = U_l \cap \Omega; \quad \Phi_l(Q_0) = U_l \cap \partial\Omega, \quad |d\Phi_l|, |d\Phi_l^{-1}| \leq C, \quad 1 \leq l \leq L.$$

Sei weiter  $U_0 \subset\subset \Omega$ , so dass  $\Omega \subset \cup_{l=0}^L U_l$ , und wähle eine der Überdeckung  $(U_l)_{0 \leq l \leq L}$  untergeordnete Zerlegung der Eins  $(\varphi_l)_{0 \leq l \leq L}$  auf  $\Omega$  mit Funktionen  $0 \leq \varphi_l \in C_c^\infty(U_l)$ ,  $0 \leq l \leq L$ , so dass

$$\sum_{l=0}^L \varphi_l \equiv 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Für  $0 \leq l \leq L$  definiere  $u_l = u\varphi_l \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$-\Delta u_l = f\varphi_l - 2\nabla u \nabla \varphi_l - u\Delta \varphi_l =: g_l \quad (9.4.13)$$

und

$$\text{supp}(u_l) \subset\subset U_l. \quad (9.4.14)$$

Schliesslich setzen wir

$$w_l = u_l \circ \Phi_l \in H_0^1(Q_+), \quad \tilde{g}_l = g_l \circ \Phi_l,$$

mit

$$-\Delta_{h_l} w_l = \tilde{g}_l \quad \text{in } Q_+,$$

wobei  $h_l = \Phi_l^* g_{\mathbb{R}^n} = d\Phi_l^t \cdot d\Phi_l$ ,  $1 \leq l \leq L$ . Wiederum benutzen wir Induktion.

$k = 0$ : Mit (9.4.13) und unseren Annahmen betreffend  $f$  und  $u$  folgt  $g_l \in L^2(U_l)$ ,  $0 \leq l \leq L$ , und daher auch  $\tilde{g}_l \in L^2(Q_+)$ ,  $1 \leq l \leq L$ . Mit Satz 9.2.1 und (9.4.12) erhalten wir  $u_0 \in H^2(U_0)$  mit

$$\|u_0\|_{H^2(U_0)} \leq C\|g_0\|_{L^2(U_0)} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \leq C\|f\|_{L^2}.$$

Analog ergeben Satz 9.4.1 und (9.4.12) für jedes  $1 \leq l \leq L$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{H^2(U_l)} &\leq C\|w_l\|_{H^2(Q_+)} \leq C\|\tilde{g}_l\|_{L^2(Q_+)} \leq C\|g_l\|_{L^2(U_l)} \\ &\leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}) \leq C\|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Es folgt  $u \in H^2(\Omega)$  mit

$$\|u\|_{H^2} \leq \sum_{l=0}^L \|u_l\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

$k - 1 \mapsto k$ : Sei  $f \in H^k(\Omega)$  und nimm an,  $u \in H^{k+1} \cap H_0^1(\Omega)$  erfüllt (9.1.1), (9.1.2) mit  $\|u\|_{H^{k+1}} \leq C\|f\|_{H^{k-1}}$ . Mit (9.4.13) erhalten wir

$$g_l \in H^k(U_l), \quad 0 \leq l \leq L,$$

sowie

$$\tilde{g}_l = g_l \circ \Phi_l \in H^k(Q_+), 1 \leq l \leq L,$$

und  $h_l \in C^{k+1}(\bar{Q}_+)$ .

Satz 9.2.1 und Satz 9.4.1 liefern nun

$$u_0 \in H^{k+2}(U_0), u_l = w_l \circ \Phi_l^{-1} \in H^{k+2}(U_l), 1 \leq l \leq L,$$

und

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{H^{k+2}(U_0)} &\leq C(\|g_0\|_{H^k} + \|u_0\|_{H^1}) \\ &\leq C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}) \leq C\|f\|_{H^k}, \end{aligned}$$

gemäss Induktionsannahme, sowie

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{H^{k+2}} &\leq C\|w_l\|_{H^{k+2}} \leq C\|\tilde{g}_l\|_{H^k} \\ &\leq C\|g_l\|_{H^k} \leq C(\|f\|_{H^k} + \|u\|_{H^{k+1}}) \leq C\|f\|_{H^k} \end{aligned}$$

für jedes  $1 \leq l \leq L$ . Es folgt  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  mit

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq \sum_{l=0}^L \|u_l\|_{H^{k+2}} \leq C\|f\|_{H^k}.$$

#### 9.4.4 Variable Koeffizienten

Mit den zum Beweis von Satz 9.4.1 entwickelten Techniken können wir auch Randwertprobleme für elliptische Operatoren mit variablen Koeffizienten behandeln.

**Satz 9.4.2.** Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^{k+2}$ , und seien  $a_{ij} = a_{ji} \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  mit

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n: \lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi^i \xi^j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad (9.4.15)$$

wobei  $0 < \lambda \leq \Lambda$ . Dann besitzt für jedes  $f \in H^k(\Omega)$  das Randwertproblem

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f \text{ in } \Omega \quad (9.4.16)$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (9.4.17)$$

genau eine schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ , und  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  mit

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C \|f\|_{H^k}.$$

**Beweis.** Definiere

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega): (u, v)_a := \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

Wegen (9.4.15) gilt

$$\forall u \in H_0^1(\Omega): \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (u, u)_a \leq \Lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Mit der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.2, folgt, dass  $(\cdot, \cdot)_a$  ein zum Standardskalarprodukt äquivalentes Skalarprodukt auf  $H_0^1(\Omega)$  definiert. Mit dem Riesz'schen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, folgt die Existenz genau einer schwachen Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (9.4.16), (9.4.17) in dem Sinne, dass gilt

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): (u, v)_a = \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Für die höhere Regularität verwenden wir Satz 9.4.1. Definiere dazu die "Metrik"  $g = (g_{ij})$  mit  $g^{-1} = (g^{ij})$ , wo  $g^{ij} = a_{ij}$ . Dann geht (9.4.16) über in die Gleichung

$$-\Delta_g u := -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f - g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\log \sqrt{|g|}) \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Beachte, dass nach Annahme gilt  $g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\log \sqrt{|g|}) \in C^k$ .

Da der Laplace-Beltrami-Operator  $-\Delta_g$  gemäss Bemerkung 9.4.1 und Lemma 9.4.3 unter einem Diffeomorphismus  $H \in C^{k+2}(Q; \mathbb{R}^n)$  übergeht in  $-\Delta_h$  mit  $h = H^*g \in C^{k+1}(Q)$ , wo

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n: h(p)(X, Y) = g(H(p))(dH(p)X, dH(p)Y),$$

erhält man mit den Argumenten im Beweis von Satz 9.4.1 sowohl innere als auch Randregularität.  $\square$

## 9.5 Erste Anwendungen

Wir können nun endlich den noch ausstehenden Beweis von Lemma 7.1.1 erbringen. Zur Erinnerung: Für ein Gebiet  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  betrachten wir den Operator  $A = -\Delta: D_A \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , wo

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\},$$

mit Abschluss  $\bar{A}: D_{\bar{A}} \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , wobei

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\Omega); \exists u_k \in D_A: u_k \xrightarrow{L^2} u, -\Delta u_k \xrightarrow{L^2} f =: \bar{A}u \ (k \rightarrow \infty)\}.$$

Analog zu Lemma 7.5.1 gilt zunächst das folgende Resultat.

**Lemma 9.5.1.** *Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^l$  für ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l > 2 + n/2$ . Dann gilt  $D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ .*

**Beweis.** Es gilt  $D_A \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ , vgl. Korollar 8.4.3. Falls  $(u_k) \subset D_A$  mit  $u_k \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  und  $f_k = -\Delta u_k \rightarrow f$  in  $L^2(\Omega)$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so folgt mit Satz 9.1.1 sofort

$$\|u_k - u_l\|_{H^2} \leq C \|f_k - f_l\|_{L^2} \rightarrow 0 \ (k, l \rightarrow \infty);$$

also  $u_k \rightarrow u$  in  $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ , und  $D_{\bar{A}} \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ .

Sei umgekehrt  $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$  beliebig. Wähle  $f_k \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $f_k \rightarrow -\Delta u$  in  $L^2(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ , dazu  $u_k \in H_0^1(\Omega)$  mit  $-\Delta u_k = f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Wiederum mit Satz 9.1.1 folgt  $u_k \in D_{\bar{A}}$ , und  $u_k \rightarrow u$  in  $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ; also  $u \in D_{\bar{A}}$ .  $\square$

Unter der obigen Regularitätsannahme an  $\Omega$  zeigen wir nun die Lemma 7.1.1 entsprechende Aussage.

**Lemma 9.5.2.** Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^l$  für ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l > 2 + n/2$ , und sei  $v \in L^2(\Omega)$  mit

$$\forall u \in D_{\bar{A}}: |(v, \bar{A}u)_{L^2}| \leq C \|u\|_{L^2}. \quad (9.5.1)$$

Dann gilt  $v \in D_{\bar{A}}$ .

**Beweis.** Zusammen mit dem Rieszischen Darstellungssatz, Satz 4.3.2, liefert (9.5.1) ein  $f \in L^2(\Omega)$  mit

$$\forall u \in D_{\bar{A}}: - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} f u \, dx; \quad (9.5.2)$$

insbesondere gilt wegen  $C_c^\infty(\Omega) \subset D_{\bar{A}}$  dann im Distributionssinn die Gleichung  $-\Delta v = f \in L^2(\Omega)$ . Beachte, dass auch für  $u \in D_{\bar{A}}$  gemäss Lemma 9.5.1 gilt  $\bar{A}u = -\Delta u \in L^2(\Omega)$ .

Weiter erhalten wir  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Sei dazu  $w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$  die eindeutige schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta w = f \text{ in } \Omega, \quad w = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

gemäss Satz 9.1.1. Mit (9.5.2) und Lemma 9.5.1 folgt

$$\int_{\Omega} (w - v) \Delta u \, dx = \int_{\Omega} (f + \Delta w) u \, dx = 0 \quad (9.5.3)$$

für alle  $u \in D_{\bar{A}}$ . Sei insbesondere  $u \in D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$  die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= v - w \in L^2(\Omega) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit (9.5.3) folgt  $\|v - w\|_{L^2} = 0$ ; das heisst,  $v = w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) = D_{\bar{A}}$ .  $\square$

Mit Lemma 9.5.2 ist der Definitionsbereich des zu  $\bar{A}$  adjungierten Operators mit  $D_{\bar{A}}$  identisch,  $\bar{A}$  also selbstadjungiert. Die Kompaktheit der Einbettung  $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  gemäss Satz 8.5.3 zusammen mit Satz 9.1.1 und dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, Satz 6.7.2, liefert nun

**Satz 9.5.1.** Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^2$ . Dann gibt es eine  $L^2$ -orthonormale Hilbert-Basis  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $L^2(\Omega)$  bestehend aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators mit

$$-\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \text{ in } \Omega, \quad \varphi_i = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit Eigenwerten  $0 < \lambda_i \rightarrow \infty$  ( $i \rightarrow \infty$ ).

**Beweis.** Für  $f \in L^2(\Omega)$  sei  $Kf = u$  die Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Der so definierte Operator  $K: L^2(\Omega) \rightarrow H^2 \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  ist linear und stetig nach Satz 9.1.1 sowie kompakt nach Satz 8.5.3.

Schliesslich ist mit  $\bar{A} = -\Delta$  auch  $K$  selbstadjungiert. Da  $K$  stetig ist, genügt es hierfür, die Symmetrie zu zeigen. Seien dazu  $f, g \in L^2(\Omega)$  mit  $u = Kf, v = Kg$ . Dann gilt

$$(Kf, g)_{L^2} = \int_{\Omega} u(-\Delta v) \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = (f, Kg)_{L^2}.$$

Da  $\ker(K) = \{0\}$ , liefert Satz 6.7.2 eine Schar von  $L^2$ -orthonormalen Eigenvektoren  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit

$$L^2(\Omega) = \overline{\text{span}\{\varphi_i; i \in \mathbb{N}\}}$$

und zugehörige Eigenwerte  $\mu_i \rightarrow 0$  mit  $K\varphi_i = \mu_i\varphi_i$ ,  $\mu_i \neq 0$ , wobei wegen

$$\varphi_i = -\Delta(K\varphi_i) = \mu_i(-\Delta\varphi_i) \quad (9.5.4)$$

und

$$0 < \|\varphi_i\|_{L^2}^2 = \mu_i \int_{\Omega} (-\Delta\varphi_i)\varphi_i \, dx = \mu_i \|\nabla\varphi_i\|_{L^2}^2 \quad (9.5.5)$$

gilt  $\mu_i > 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Schliesslich folgt mit (9.5.4) auch die Identität

$$-\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \text{ in } \Omega$$

mit  $0 < \lambda_i = \mu_i^{-1} \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Wegen

$$\varphi_i = \lambda_i K\varphi_i \in D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$$

gilt auch die Randbedingung  $\varphi_i = 0$  auf  $\partial\Omega$ . □

**Bemerkung 9.5.1.** Mit dem Courant-Fischer Minimaxprinzip und (9.5.5) erhalten wir zudem die Charakterisierungen

$$\mu_i = \sup_{V \subset L^2(\Omega), \dim(V)=i} \inf_{0 \neq f \in V} \frac{(Kf, f)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}^2}, \quad i \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\lambda_i = \inf_{V \subset H_0^1(\Omega), \dim(V)=i} \sup_{0 \neq u \in V} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}, \quad i \in \mathbb{N},$$

vergleiche Bemerkung 6.7.3.

## 9.6 “A-priori” und “a-posteriori” Abschätzungen

Genügt die “a-priori” Abschätzung (9.1.3) bereits für den Beweis von Satz 9.2.1?

Betrachte dazu das folgende Beispiel.

**Beispiel 9.6.1.** Die Funktion

$$u(x) = \log \log(1/|x|) \in H_0^1(B_{1/e}(0; \mathbb{R}^2))$$

ist unbeschränkte schwache Lösung der Gleichung

$$-\Delta u = |\nabla u|^2 \quad \text{in } \Omega = B_{1/e}(0; \mathbb{R}^2) \quad (9.6.1)$$

mit  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Da  $H_{loc}^2(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^\infty(\Omega)$  nach Satz 8.6.11, gilt  $u \notin H_{loc}^2(\Omega)$ .

**Beweis.** Die Funktion  $v = e^u = \log(1/|x|)$  löst

$$0 = \Delta v = e^u(\Delta u + |\nabla u|^2) \quad \text{auf } \Omega \setminus \{0\}.$$

Weiter hat nach Beispiel 8.1.1 die Menge  $K = \{0\}$  verschwindende  $H^1$ -Kapazität; das heisst, es gibt  $(\psi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \leq \psi_k \leq 1$  und mit  $\psi_k \equiv 1$  in einer Umgebung von  $x = 0$ , so dass  $\psi_k \rightarrow 0$  fast überall und  $\|\nabla \psi_k\|_{L^2} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Da  $u$  die Gleichung (9.6.1) auf  $\Omega \setminus \{0\}$  klassisch löst erhalten wir für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , wie gewünscht, die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \nabla (\varphi(1 - \psi_k)) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (-\Delta u) \varphi(1 - \psi_k) \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \varphi(1 - \psi_k) \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \varphi \, dx, \end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass  $\nabla u \in L^2(\Omega)$ .  $\square$

Andererseits erhalten wir jedoch für jede genügend glatte Lösung der Gleichung (9.6.1) "a-priori" Schranken in  $H^2$  mit Hilfe des folgenden Interpolationssatzes.

**Lemma 9.6.1.** (Ladyzhenskaya, Gagliardo-Nirenberg) Sei  $v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ . Dann gilt für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^4 \varphi^2 \, dx \leq 8 \int_{\text{supp}(\varphi)} |v|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 \varphi^2 + |v|^2 |\nabla \varphi|^2) \, dx.$$

**Beweis.** OBdA sei  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , und sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Für  $x = (x_1, x_2)$  gilt

$$(v^2 \varphi)(x_1, x_2) = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (v^2 \varphi)(s, x_2) \, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2 \varphi)|(s, x_2) \, ds;$$

analog

$$(v^2 \varphi)(x_1, x_2) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2 \varphi)|(x_1, t) \, dt.$$

Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |v|^4 \varphi^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(v^2 \varphi)(x_1, x_2)|^2 \, dx_1 \, dx_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2 \varphi)|(s, x_2) \, ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2 \varphi)|(x_1, t) \, dt \right) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(v^2 \varphi)| \, dx \right)^2 \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} (2|\nabla v| |v| |\varphi| + |v|^2 |\nabla \varphi|) \, dx \right)^2, \end{aligned}$$

und mit Hölder können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^2} (2|\nabla v||v||\varphi| + |v|^2|\nabla\varphi|) dx \right)^2 &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} (2|\nabla v||\varphi| + |v||\nabla\varphi|) |v| dx \right)^2 \\ &\leq \int_{\text{supp}(\varphi)} |v|^2 dx \cdot \left( \left( \int_{\mathbb{R}^2} 4|\nabla v|^2 \varphi^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 |\nabla\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq 8 \int_{\text{supp}(\varphi)} |v|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 \varphi^2 + |v|^2 |\nabla\varphi|^2) dx, \end{aligned}$$

wie gewünscht.  $\square$

Falls nun  $u \in H_{loc}^2 \cap H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (9.6.1) ist, so folgt analog zu (9.2.3) für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  die Gleichung

$$-\Delta(u\varphi) = |\nabla u|^2 \varphi - 2\nabla u \cdot \nabla\varphi - u\Delta\varphi =: g.$$

Da nach Annahme  $v = \nabla u \in H_{loc}^1$ , erhalten wir  $g \in L^2$  mit

$$\|g\|_{L^2} \leq \| |\nabla u|^2 \varphi \|_{L^2} + C(\varphi) \|u\|_{H^1},$$

wobei

$$\| |\nabla u|^2 \varphi \|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\text{supp}(\varphi))} \|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} + C(\varphi) \|u\|_{H^1}^2$$

gemäss Lemma 9.6.1. Mit Lemma 9.2.1 folgt

$$\|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} \leq C \|g\|_{L^2} \leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2(\text{supp}(\varphi))} \|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} + C(\varphi)(1 + \|u\|_{H^1}^2)$$

mit einer Konstanten  $C_0 > 0$ . Wähle  $r > 0$ , so dass

$$2C_0 \sup_{x_0} \left( \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq 1.$$

Für  $\varphi \in C_c^\infty(B_{2r}(x_0))$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi \equiv 1$  auf  $B_r(x_0)$ , wo  $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ , erhalten wir so die gewünschte  $H_{loc}^2$ -a-priori Abschätzung

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(B_r(x_0))} \leq \|\nabla^2(u\varphi)\|_{L^2} \leq C(\varphi)(1 + \|u\|_{H^1}^2).$$

Die schwache Lösung  $u(x) = \log \log(1/|x|)$  der Gleichung (9.6.1) ist somit insbesondere “isoliert” in dem Sinne, dass sie nicht durch glatte Lösungen dieser Gleichung im Raum  $H_0^1(\Omega)$  approximiert werden kann.

Aufgrund von Beispiel 9.6.1 müssen wir demnach streng unterscheiden zwischen “a-priori” Abschätzungen für “glatte” Lösungen und “a-posteriori” Regularität!

## 9.7 $L^p$ -Theorie

Für  $1 < p < \infty$  gelten Sätze analog zu Satz 9.1.1 und Satz 9.4.2; das heisst, für  $f \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , gilt  $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$  mit Abschätzungen. Hierfür benötigt man jedoch Hilfsmittel der harmonischen Analysis, insbesondere die sogenannte “Calderón-Zygmund Ungleichung”.



# Kapitel 10

## Schauder-Theorie

In diesem Abschnitt behandeln wir Existenz- und Regularitätssätze in Hölder-Räumen, wobei wir dem Zugang von Campanato folgen, wie er im Buch [7] von Giaquinta entwickelt wird.

### 10.1 Motivation

Betrachte das Randwertproblem

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} f_i + h \quad \text{in } \Omega, \quad (10.1.1)$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (10.1.2)$$

wo  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  und  $(a_{ij})$  mit  $a_{ij} = a_{ji}$  gleichmässig elliptisch; das heisst, mit Konstanten  $0 < \lambda < \Lambda$  gilt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n: \lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(x) \xi^i \xi^j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad (10.1.3)$$

gleichmässig in  $x \in \Omega$ .

**Bemerkung 10.1.1.** i) Später werden wir die allgemeinere Form (10.4.1) der Gleichung (10.1.1) betrachten.

ii) Zu  $f_1, \dots, f_n, h \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$  mit (10.1.3) gibt es genau eine schwache Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  von (10.1.1), (10.1.2).

**Beweis.** OBdA  $u_0 = 0$ . (Betrachte sonst  $\tilde{u} = u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\tilde{f}_i = f_i - a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ ). Die im Beweis von Satz 9.5.1 eingeführte Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_a$  definiert ein äquivalentes Skalarprodukt auf  $H_0^1(\Omega)$ . Die Behauptung folgt mit Satz 4.3.2.  $\square$

Für genügend glatte Daten  $f$ ,  $h$  und  $a_{ij}$  erwarten wir klassische Regularität  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  der in Bemerkung 10.1.1.ii) konstruierten schwachen Lösung. Diese erhalten wir mit den Methoden des vorangegangenen Abschnitts, falls  $a_{ij} \in C^{k+1}$ ,  $f_i \in H^{k+1}$ ,  $h_i \in H^k$  für ein  $k > \frac{n}{2}$ , da unter diesen Annahmen nach

Satz 9.5.1 zunächst gilt  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  und  $H^{k+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$  gemäss Korollar 9.1.1. Derartige Regularitätsanforderungen an die Daten scheinen aber sehr einschränkend und wenig natürlich. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist daher, diese Bedingungen soweit wie möglich abzuschwächen. Wir betrachten dafür zunächst vereinfachte Formen der Gleichung (10.1.1).

## 10.2 Campanato-Abschätzungen

Sei  $v \in H^1$  schwache Lösung von

$$A^{(0)}v = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(0)} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{in } B_R(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (10.2.1)$$

wobei  $a_{ij}^{(0)} = a_{ji}^{(0)}$  konstant und elliptisch mit (10.1.3). Nach einer linearen Transformation geht (10.2.1) über in (9.1.1), und mit Satz 9.2.1 folgt  $v \in C^\infty(B_R(0))$ . Für  $0 < r < R$  setze

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{0,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} v(x) \, dx.$$

**Satz 10.2.1.** Für  $v \in H^1(B_R(0))$  mit (10.2.1) gilt

i)

$$\int_{B_r(0)} |v|^2 \, dx \leq C \left( \frac{r}{R} \right)^n \int_{B_R(0)} |v|^2 \, dx, \quad 0 < r \leq R; \quad (10.2.2)$$

ii)

$$\int_{B_r(0)} |v - \bar{v}_r|^2 \, dx \leq C \left( \frac{r}{R} \right)^{n+2} \int_{B_R(0)} |v - \bar{v}_R|^2 \, dx, \quad 0 < r \leq R. \quad (10.2.3)$$

**Beweis.** OBdA sei  $R = 1$ ; betrachte sonst  $\tilde{v}(x) = v(Rx)$ ,  $x \in B_1(0)$ . Zudem genügt es,  $r \leq \frac{1}{4}$  zu betrachten. (Wähle  $C \geq 4^n$ .)

i) Sei zunächst  $A^{(0)} = -\Delta$ . Mit Satz 9.2.1 und dem Sobolev-Einbettungssatz, Satz 9.1.1, erhalten wir für  $k > \frac{n}{2} - 2$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(B_{1/4}(0))} &\leq C \|v\|_{H^{k+2}(B_{1/4}(0))} \\ &\leq C \left( \|\Delta v\|_{H^k(B_{1/2}(0))} + \|v\|_{H^1(B_{1/2}(0))} \right) = C \|v\|_{H^1(B_{1/2}(0))}. \end{aligned}$$

Wähle  $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi \equiv 1$  auf  $B_{\frac{1}{2}}(0)$ . Dann gilt

$$0 = \int_{B_1(0)} (-\Delta v) v \varphi^2 \, dx = \int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2 \, dx + 2 \int_{B_1(0)} \nabla v \varphi \cdot v \nabla \varphi \, dx.$$

Mit der Youngschen Ungleichung

$$2|a \cdot b| \leq \frac{|a|^2}{2} + 2|b|^2$$

für  $a = \nabla v \varphi$ ,  $b = v \nabla \varphi \in \mathbb{R}^n$  erhalten wir

$$\left| 2 \int_{B_1(0)} \nabla v \varphi \cdot v \nabla \varphi \, dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2 \, dx + 2 \int_{B_1(0)} |v|^2 |\nabla \varphi|^2 \, dx$$

und damit

$$\int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2 \, dx \leq 4 \int_{B_1(0)} |v|^2 |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

Nach Wahl von  $\varphi$  ergibt dies die Abschätzung

$$\|v\|_{H^1(B_{1/2}(0))}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(B_{1/2}(0))}^2 + \|v\|_{L^2(B_{1/2}(0))}^2 \leq C \int_{B_1(0)} |v|^2 \, dx. \quad (10.2.4)$$

Für  $0 < r < 1/4$  folgt

$$\int_{B_r(0)} |v|^2 \, dx \leq Cr^n \|v\|_{L^\infty(B_{1/4}(0))}^2 \leq Cr^n \|v\|_{H^1(B_{1/2}(0))}^2 \leq Cr^n \int_{B_1(0)} |v|^2 \, dx,$$

wie gewünscht.

ii) Betrachte  $w = v - \bar{v}_1$ . Mit der Poincaré'schen Ungleichung, Lemma 7.1.2, folgt

$$\int_{B_r(0)} |v - \bar{v}_r|^2 \, dx = \int_{B_r(0)} |w - \bar{w}_r|^2 \, dx \leq Cr^2 \int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Da mit  $w$  auch die Komponenten von  $\nabla w$  harmonisch sind, folgt für  $0 < r < R = 1/2$  mit (10.2.2) und (10.2.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 &\leq Cr^n \int_{B_{1/2}(0)} |\nabla w|^2 \, dx \leq Cr^n \int_{B_1(0)} |w|^2 \, dx \\ &= Cr^n \int_{B_1(0)} |v - \bar{v}_1|^2 \, dx, \end{aligned}$$

also (10.2.3).

iii) Sei nun  $a^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})$  mit  $a_{ij}^{(0)} = a_{ji}^{(0)}$  elliptisch. Nach einer Rotation  $R$  gilt  $Ra^{(0)}R^t = (\lambda_i \delta_{ij})$  mit  $0 < \lambda \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \Lambda$ . Nach einer Streckung  $S$  der Koordinaten-Achsen erhalten wir  $SR a^{(0)}R^t S^t = id$ .

Sei  $T = SR: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nach Bemerkung 9.4.1 ist  $w = v \circ T^{-1}$  harmonisch auf  $T(B_1(0))$ . Sei  $0 < \delta \leq 1$  maximal mit

$$B_\delta(0) \subset T(B_1(0)) \subset B_{1/\delta}(0).$$

Dann folgt auch

$$B_{\delta r}(0) \subset T(B_r(0)) \subset B_{r/\delta}(0), \quad 0 < r < 1.$$

Mit (10.2.2) für  $A^{(0)} = -\Delta$  erhalten wir für  $0 < r < \delta^2/4$ :

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |v|^2 \, dx &\leq C \int_{B_{r/\delta}(0)} |w|^2 \, dx \\ &\leq Cr^n \delta^{-2n} \int_{B_\delta(0)} |w|^2 \, dx \leq C(\delta)r^n \int_{B_1(0)} |v|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Für (10.2.3) erfolgt die Abschätzung analog.  $\square$

Eine zu Satz 10.2.1 analoge Aussage gilt für Lösungen  $v \in H^1(B_R^+(0))$  von (10.2.1) auf

$$B_R^+(0) = \{(x', x_n) \in B_R(0); x_n > 0\}$$

mit

$$v = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}_+^n \cap B_R(0). \quad (10.2.5)$$

**Satz 10.2.2.** Sei  $v \in H^1(B_R^+(0))$  Lösung von (10.2.1), (10.2.5),  $0 < r < R$ . Dann gilt

i)

$$\int_{B_r^+(0)} |v|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} |v|^2 dx. \quad (10.2.6)$$

ii)

$$\int_{B_r^+(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

iii)

$$\int_{B_r^+(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R^+(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dx,$$

iv)

$$\int_{B_r^+(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} - \left( \overline{\frac{\partial v}{\partial x_n}} \right)_r \right|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} - \left( \overline{\frac{\partial v}{\partial x_n}} \right)_R \right|^2 dx.$$

**Bemerkung 10.2.1.** Setzen wir  $v$  fort auf  $B_R(0)$  mittels

$$v(x', x_n) = -v(x', -x_n), \quad x_n < 0,$$

mit

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_n) = -\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_n), \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

also auch

$$\left( \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} \right)_r = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

und mit

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', -x_n),$$

so können wir ii) und iv) zusammenfassen zu

v)

$$\int_{B_r(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_r|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_R|^2 dx.$$

Im Allgemeinen ist das so ergänzte  $v$  keine Lösung von  $A^{(0)}v = 0$  in  $B_R(0)$ .

**Beweis von Satz 10.2.2.** i) Sei zunächst  $A^{(0)} = -\Delta$ . Setze  $v$  fort zu  $v \in H^1(B_R(0))$  mit  $v(x', x_n) = -v(x', -x_n)$ . Dann ist  $v$  schwach harmonisch mit

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} v \, dx = 0.$$

Die Behauptung folgt mit Satz 10.2.1.

Für allgemeine  $A^{(0)}$  verfahren wir analog zum Beweis von Satz 10.2.1. Wähle eine lineare Transformation  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $w = v \circ T^{-1}$  harmonisch auf  $T(B_R^+(0)) =: \Omega$  und dazu  $\delta > 0$  maximal mit  $B_{\delta R}(0) \subset T(B_R(0))$ . Für  $0 < r < \delta R$  folgt die Behauptung mit i). Für  $\delta R < r < R$  ist die Behauptung wahr für genügend grosses  $C > 0$ .

ii) Die Abschätzung (10.2.6) gilt auch für jede tangentielle Ableitung  $\partial v / \partial x_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ .

iii) Zur Abschätzung von  $\partial v / \partial x_n$  betrachte wieder  $w = v \circ T^{-1}$  mit  $\Delta w = 0$  in  $T(B_R^+(0))$ . Setze  $w$  antisymmetrisch fort auf  $B_{\delta R}(0) \subset T(B_R(0))$  und benutze Satz 10.2.1. Für  $0 < r < \delta R$  erhalten wir auf diesem Wege die Abschätzung

$$\int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 \, dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(0)} |\nabla w|^2 \, dx$$

sowie

$$\int_{B_r(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_r|^2 \, dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_R|^2 \, dx.$$

Es folgt

$$\int_{B_r^+(0)} |\nabla v|^2 \, dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R^+(0)} |\nabla v|^2 \, dx, \quad 0 < r < R,$$

wie gewünscht.

iv) Zum Beweis der noch fehlenden Abschätzung benutzen wir die folgende Minimaleigenschaft des Mittelwerts.

**Behauptung.** Sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann gilt für jedes  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r < 1$  die Abschätzung

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 \, dx = \min_{a \in \mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - a|^2 \, dx.$$

**Beweis.** Sei  $a_0 \in \mathbb{R}$  mit

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - a_0|^2 \, dx = \min_{a \in \mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - a|^2 \, dx.$$

Mit

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{da} \Big|_{a=a_0} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - a|^2 \, dx = \int_{\Omega_r(x_0)} (a_0 - f) \, dx$$

folgt die Behauptung.  $\square$

Somit erhalten wir mit Satz 10.2.1 für  $0 < r < \delta^2 R$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^+(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_r|^2 dx &= \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r^+(0)} |\nabla v - a|^2 dx \\
&\leq C \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r/\delta}(0)} |\nabla w - a|^2 dx = C \int_{B_{r/\delta}(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_{r/\delta}|^2 dx \\
&\leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_{\delta R}(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_{\delta R}|^2 dx \\
&= C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\delta R}(0)} |\nabla w - a|^2 dx \\
&\leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_R|^2 dx,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis von zu (10.2.2), (10.2.3), (10.2.6) analogen Abschätzungen für Lösungen  $u \in H^1$  der Gleichung

$$A^{(0)}u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h. \quad (10.2.7)$$

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz.

**Lemma 10.2.1.** *Sei  $h \in L^2(B_R^{(+)}(0))$ ,  $w \in H_0^1(B_R^{(+)}(0))$ . Dann gilt für jedes  $\delta > 0$  die Abschätzung*

$$\left| \int_{B_R^{(+)}(0)} hw \, dx \right| \leq \delta \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 \, dx + C\delta^{-1}R^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2 \, dx.$$

**Beweis.** Mit der Youngschen Ungleichung  $2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , wobei  $\varepsilon = \delta R^{-2}$ , schätzen wir ab

$$\left| \int_{B_R^{(+)}(0)} hw \, dx \right| \leq \|h\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \leq \delta R^{-2} \|w\|_{L^2}^2 + \delta^{-1}R^2 \|h\|_{L^2}^2.$$

Gemäss der Poincaré'schen Ungleichung, Lemma 7.1.2, gilt weiter

$$\|w\|_{L^2}^2 = \int_{B_R^{(+)}(0)} |w|^2 \, dx \leq CR^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

**Lemma 10.2.2.** *Sei  $u \in H^1(B_R(0))$ , bzw. sei  $u \in H^1(B_R^+(0))$  mit (10.2.5) Lösung von (10.2.7) auf  $B_R^{(+)}(0)$ , wobei  $f = (f_i)$ ,  $h \in L^2(B_R^{(+)}(0))$ . Dann gelten für  $0 < r < R$  die Ungleichungen*

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla u|^2 \, dx + C \int_{B_R^{(+)}(0)} |f - \bar{f}_R|^2 \, dx \\
&\quad + CR^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2 \, dx
\end{aligned}$$

sowie, mit der Konvention aus Bemerkung 10.2.1,

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2 dx &\leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2 dx \\ &\quad + C \int_{B_R^{(+)}(0)} |f - \bar{f}_R|^2 dx + CR^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2 dx. \end{aligned}$$

**Beweis.** Zerlege  $u = v + w$ , wobei  $A^{(0)}v = 0$  und  $w \in H_0^1(B_R^{(+)}(0))$ . Mit Satz 10.2.1 und Satz 10.2.2 folgt

$$\begin{aligned} \int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla u|^2 dx &\leq 2 \int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 dx \\ &\leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 dx \\ &\leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla u|^2 dx + C \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 dx. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \int_{B_R^{(+)}(0)} (A^{(0)}w)w dx &= \int_{B_R^{(+)}(0)} \left( - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \right) w dx \\ &= \int_{B_R^{(+)}(0)} a_{ij}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx \geq \lambda \|\nabla w\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

wegen  $A^{(0)}w = A^{(0)}u = h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  aus Lemma 10.2.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla w\|_{L^2}^2 &\leq \int_{B_R^{(+)}(0)} (A^{(0)}w)w dx = \int_{B_R^{(+)}(0)} \left( h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) w dx \\ &\leq \frac{\lambda}{4} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + CR^2 \|h\|_{L^2}^2 + \int_{B_R^{(+)}(0)} (f_i - (\bar{f}_i)_R) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + C \int_{B_R^{(+)}(0)} |f - \bar{f}_R|^2 dx + CR^2 \|h\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Mit (10.2.3), bzw. Bemerkung 10.2.1.v) folgt die 2. Behauptung analog.  $\square$

## 10.3 Morrey-Campanato-Räume

Wie kann man die im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Abschätzungen nutzen?

**Definition 10.3.1. (Morrey)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $0 \leq \nu \leq n$ . Setze

$$L^{2,\nu}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); [f]_{L^{2,\nu}}^2 = \sup_{x_0 \in \Omega, 0 < r < 1} (r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 dx) < \infty\}$$

mit Norm

$$\|f\|_{L^{2,\nu}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + [f]_{L^{2,\nu}(\Omega)}.$$

**Bemerkung 10.3.1.** i) Es gilt  $L^{2,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

ii) Weiter gilt  $L^{2,\nu}(\Omega) = \{0\}$  für  $\nu > n$ .

**Lemma 10.3.1.** Sei  $\Omega$  vom Typ A für ein  $A > 0$ , und sei  $0 \leq \nu < n$ . Dann gilt

$$L^{2,\nu}(\Omega) \cong \mathcal{L}^{2,\nu}.$$

**Beweis.** i) Seien  $f \in L^{2,\nu}(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r < 1$ . Mit der Minimaleigenschaft des Mittels folgt

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 dx \leq \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 dx \leq r^\nu \|f\|_{L^{2,\nu}}^2,$$

also

$$[f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}} \leq \|f\|_{L^{2,\nu}}.$$

ii) Sei  $f \in \mathcal{L}^{2,\nu}(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$ ,  $0 < r < 1$ . Schätze ab

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 dx + 2|\bar{f}_{r,x_0}|^2.$$

Setze  $r_i = 2^i r$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ . Wähle  $i_0 \in \mathbb{N}$  mit  $2 > r_{i_0} \geq 1$ . Dann gilt

$$|\bar{f}_{r,x_0}| \leq \sum_{i=1}^{i_0} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| + |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|$$

und

$$\begin{aligned} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| &\leq C \left( \int_{\Omega_{r_{i-1}(x_0)}} |f - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega_{r_i(x_0)}} |f - \bar{f}_{r_i,x_0}|^2 dx \right)^{1/2} \leq C r_i^{\frac{\nu-n}{2}} [f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}. \end{aligned}$$

Da  $\nu < n$ , konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\frac{\nu-n}{2}} = r^{\frac{\nu-n}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i \frac{\nu-n}{2}} = C r^{\frac{\nu-n}{2}}.$$

Es folgt

$$\left( \sum_{i=1}^{i_0} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| \right)^2 \leq C r^{\nu-n} [f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}^2.$$

Zusammen mit der Abschätzung

$$r^{n-\nu} |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|^2 \leq |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|^2 \leq C \int_{\Omega} |f|^2 dx$$

ergibt dies

$$\begin{aligned} r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 dx &\leq 2r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 dx + C r^{n-\nu} |\bar{f}_{r,x_0}|^2 \\ &\leq C [f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}^2 + C \|f\|_{L^2}^2 \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\nu}}^2, \end{aligned}$$

wie gewünscht.  $\square$



**Bemerkung 10.3.2.** Für  $\nu = n$  gilt die Aussage nicht, da einerseits gemäss Bemerkung 10.3.1.i) gilt  $L^{2,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , während wir andererseits aber in Beispiel 8.1.2.ii) und Satz 8.6.6 gezeigt haben, dass

$$\mathcal{L}^{2,n}(\Omega) \supset W^{1,n}(\Omega) \ni \log \log \left( \frac{1}{|x|} \right) \notin L^\infty(\Omega).$$

**Lemma 10.3.2.** Sei  $\phi: ]0, R_0] \rightarrow [0, \infty[$  monoton wachsend mit

$$\phi(r) \leq A \left( \left( \frac{r}{R} \right)^\alpha + \varepsilon \right) \phi(R) + BR^\beta, \quad 0 < r < R \leq R_0, \quad (10.3.1)$$

wobei  $0 < \beta < \alpha$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ . Dann existieren  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \alpha, \beta) > 0$  und  $C = C(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ , so dass für  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  folgt

$$\phi(r) \leq C \left( \left( \frac{r}{R} \right)^\beta \phi(R) + Br^\beta \right), \quad 0 < r < R \leq R_0.$$

**Beweis.** OBdA sei  $A \geq 1$ . Wähle Zahlen  $\gamma, \tau > 0$  mit  $\beta < \gamma < \alpha$ ,  $0 < \tau < 1$ , so dass

$$2A\tau^\alpha = \tau^\gamma.$$

Setze  $\varepsilon_0 := \tau^\alpha$  und nimm an,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Für  $0 < R \leq R_0$ ,  $r = \tau R$  ergibt (10.3.1) die Abschätzung

$$\phi(\tau R) \leq 2A\tau^\alpha \phi(R) + BR^\beta = \tau^\gamma \phi(R) + BR^\beta.$$

Iteration ergibt für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \phi(\tau^{k+1}R) &\leq \tau^\gamma \phi(\tau^k R) + B(\tau^k R)^\beta \\ &\leq \tau^{2\gamma} \phi(\tau^{k-1}R) + \tau^\gamma B(\tau^{k-1}R)^\beta + B(\tau^k R)^\beta \\ &\dots \\ &\leq \tau^{(k+1)\gamma} \phi(R) + B \sum_{l=0}^k \tau^{l\gamma} \tau^{(k-l)\beta} R^\beta \\ &= \tau^{(k+1)\gamma} \phi(R) + B \sum_{l=0}^k (\tau^{\gamma-\beta})^l (\tau^k R)^\beta. \end{aligned}$$

Zu  $0 < r < \tau^2 R$  wähle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\tau^{k+2}R < r \leq \tau^{k+1}R$ . Mit der Monotonie von  $\phi$ , der Ungleichung  $\tau^{(k+1)\gamma} \leq \tau^{(k+1)\beta}$ , und unter Beachtung der Konvergenz der Reihe  $C_0 := \sum_{l=0}^{\infty} (\tau^{\gamma-\beta})^l < \infty$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(r) &\leq \phi(\tau^{k+1}R) \leq \tau^{(k+1)\beta} \phi(R) + BC_0(\tau^k R)^\beta \\ &\leq \tau^{-\beta} \left( \frac{r}{R} \right)^\beta \phi(R) + BC_0 \tau^{-2\beta} r^\beta \leq C \left( \left( \frac{r}{R} \right)^\beta \phi(R) + Br^\beta \right), \end{aligned}$$

wobei  $C = \max\{\tau^{-\beta}, C_0 \tau^{-2\beta}\}$ . Die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 10.3.1.** Sei  $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , bzw.  $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$  mit  $u = 0$  auf  $\partial\mathbb{R}_+^n$  Lösung von (10.2.7) mit  $\text{supp}(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $h \in L^{2,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$  mit  $0 < \mu = \nu + 2 < n + 2$ . Dann gilt

$$\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\mathbb{R}_+^n),$$

und

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\mu}} \leq C(\|u\|_{H^1} + [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}).$$

**Beweis.** Zu zeigen ist für  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $0 < r < 1$  die Abschätzung

$$r^{-\mu} \int_{B_r(x_0) \cap \mathbb{R}_+^n} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2 dx \leq C(\|u\|_{H^1}^2 + [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}}^2 + \|h\|_{L^{2,\nu}}^2). \quad (10.3.2)$$

Wie eine elementargeometrische Betrachtung zeigt, genügt es für  $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ , die Fälle  $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}_+^n$ , bzw.  $x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$  zu betrachten.

Setze

$$\phi(r) = \int_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2 dx,$$

wobei wir wie in Lemma 10.2.2 im Falle  $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ , die Funktion  $u$  antisymmetrisch ergänzen. Für  $0 \leq r < R \leq 1$  gilt wegen der Minimaleigenschaft des Mittels

$$\phi(r) \leq \int_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2 dx \leq \phi(R).$$

Weiter ergibt Lemma 10.2.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \phi(r) &\leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \phi(R) + C \int_{B_R^{(+)}(x_0)} |f - \bar{f}_R|^2 dx + CR^2 \int_{B_R^{(+)}(x_0)} |h|^2 dx \\ &\leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \phi(R) + CR^\mu [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}}^2 + CR^{2+\nu} \|h\|_{L^{2,\nu}}^2. \end{aligned}$$

Mit Lemma 10.3.2 folgt für  $\mu = \nu + 2 < n + 2$  und  $0 < r < R = 1$  die Ungleichung

$$\phi(r) \leq Cr^\mu \phi(1) + Cr^\mu ([f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}}^2 + \|h\|_{L^{2,\nu}}^2).$$

Nach Division durch  $r^\mu$  erhalten wir (10.3.2).  $\square$

**Bemerkung 10.3.3.** Speziell für  $\mu = \nu + 2 = n + 2\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  ergibt Satz 10.3.1 zusammen mit Satz 8.6.5, dass  $\nabla u \in C^{0,\alpha}$ . Da weiter für  $f \in C^{0,\alpha}$  gemäss Satz 8.6.7 auch gilt  $f \in \mathcal{L}^{2,\mu}$ , können wir die Regularitätsabschätzung in Satz 10.3.1 auch in der Form schreiben

$$\|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C(\|u\|_{H^1} + [f]_{C^{0,\alpha}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}).$$

## 10.4 A-priori Abschätzungen in Hölder-Normen

Betrachte nun die Gleichung

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h, \quad (10.4.1)$$

wobei  $a_{ij} = a_{ji}$  gleichmässig elliptisch und mit weiteren, noch zu spezifizierenden Regularitätsannahmen.

**Lemma 10.4.1.** *i) Sei  $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 < \alpha < 1$  Lösung von (10.4.1), wobei  $a_{ij}, f_i \in C^\alpha$ ,  $c, h \in C^0$ , und  $\text{supp}(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$ . Dann existieren Konstanten  $C, \delta > 0$  nur abhängig von  $a_{ij}(0) =: a_{ij}^{(0)}$ , so dass*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}),$$

falls gilt

$$\sup_{x \in \text{supp}(u)} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)| < \delta.$$

*ii) Eine analoge Aussage gilt, falls  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  Lösung von (10.4.1) mit  $u \equiv 0$  auf  $\partial\mathbb{R}_+^n$  und  $\text{supp}(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$ .*

**Beweis.** Schreibe (10.4.1) äquivalent als

$$\begin{aligned} A^{(0)}u &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = (A^{(0)}u - Au) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( (a_{ij}^{(0)} - a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h - cu = -\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}_i + \tilde{h}, \end{aligned} \quad (10.4.2)$$

mit  $\tilde{h} = h - cu \in C^0$ ,  $\tilde{f}_i = (a_{ij}^{(0)} - a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + f_i \in C^\alpha$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Setze  $\mu = n + 2\alpha$ ,  $\nu = \mu - 2 = n - 2 + 2\alpha < n$ . Dann gilt  $C^\alpha \cong \mathcal{L}^{2,\mu}$  gemäss Satz 8.6.7, bzw.  $C^0 \hookrightarrow L^\infty \hookrightarrow L^{2,\nu}$  auf  $\text{supp}(u)$ , und wir können die rechte Seite von (10.4.2) auffassen als  $\tilde{f}_i \in \mathcal{L}^{2,\mu}$ , bzw.  $\tilde{h} \in L^{2,\nu}$ . Mit Satz 10.3.1 und Bemerkung 10.3.3 folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{C^\alpha} &\leq C(\|u\|_{H^1} + \|\tilde{f}\|_{C^\alpha} + \|\tilde{h}\|_{L^{2,\nu}}) \\ &\leq C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}) + C_1 \delta \|\nabla u\|_{C^\alpha} + C \|u\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Für  $\delta < \frac{C_1}{2}$  folgt

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}) + C \|u\|_{C^1}.$$

Die Behauptung erhalten wir, indem wir das nachfolgende Lemma 10.4.2 mit  $X = C^{1,\alpha}(\Omega)$ ,  $Y = C^1(\overline{\Omega})$ ,  $Z = H^1(\Omega)$  anwenden für ein  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp}(u) \subset \Omega$ .  $\square$

**Lemma 10.4.2. (Ehrling, Gagliardo, Nirenberg)** *Seien  $X, Y, Z$  Banachräume mit stetigen Einbettungen  $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ , wobei  $X \hookrightarrow Y$  kompakt. Dann existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Konstante  $C(\epsilon)$  mit*

$$\forall x \in X: \|x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X + C(\epsilon) \|x\|_Z.$$

**Beweis.** Nimm widerspruchswise an, es existieren  $(x_k) \subset X$ ,  $\epsilon > 0$  mit

$$1 = \|x_k\|_Y \geq \epsilon \|x_k\|_X + k \|x_k\|_Z, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $(x_k) \subset X$  beschränkt, und  $\|x_k\|_Z \leq \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $X \hookrightarrow Y$  kompakt, gibt es eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  und  $y \in Y$  mit  $x_k \rightarrow y$  in  $Y$  ( $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ ). Da  $Y \hookrightarrow Z$ , gilt auch  $x_k \rightarrow y$  in  $Z$  ( $k \rightarrow \infty$ ,  $k \in \Lambda$ ). Jedoch gilt

$$\|y\|_Z = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \Lambda} \|x_k\|_Z = 0;$$

das heisst,  $y = 0$ , und mit

$$1 = \|x_k\|_Y \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda)$$

folgt der gewünschte Widerspruch.  $\square$

Analog zu Lemma 10.4.1 gilt

**Lemma 10.4.3.** *i) Sei  $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 < \alpha < 1$  Lösung von (10.4.1), wobei  $a_{ij}, f_i \in C^{1,\alpha}$ ,  $c, h \in C^\alpha$ , und mit  $\text{supp}(u) \subset \subset \mathbb{R}^n$ . Weiter sei  $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}(0)$ . Dann existieren Konstanten  $C, \delta = \delta(a_{ij}^{(0)}) > 0$ , so dass*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}),$$

*falls gilt*

$$\sup_{\text{supp}(u)} |a_{ij} - a_{ij}^{(0)}| < \delta.$$

*ii) Eine analoge Aussage gilt, falls  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  mit  $u \equiv 0$  auf  $\partial\mathbb{R}_+^n$  und mit  $\text{supp}(u) \subset \subset \mathbb{R}^n$ .*

**Beweis.** Differenziere (10.4.2) in Richtung  $x_k$ , wobei  $1 \leq k \leq n-1$  im Falle ii). Dann ist  $U_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$  Lösung von

$$A^{(0)}U_k = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_k} - \delta_{ik} \tilde{h} \right)$$

mit  $U_k \equiv 0$  auf  $\partial\mathbb{R}_+^n$  im Falle von ii), wobei

$$\tilde{f}_i = f_i + (a_{ij}^{(0)} - a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in C^{1,\alpha}, \quad \tilde{h} = h - cu \in C^\alpha.$$

Mit Satz 10.3.1 folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla U_k\|_{C^\alpha} &\leq C(\|U_k\|_{H^1} + \|\tilde{f}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\tilde{h}\|_{C^\alpha}) \\ &\leq C(\|u\|_{H^2} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}) + C_1 \delta \|u\|_{C^{2,\alpha}} + C \|u\|_{C^2}. \end{aligned}$$

Im Falle i) folgt nach Summation über  $k$  für  $C_1 \delta < \frac{1}{2n}$  die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|u\|_{H^2} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}) + C \|u\|_{C^2},$$

Mit Lemma 10.4.2 erhalten wir zudem

$$\|u\|_{H^2} + \|u\|_{C^2} \leq \epsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}} + C \|u\|_{H^1},$$

und damit die Behauptung.

Im Fall ii) benutzen wir zunächst (10.4.1), um abzuschätzen

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \right\|_{C^\alpha} &\leq C \|Au\|_{C^\alpha} + C \sum_{k=1}^{n-1} \|\nabla U_k\|_{C^\alpha} + C \|u\|_{C^{1,\alpha}} \\ &\leq C(\|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}) + C(\|u\|_{H^2} + \delta \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \|u\|_{C^2}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wie im Fall i).  $\square$

**Bemerkung 10.4.1.** Beachte, dass im Unterschied zu Lemma 10.4.1 im Lemma 10.4.3 die Annahmen  $f \in C^{1,\alpha}$ ,  $h \in C^{0,\alpha}$  es erlauben, den Term  $\frac{\partial f^i}{\partial x^i}$  und die Funktion  $h$  zu einer einzigen Funktion  $g \in C^{0,\alpha}$  zusammenzufassen. Im folgenden genügt es daher, statt (10.4.1) die Gleichung

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu = g, \quad (10.4.3)$$

mit gleichmäßig elliptischen Koeffizienten  $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}$  und  $g \in C^{0,\alpha}$  zu betrachten. Da die Form (10.4.1) der Gleichung es jedoch erlaubt, die bei Umformungen entstehenden neuen Terme bequem im Term  $\frac{\partial f^i}{\partial x^i}$  zu absorbieren, behalten wir diese Form in den Aussagen der Sätze bei, benutzen dann aber die vereinfachte Form (10.4.3) für die Beweise.

**Satz 10.4.1.** Sei  $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^{2,\alpha}$  für ein  $0 < \alpha < 1$ , Weiter seien  $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$  gleichmäßig elliptisch,  $c \in C^\alpha(\Omega)$ .

Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so dass für jedes  $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , jedes  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^{1,\alpha}(\Omega)$  und jedes  $h \in C^\alpha(\Omega)$  für jede Lösung  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  von (10.4.1) mit  $u = u_0$  auf  $\partial\Omega$  gilt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}}).$$

**Beweis.** OBdA sei  $u_0 = 0$ . Betrachte sonst  $\tilde{u} = u - u_0$ ,  $\tilde{f}_i = f_i + a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , mit

$$\|\tilde{f}\|_{C^{1,\alpha}} \leq \|f\|_{C^{1,\alpha}} + C\|u_0\|_{C^{2,\alpha}}.$$

Für eine elliptische Matrix mit Koeffizienten  $b_{ij} = b_{ji}$  sei  $\delta(b_{ij}) > 0$  die kleinere der in Lemma 10.4.1 und Lemma 10.4.3 auftretenden Konstanten.

Zu jedem  $x_0 \in \partial\Omega$  gibt es nach Annahme eine Umgebung  $U_0 = U(x_0) \subset\subset \mathbb{R}^n$  und einen  $C^{2,\alpha}$ -Diffeomorphismus  $H_0: Q \rightarrow U_0$  mit

$$H_0(Q_+) = U_0 \cap \Omega, \quad H_0(Q_0) = U_0 \cap \partial\Omega \quad (10.4.4)$$

sowie mit

$$\sup_{x \in U_0 \cap \Omega} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)| < \delta, \quad \sup_{y \in Q} |h_{ij}(y) - h_{ij}^{(0)}| < \delta(h_{ij}^{(0)}) \quad (10.4.5)$$

für ein noch zu bestimmendes  $\delta > 0$ , wobei  $(h_{ij}) = H_0^*(a_{ij}(x_0))$  und mit  $h_{ij}^{(0)} = h_{ij}(0)$ . Da  $\partial\Omega$  kompakt, genügen endlich viele derartige Mengen  $U_l = U(x_l)$ ,

$1 \leq l \leq L_0$ , um  $\partial\Omega$  zu überdecken. Wähle dazu weitere offene Mengen  $U_l = U(x_l) \subset\subset \Omega$ ,  $L_0 + 1 \leq l \leq L$ , mit

$$\sup_{x \in U_l} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_l)| < \delta(a_{ij}(x_l)) \quad \text{für } L_0 + 1 \leq l \leq L. \quad (10.4.6)$$

Schliesslich sei  $(\varphi_l)_{1 \leq l \leq L}$  eine Zerlegung der Eins bezüglich  $(U_l)_{1 \leq l \leq L}$  und zerlege

$$u = \sum_{l=1}^L u_l \quad \text{mit } u_l = u\varphi_l, \quad 1 \leq l \leq L.$$

i) Sei  $L_0 + 1 \leq l \leq L$ . Dann löst  $u_l = u\varphi_l$  mit  $\text{supp}(u_l) \subset U_l \subset\subset \Omega$  die Gleichung

$$\begin{aligned} Au_l &= (Au)\varphi_l - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} u \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \right) - a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( f_i \varphi_l + a_{ij} u \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \right) + h\varphi_l + f_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \tilde{f}_{l,i}}{\partial x_i} + \tilde{h}_l \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

mit

$$\tilde{f}_{l,i} = f_i \varphi_l + a_{ij} u \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}, \quad \tilde{h}_l = h\varphi_l + f_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Lemma 10.4.3 ergibt

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{C^{2,\alpha}} &\leq C(\|u_l\|_{H^1} + \|\tilde{f}_l\|_{C^{1,\alpha}} + \|\tilde{h}_l\|_{C^\alpha}) \\ &\leq C(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}). \end{aligned}$$

ii) Sei  $1 \leq l \leq L_0$ ,  $U_l \not\subset \Omega$ . Wie in (10.4.7) erhalten wir die Gleichung

$$Au_l = -\frac{\partial \tilde{f}_{l,i}}{\partial x_i} + \tilde{h}_l$$

mit

$$\tilde{f}_{l,i} = f_i \varphi_l + a_{ij} u \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}, \quad \tilde{h}_l = h\varphi_l + f_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Um diese Gleichung mittels  $H_l$  zu transformieren, fixieren wir  $a_{ij}^{(l)} = a_{ij}(x_l)$  und definieren

$$A^{(l)}u_l := -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(l)} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} A^{(l)}u_l &= A^{(l)}u_l - Au_l + Au_l \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( (a_{ij}^{(l)} - a_{ij}) \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) - cu_l - \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}_{l,i} + \tilde{h}_l = -\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{f}_{l,i} + \hat{h}_l =: g_l, \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{f}_{l,i} = \tilde{f}_{l,i} + (a_{ij}^{(l)} - a_{ij}) \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \in C^{1,\alpha}, \quad \hat{h}_l = \tilde{h}_l - cu_l \in C^{0,\alpha}.$$

Gemäss Bemerkung 9.4.1 erfüllt  $v_l = u_l \circ H_l \in C^{2,\alpha}(Q_+)$  die Gleichung

$$-\Delta_{h_l} v_l = -\frac{1}{\sqrt{|h_l|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \sqrt{|h_l|} h_l^{ij} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} \right) = g_l \circ H_l$$

mit  $(h_{l,ij}) = H_l^*(a_{ij}^{(l)})$ ; das heisst, es gilt

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left( h_l^{ij} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} \right) = h_l^{ij} \frac{\partial(\log \sqrt{|h_l|})}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} + g_l \circ H_l =: j_l$$

mit

$$j_l = h_l^{ij} \frac{\partial(\log \sqrt{|h_l|})}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} + g_l \circ H_l \in C^{0,\alpha}(Q).$$

Weiter gilt

$$v_l = 0 \text{ auf } Q_0, \text{ supp}(v_l) \subset\subset Q,$$

und Lemma 10.4.3 ergibt

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{C^{2,\alpha}} &\leq C \|v_l\|_{C^{2,\alpha}} \leq C (\|v_l\|_{H^1} + \|j_l\|_{C^\alpha}) \\ &\leq C (\|v_l\|_{H^1} + \|g_l\|_{C^\alpha} + \|v_l\|_{C^{1,\alpha}}) \\ &\leq C (\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}) + C_1 \delta \|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \end{aligned}$$

mit einer von der Wahl der Überdeckung  $(U_l)_{1 \leq l \leq L}$  unabhängigen Konstanten  $C_1 > 0$ . Wählen wir  $\delta > 0$  mit  $C_1 \delta \leq 1/2$ , erhalten wir mit i) und ii) für  $1 \leq l \leq L$  die Abschätzung

$$\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \leq C (\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}).$$

Nach Summation über  $l$  erhalten wir

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq \sum_{l=1}^L \|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \leq C (\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}),$$

und mit Lemma 10.4.2 folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 10.4.2.** i) Analoge Abschätzungen gelten für  $C^{2,\alpha}$ -Lösungen  $u$  der Gleichung

$$-\Delta_g u = -\operatorname{div}_g f + h$$

auf einer geschlossenen (kompakt, ohne Rand) Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ .

ii) Dasselbe gilt für Operatoren

$$Au = -a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + cu$$

mit gleichmässig elliptischen Koeffizienten  $a_{ij} = a_{ji} \in C^\alpha$ . Schreibe dazu mit einer geeigneten Überdeckung  $(U_l)$  von  $\Omega$

$$Au = A^{(l)} u + (Au - A^{(l)} u) \text{ in } U_l, \quad 1 \leq l \leq L,$$

wobei

$$A^{(l)} u = -a_{ij}^{(l)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(l)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

mit  $a_{ij}^{(l)} = a_{ij}(x_l)$  für ein  $x_l \in U_l \cap \Omega$ . Der Störterm lässt sich abschätzen

$$\|Au - A^{(l)}u\|_{C^\alpha} \leq \|(a_{ij} - a_{ij}^{(l)}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{C^\alpha} \leq C \|u\|_{C^2} + \delta \|u\|_{C^{2,\alpha}},$$

wobei wir zu vorgegebenem  $\delta_0 > 0$  durch Wahl einer genügend feinen Überdeckung  $(U_l)$  von  $\Omega$  erreichen können, dass

$$\delta = \sup_{x \in U_l \cap \Omega, 1 \leq l \leq L} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_l)| < \delta_0.$$

Für genügend kleines  $\delta_0 > 0$  liefert Satz 10.4.1 die gewünschte  $C^{2,\alpha}$ -Abschätzung.

## 10.5 Existenzsätze

Betrachte zunächst die Aufgabe

$$\begin{aligned} A^{(0)}u &= -\Delta u = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.5.1}$$

**Satz 10.5.1.** Sei  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^{k+2}$ ,  $k > \frac{n}{2} + \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Dann gibt es zu jedem  $u_0 \in C^{2,\alpha}$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^{1,\alpha}$ ,  $h \in C^\alpha$  genau eine Lösung  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  von (10.5.1), und

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}}) \tag{10.5.2}$$

**Beweis.** OBdA sei  $u_0 = 0$ . (Sonst betrachte  $\tilde{u} = u - u_0$ ,  $\tilde{f} = f - \nabla u_0$ .) Weiter gelte oBdA  $f = 0$  – sonst betrachte  $\tilde{h} = h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in C^\alpha$  – und  $h \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ .

Sei  $(\rho_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  glättender Kern wie in Lemma 7.3.3,  $h_\epsilon = h * \rho_\epsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $\epsilon > 0$ . Nach Satz 9.1.1 gibt es zu  $h_\epsilon$  eine eindeutige Lösung  $u_\epsilon \in \cap_{k \in \mathbb{N}} H^{k+2} \cap H_0^1(\Omega)$  von

$$\begin{aligned} -\Delta u_\epsilon &= h_\epsilon \quad \text{in } \Omega \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.5.3}$$

Für  $k > \frac{n}{2} + \alpha$  ergibt Satz 9.1.1, dass  $u_\epsilon \in C^{2,\alpha}$ , und gemäss Satz 10.4.1 gilt

$$\|u_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|u_\epsilon\|_{H^1} + \|h_\epsilon\|_{C^\alpha}).$$

Weiter folgt aus (10.5.3) mit Lemma 7.1.2 die Abschätzung

$$c_0^{-1} \|u_\epsilon\|_{H^1}^2 \leq \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} (-\Delta u_\epsilon) u_\epsilon \, dx \leq \|h_\epsilon\|_{L^2} \|u_\epsilon\|_{L^2} \leq \|h_\epsilon\|_{L^2} \|u_\epsilon\|_{H^1};$$

das heisst, es gilt

$$\|u_\epsilon\|_{H^1} \leq C \|h_\epsilon\|_{L^2} \leq C \|h_\epsilon\|_{C^\alpha}.$$

Zudem gilt  $\|h_\epsilon\|_{C^\alpha} \leq \|h\|_{C^\alpha}$ , denn einerseits können wir abschätzen

$$\|h_\epsilon\|_{L^\infty} = \sup |h * \rho_\epsilon| \leq \|h\|_{L^\infty};$$



andererseits erhalten wir

$$[h_\epsilon]_{C^\alpha} \leq \sup_{x_1 \neq x_2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(x_1 - y) - h(x_2 - y)| \rho_\epsilon(y)}{|x_1 - x_2|^\alpha} dy \leq [h]_{C^\alpha}.$$

Mit Satz 8.6.2 folgt  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $C^2$  für eine geeignete Folge  $\epsilon \rightarrow 0$ , und mit

$$\frac{|\nabla^2 u(x) - \nabla^2 u(y)|}{|x - y|^\alpha} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{|\nabla^2 u_\epsilon(x) - \nabla^2 u_\epsilon(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \limsup_{\epsilon \downarrow 0} [\nabla^2 u_\epsilon]_{C^\alpha} \leq C$$

für jedes  $x \neq y \in \Omega$  folgt  $u \in C^{2,\alpha}$ . Weiter löst  $u$  die Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= h \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und nach Satz 7.1.2 ist  $u$  eindeutig bestimmt.  $\square$

**Satz 10.5.2.** Die Aussage von Satz 10.5.1 bleibt richtig für den Operator

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu$$

statt  $A^{(0)} = -\Delta$ , sofern  $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}$  gleichmässig elliptisch,  $0 \leq c \in C^\alpha$ .

**Bemerkung 10.5.1.** Die Eigenfunktionen  $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$  des Laplace-Operators erfüllen

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi_i - \lambda_i \varphi_i &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \varphi_i &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 10.5.2 gilt also nicht für beliebige  $c \in C^\alpha$ .

**Beweis von Satz 10.5.2.** Wie vorher genügt es,  $u_0 \equiv 0$  und  $f \equiv 0$  zu betrachten. Wir benutzen die "Kontinuitätsmethode": Für  $0 \leq t \leq 1$  setze

$$A^{(t)}u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(t)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c^{(t)}u$$

mit  $a_{ij}^{(t)} = (1-t)\delta_{ij} + ta_{ij} = a_{ji}^{(t)}$ ,  $c^{(t)} = tc$ .

Offenbar ist  $(a_{ij}^{(t)})$  gleichmässig elliptisch mit Konstanten  $0 < \lambda \leq \Lambda$  unabhängig von  $t$ , und  $c^{(t)} \geq 0$ . Für  $u \in C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega)$  folgt

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 &\leq \int_{\Omega} a_{ij}^{(t)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \leq \int_{\Omega} (A^{(t)}u)u dx \\ &\leq \|A^{(t)}u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq C \|A^{(t)}u\|_{C^\alpha} \|u\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Mit der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.2, erhalten wir die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq C_1 \|A^{(t)}u\|_{C^\alpha} \quad (10.5.4)$$

mit einer von  $t \in [0, 1]$  unabhängigen Konstanten  $C_1$ . Zusammen mit Satz 10.5.1 folgt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_2 \|A^{(t)}u\|_{C^\alpha}, \quad (10.5.5)$$

wobei die Konstante  $C_2$  unabhängig von  $t$  gewählt werden kann.

Setze nun

$$X = C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega), \quad Y = C^\alpha(\Omega),$$

und betrachte

$$I = \{t \in [0, 1]; A^{(t)} : X \rightarrow Y \text{ surjektiv}\}.$$

Wir zeigen:  $I = [0, 1]$ ; insbesondere gilt dann  $1 \in I$ , und die Behauptung folgt. Beachte  $I \neq \emptyset$ , da  $0 \in I$  nach Satz 10.5.1.

**Behauptung 1.**  $I$  ist abgeschlossen.

**Beweis.** Sei  $(t_k) \subset I$  mit  $t_k \rightarrow t$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Zu vorgegebenem  $h \in Y$  seien  $u_k \in X$  mit  $A^{(t_k)}u_k = h$ . Dann ist  $(u_k) \subset C^{2,\alpha}$  wegen (10.5.5) beschränkt. Gemäss Satz 8.6.2 konvergiert eine Teilfolge  $u_k \rightarrow u$  in  $C^2$ , und wie im Beweis von Satz 10.5.1 folgt  $u \in C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega)$  löst  $A^{(t)}u = h$ .  $\square$

**Behauptung 2.**  $I$  ist relativ offen in  $[0, 1]$ .

**Beweis.** Sei  $t_0 \in I$ , und sei  $h \in Y$  gegeben. Setze  $R := (C_1 + C_2) \|h\|_{C^\alpha}$ , mit den Konstanten  $C_1, C_2$  aus (10.5.4), bzw. (10.5.5). Für  $t \in [0, 1]$ ,  $v \in \overline{B_{2R}(0; X)}$  sei  $u = \Phi^{(t)}v \in X$  die Lösung von

$$A^{(t_0)}u = A^{(t_0)}v - A^{(t)}v + h \in C^\alpha = Y.$$

Mit (10.5.4) und (10.5.5) erhalten wir die Abschätzung

$$\|u\|_X = \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \|u\|_{H^1} \leq (C_1 + C_2) \|A^{(t_0)}u\|_{C^\alpha}.$$

Da

$$\begin{aligned} \|A^{(t_0)}v - A^{(t)}v\|_{C^\alpha} &= |t - t_0| \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\delta_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + cv \right\|_{C^\alpha} \\ &\leq C |t - t_0| \|v\|_{C^{2,\alpha}}, \end{aligned}$$

folgt

$$\|u\|_X \leq C_3 |t - t_0| \|v\|_X + (C_1 + C_2) \|h\|_{C^\alpha} \leq C_3 |t - t_0| \|v\|_X + R \leq 2R,$$

sofern  $t \in [0, 1]$  so gewählt ist, dass  $|t - t_0| < \frac{1}{2C_3} =: \delta$ .

Weiter gilt für  $v_1, v_2 \in \overline{B_{2R}(0; X)}$ ,  $|t - t_0| < \delta$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi^{(t)}(v_1) - \Phi^{(t)}(v_2)\|_X &\leq (C_1 + C_2) \|(A^{(t_0)} - A^{(t)})(v_1 - v_2)\|_{C^\alpha} \\ &\leq C_3 |t - t_0| \|v_1 - v_2\|_X \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_X; \end{aligned}$$

das heisst, für  $t \in [0, 1]$  mit  $|t - t_0| < \delta$  definiert  $\Phi^{(t)}$  eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum  $M = \overline{B_{2R}(0; X)}$ . Also existiert für derartige  $t$  genau ein Fixpunkt  $u \in \overline{B_{2R}(0; X)}$  von  $\Phi^{(t)}$ , und  $A^{(t)}u = h$ . Das heisst,  $B_\delta(t_0) \cap [0, 1] \subset I$ , und  $I$  ist relativ offen.  $\square$

Da  $I \neq \emptyset$  und da  $[0, 1]$  zusammenhängend, folgt mit den Behauptungen 1 und 2, dass  $I = [0, 1]$ , und der Satz ist bewiesen.  $\square$