Funktionalanalysis I und II
Vorlesung HS 2007 und FS 2008

Prof. Dr. Michael Struwe

26. August 2008

Worum geht es?

Grob gesagt, geht es um die Auflösung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = y$$

zu gegebenem y, wobei x und y in unendlich-dimensionalen Räumen X und Y liegen.

Beispiel 1. *Das Randwertproblem zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \textit{ in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \\ u &= 0 \textit{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

kann man auffassen als Gleichung der Form $Ax = y$ mit $X = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $A\colon H^2 \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Zusätzlich zur linearen Struktur des Problems bedarf es im ∞-dimensionalen Fall weiterer analytischer und geometrischer Strukturen, insbesondere spielen Vollständigkeit, Kompaktheit, beziehungsweise Konvexität eine Rolle.

Je nachdem ist daher der "richtige" Rahmen für die mathematische Behandlung ein normierter Vektorraum (Linearität) oder ein metrischer Raum (Vollständigkeit, Kompaktheit), vielleicht auch ein "lokal konvexer topologischer Vektorraum", in dieser Vorlesung jedoch meist ein Banachraum oder sogar ein Hilbertraum.

Wie das Beispiel zeigt, genügen für die Anwendungen die klassischen Funktionenräume allein nicht. In der Vorlesung "Funktionalanalysis II" werden die für die Behandlung partieller Differentialgleichungen fundamentalen Sobolev-Räume eingeführt und die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen entwickelt.

Die Vorlesung stützt sich auf die grosse verfügbare Lehrbuchliteratur, vor allem jedoch auf die nachfolgend aufgeführten Texte. Das hier vorliegende Skript zur Vorlesung Funktionalanalysis I im Herbstsemester 2007 ist eine erweiterte Version meines Skriptums aus dem Jahr 2002/03. Die anschliessende Vorlesung Funktionalanalysis II/Partielle Differentialgleichungen im Frühjahr 2008 stützt sich auf meine Vorlesung Funktionalanalysis II im Sommer 2003 sowie auf meine Vorlesung über Partielle Differentialgleichungen im Wintersemester 2004/05. Ich danke Frau Manuela Dübendorfer für Ihre spontane Bereitschaft, eine Mitschrift dieser Vorlesung anzufertigen und für ihre Mithilfe bei der Korrektur. Ich danke auch den Studierenden dieser Jahrgänge, insbesondere den Herren Reto Müller und Paul Ziegler, für zahlreiche Anregungen und Kommentare.

Literatur zur Funktionalanalysis I:

Alt: *Funktionalanalysis*, Springer
Bachmann - Narici: *Functional analysis*
Brezis: *Analyse fonctionnelle*
Dunford - Schwarz: *Linear operators*
Rudin:*Functional analysis*
Werner: *Funktionalanalysis*
Yosida:*Functional analysis*
E. Zehnder (Mitschrift Chr. Frei): http://christianfrei.gmxhome.de/

Literatur zur Funktionalanalysis II:

Alt: *Funktionalanalysis*, Springer
Brezis: *Analyse fonctionnelle*
Evans: *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Funktionalanalysis I

Kapitel 1

Vollständigkeit, Baire-Kategorie

1.1 Ein “nichtlineares” Problem

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, und für jedes $x\in[0,1]$ existiere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =\colon f(x).$$

Ist f dann in mindestens einem Punkt x_0 stetig? – und liegt damit, durch Iteration des Arguments in Teilintervallen der Länge $\frac{1}{n}, n\in N$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f sogar dicht in $[0,1]$?

Baire fand die geniale Lösung dieses Problems auf dem Umweg über das für die Funktionalanalysis äusserst fruchtbare Konzept der Baire Kategorie .

1.2 Metrische Räume

Sei (M,d) ein metrischer Raum; das heisst $d\colon M\times M\to\mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

i) $d(x,y)\ge 0$, “=” gdw. $x=y$ (Definitheit)

ii) $d(x,y)=d(y,x)$ (Symmetrie)

iii) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ (Dreiecks-Ungleichung)

Beispiel 1.2.1. *i) Jede Teilmenge eines normierten Raums $(X,||\cdot||)$ kann in kanonischer Weise als metrischer Raum mit Metrik*

$$d(x,y)=||x-y||$$

aufgefasst werden; zum Beispiel $[0,1]\subset\mathbb{R}$.

ii) Sei $S=\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}; x_k\in\mathbb{R}\}$ der Raum aller Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$. Durch

$$d((x_k),(y_k))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

wird eine Metrik auf S erklärt.

Wir wiederholen kurz die wichtigsten topologischen Begriffe:

i) $\Omega \subset M$ heisst **offen**, falls gilt

$$\forall x \in \Omega \exists r > 0\colon B_r(x) = \{y \in M; d(x,y) < r\} \subset \Omega$$

ii) $A \subset M$ heisst **abgeschlossen**, falls $A^c = M \setminus A$ offen ist.

Für $\Omega \subset M$ sind ferner definiert:

iii) $\overset{\circ}{\Omega} = \bigcup_{G \subset \Omega,\, G \text{ offen}} G$: der **offene Kern** von Ω,

iv) $\overline{\Omega} = \bigcap_{A \supset \Omega,\, A \text{ abgeschlossen}} A$: die **abgeschlossene Hülle** von Ω,

v) $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$: der **Rand** von Ω, welcher $\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$ disjunkt zerlegt.

vi) $\Omega \subset M$ heisst **dicht**, falls $\overline{\Omega} = M$, das heisst, falls

$$B \cap \Omega \neq \emptyset, \forall B = B_r(x) \subset M. \tag{1.2.1}$$

vii) $\Omega \subset M$ heisst **nirgends dicht**, falls $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \emptyset$, das heisst, falls

$$B \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset, \forall B = B_r(x) \subset M. \tag{1.2.2}$$

Für das folgende ist insbesondere von Bedeutung:

Satz 1.2.1. *Sei $U \subset M$. Es sind äquivalent:*

i) U ist offen und dicht;

ii) $A = U^c = M \setminus U$ ist abgeschlossen und nirgends dicht.

Beweis: *i) $\Rightarrow$ ii)*: Sei U offen und dicht, $A = U^c$. A ist abgeschlossen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \setminus \overline{A} = B \setminus A = B \cap U \neq \emptyset.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei A abgeschlossen und nirgends dicht, $U = A^c$. U ist offen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \cap U = B \setminus A = B \setminus \overline{A} \neq \emptyset.$$

□

Diese Begriffe sind natürlich bereits auf der Stufe eines topologischen Raumes erklärt. Falls (M, d) metrisch ist, so gibt es äquivalente Kriterien mit Folgen in M; zum Beispiel

Satz 1.2.2. *$A \subset M$ ist abgeschlossen, gdw. für alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A und $x \in M$ gilt:*

$$x_k \to x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Ein erst auf der Stufe metrischer Räume definierter Begriff ist der einer Cauchy-Folge und der Begriff der Vollständigkeit.

Definition 1.2.1. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine* **Cauchy-Folge** *in* M*, falls*

$$d(x_k, x_l) \to 0 \ (k, l \to \infty).$$

Definition 1.2.2. (M,d) *heisst* **vollständig** *, falls jede Cauchy-Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* M *konvergiert.*

Beispiel 1.2.2. *i)* $C^0([0,1])$ *mit der von der Supremumsnorm*

$$||f||_{C^0} = \max_{0\le t\le 1} |f(t)|$$

induzierten Metrik ist vollständig.

ii) Alle Banachräume $(L^p(\Omega), C^m(\overline{\Omega}), \ldots)$ *sind vollständig.*

iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ *mit kompakten* $K_1 \subset K_2 \subset$*. Dann ist* $C^0(\Omega)$ *mit der Metrik*

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||f-g||_{C^0(K_j)}}{1+||f-g||_{C^0(K_j)}}$$

analog zu Beispiel 1.2.1 ii) vollständig. (Die von d *induzierte Topologie auf* $C^0(\Omega)$ *heisst* **compact-open topology***.)*

1.3 Baire-Kategorie

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $M \neq \emptyset$.

Satz 1.3.1. *Falls* (M,d) *vollständig ist, so gelten die folgenden (äquivalenten) Aussagen*

i) Sei $U_j \subset M$ *offen und dicht,* $j \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ *dicht in* M*.*

ii) Falls $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^\circ \neq \emptyset$ *mit abgeschlossenen* $A_j, j \in \mathbb{N}$*, so gibt es mindestens ein* $j_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$*.*

Insbesondere gilt:

iii) Falls $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ *mit abgeschlossenen* $A_j, j \in \mathbb{N}$*, so gibt es mindestens ein* $j_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$*.*

Beispiel 1.3.1. *Die Beispiele zu Teil ii) des Satzes,*

i) $M = \mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$

und

ii) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$

mit $A_x = \{x\} = \overline{A}_x$ *und* $\overset{\circ}{A}_x = \emptyset$ *zeigen, dass die Abzählbarkeit der Mengen* A_j *und die Vollständigkeit von* M *notwendig sind.*

Beweis:

i) Aufgrund der Charakterisierung (1.2.1) dichter Mengen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung: Für $x \in M, r > 0$ gilt stets $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$.

Beweis: Seien $x \in M, r > 0, B = B_r(x)$. Konstruiere $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ induktiv, wie folgt.

a) Da U_1 dicht und offen, gilt

$$U_1 \cap B \neq \emptyset, U_1 \cap B \text{ offen.}$$

Wähle $x_1 \in U_1 \cap B, 0 < r_1 < \frac{1}{2}$ mit

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{2r_1}(x_1) \subset U_1 \cap B. \tag{1.3.1}$$

b) Seien $x_1, \ldots, x_{j-1} \in M, r_1, \ldots, r_{j-1}$ bereits bestimmt. Beachte, dass wie oben gilt

$$U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \neq \emptyset, U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \text{ offen.}$$

Wähle $x_j \in U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}), 0 < r_j < 2^{-j}$ mit

$$\overline{B_{r_j}(x_j)} \subset B_{2r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}). \tag{1.3.2}$$

Dann gilt für alle $j \geq k \in \mathbb{N}$:

$$x_j \in B_{r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset \ldots \subset B_{r_k}(x_k) \tag{1.3.3}$$

also insbesondere

$$d(x_j, x_k) \leq r_k < 2^{-k} \to 0 (j \geq k \to \infty);$$

das heisst, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig, existiert

$$x^* = \lim_{j\to\infty} x_j,$$

und nach Grenzübergang $j \to \infty$ in (1.3.3) folgt mit (1.3.2)

$$x^* \in \overline{B_{r_k}(x_k)} \subset U_k, \forall k.$$

Insbesondere erhalten wir $x^* \in U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Für $k = 1$ liefert (1.3.1) zudem $x^* \in U_1 \cap B \subset B$, also

$$x^* \in U \cap B \neq \emptyset,$$

wie gewünscht.

i) $\Rightarrow$ ii) (indirekt) Widerspruchsweise nehmen wir an

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

mit abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$. Setze

$$U_j = A_j^c = M \setminus A_j, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz (2.1.1) ist U_j offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$. Nach Annahme gilt jedoch

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = \emptyset$$

im Widerspruch zu i).

(ii) $\Rightarrow$ i): Übung.)

Definition 1.3.1. *(Baire Kategorie)*

i) $A \subset M$ heisst **mager** *oder von* **1. Baire Kategorie** *, falls $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit nirgends dichten Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$; $Kat(A) = 1$.*

ii) $A \subset M$ heisst **fett** *oder von* **2. Baire Kategorie** *, falls A nicht von 1. Baire Kategorie ist; $Kat(A) = 2$.*

iii) $\Omega \subset M$ heisst **residuell***, falls $\Omega^c = A$ mager ist.*

Beispiel 1.3.2. *i) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \subset \mathbb{R}$ ist mager.*

ii) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

iii) Abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind mager.

Frage: Gibt es überhaupt fette Mengen?

Satz 1.3.2. *(Baire) Sei (M, d) vollständig. Dann gilt:*

i) $Kat(M) = 2$

ii) $Kat(A) = 1 \Rightarrow Kat(A^c) = 2$, und A^c ist dicht in M.

iii) $\emptyset \neq U$ offen $\Rightarrow Kat(U) = 2$.

Beweis:

i) Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3.1 iii).

ii) Falls $Kat(A) = Kat(A^c) = 1$, so wäre $Kat(M) = 1$ gemäss Beispiel 1.3.1 iii), also $Kat(A^c) = 2$. Sei

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$$

mit nirgends dichten $A_j, j \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_j = (\overline{A_j})^c$ offen und dicht, und nach Satz 1.3.1 i) ist

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \right)^c \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = A^c$$

dicht.

iii) Wäre $Kat(U) = 1$, so wäre gemäss ii) die Menge $U^c = A = \overline{A}$ dicht, also $A = M, U = \emptyset$. $\square$

"Typische" Beispiele magerer, beziehungsweise fetter Mengen sind somit (für $M = \mathbb{R}$) $\mathbb{Q}$, beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beachte, dass $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$. Jedoch scheint es einen Zusammenhang mit dem Lebesgueschen Mass zu geben. Ist diese intuitive Vorstellung richtig?

Fragen: Sind Lebesgue-Nullmengen $A \subset \mathbb{R}$ (im Baireschen Sinne) "mager"? Haben magere Mengen $A \subset \mathbb{R}$ stets verschwindendes Lebesgue-Mass?

Beide Fragen sind mit "Nein" zu beantworten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3.3. *Sei $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, und für $j \in \mathbb{N}$ sei*

$$U_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]q_k - 2^{-(j+k+1)}, q_k + 2^{-(j+k+1)}[$$

mit

$$\mathcal{L}^1(U_j) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-(j+k)} = 2^{-j}.$$

Die Mengen U_j sind offen und wegen

$$\overline{U_j} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

auch dicht. Also ist $A_j = U_j^c$ nirgends dicht, $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ mager und daher $U = \bigcap_{j=1}^\infty U_j = A^c$ fett nach Satz 1.3.2, jedoch gilt $\mathcal{L}^1(U) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^1(U_j) = 0$.

1.4 Erste Anwendung

Der Satz von Baire ist grundlegend für die Theorie linearer Gleichungen in Banach-Räumen. Als erste Anwendung stellen wir hier jedoch die Lösung des nichtlinearen Problems aus Abschnitt 1 vor.

Satz 1.4.1. *(Baire) Sei (M,d) vollständig, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon M \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, und es existiere der punktweise Limes*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R}$$

für jedes $x \in M$. Dann ist

$$R = \{x; f \textit{ ist stetig an der Stelle } x\}$$

eine residuelle Menge, insbesondere also dicht in M.

Beweis: Für $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ setze

$$P_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$$

und weiter

$$R_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^\infty \overset{circ}{P}_{n,\varepsilon}.$$

Beachte: $R_\varepsilon \supset R_\delta$ für $\delta \leq \varepsilon$.

Behauptung: $U := \bigcap_{j=1}^\infty R_{1/j} = R$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f.

Beweis: "$R \subset U$". Sei f in x_0 stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $r_0 > 0, n_0 = n_0(\varepsilon), r_n > 0$ $(n \geq n_0)$ mit

$$\sup_{x\in B_{r_0}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$$

und

$$\sup_{n\geq n_0} |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

sowie

$$\sup_{x\in B_{r_n}(x_0)} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$$

Dann folgt für $n \geq n_0, r < \min\{r_0, r_n\}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B_r(x_0);$$

also $B_r(x_0) \subset P_{n,\varepsilon}, x_0 \in \mathring{P}_{n,\varepsilon} \subset R_\varepsilon$. Also $x_0 \in U$.

"$U \subset R$". Sei f in x_0 unstetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f = \sup_{B_r(x_0)} f - \inf_{B_r(x_0)} f > 3\varepsilon, \forall r > 0.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $r_n > 0$ mit

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n < \varepsilon, \forall r < r_n.$$

Schätze ab für $r < r_n$

$$\begin{aligned} 2 \sup_{B_r(x_0)} |f_n - f| &\geq \sup_{x,y \in B_r(x_0)} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \\ &\geq \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f - \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n > 2\varepsilon; \end{aligned}$$

das heisst

$$x_0 \notin \mathring{P}_{n,\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit $x_0 \notin R_\varepsilon$ für $\varepsilon < \varepsilon_0(x_0)$, daher auch $x_0 \notin U$.

Behauptung: R_ε ist offen und dicht für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis: Offenbar ist R_ε offen, $\varepsilon > 0$. Betrachte für $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$F_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Beachte, dass mit $f_{n+k}(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$ folgt $F_{n,\varepsilon} \subset P_{n,\varepsilon}$. Wegen $f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$ gilt zudem $\bigcup_{n=1}^\infty F_{n,\varepsilon} = M, \forall \varepsilon > 0$. Weiter ist

$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^\infty \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen, also $F_{n,\varepsilon} = \mathring{F}_{n,\varepsilon} \cup \partial F_{n,\varepsilon}$ und daher

$$\left(F_{n,\varepsilon} \setminus \mathring{F}_{n,\varepsilon}\right)^\circ = (\partial F_{n,\varepsilon})^\circ = \emptyset.$$

Setze $A_{n,\varepsilon} = \partial F_{n,\varepsilon}$. Dann ist $A_{n,\varepsilon}$ abgeschlossen und nirgends dicht und liefert die magere Menge

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^\infty A_{n,\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^\infty (F_{n,\varepsilon} \setminus \mathring{F}_{n,\varepsilon}) \supset \bigcup_{n=1}^\infty F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{F}_{n,\varepsilon} \supset M \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{P}_{n,\varepsilon} = M \setminus R_\varepsilon.$$

Satz 1.3.2 liefert die Behauptung. □

Setze nun

$$U_j = R_{1/j}, A_j = R_{1/j}^c.$$

Dann ist $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ mager, also

$$R = U = \bigcap_{j=1}^\infty U_j = A^c$$

residuell, insbesondere dicht nach Satz 1.3.2 ii). □

Umgekehrt kann man fragen

i) wann sich eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise durch stetige Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ approximieren lässt.

Beispiel: $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nirgends stetig, also nicht punktweise durch stetige f_n approximierbar

ii) ob/unter welchen Bedingungen eine Funktion $f \in L^1([0,1])$ einen Vertreter $\tilde{f}$ mit obiger Eigenschaft besitzt. Kandidaten für (f_n) wären in diesem Falle

a) die Mittel (der durch $f \equiv 0$ ausserhalb forgesetzten Funktion f), mit

$$f_n(x) = n\int_{x-\frac{1}{2n}}^{x+\frac{1}{2n}} f(y)\,dy \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

für fast alle $x \in [0,1]$ und insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt, oder

b) die **Fourier-Reihe** der periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion f. *OBdA* sei die Periode auf 2π gestreckt. Setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, k \in \mathbb{Z},$$

und

$$f_n(x) = \sum_{|k|\le n} a_k e^{ikx}.$$

Vergleiche dazu das Konvergenzkriterium von Dini:

Satz 1.4.2. *(Dini) Falls für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| dt < \infty,$$

so gilt für die obige Fourier-Reihe

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

Eine weitere Anwendung liefert

Satz 1.4.3. *(Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit)*
Sei (M,d) vollständig, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, und sei $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **punktweise beschränkt** *in dem Sinne, dass*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda(x)| < \infty, \forall x \in M.$$

Dann gibt es eine offene Kugel $B \subset M$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, x\in B}|f_\lambda(x)| < \infty;$$

das heisst, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist **gleichmässig beschränkt auf** *B.*

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ definiere die abgeschlossene Menge

$$A_k = \{x \in M; |f_\lambda(x)| \leq k, \forall \lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{\{x; |f_\lambda(x)| \leq k\}}_{\text{abgeschlossen, da } f_\lambda \text{ stetig}}$$

mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = M$. Da M vollständig, gibt es gemäss Satz 1.3.1 iii) ein k_0 mit $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$. Wähle $B \subset A_{k_0}$. □

Falls die Funktionen f_λ lineare Abbildungen auf einem Vektorraum sind, erhält man aus Satz 1.4.3 ein Kriterium für die gleichmässige Beschränktheit der f_λ auf einer Kugel um 0, das heisst für die gleichmässige Stetigkeit der f_λ. Es liegt daher nahe, nun auch die lineare Struktur einzubeziehen.

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

2.1 Normierte Räume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $||\cdot||\colon X \to \mathbb{R}$ eine Norm auf X; das heisst,
i) $||x|| \geq 0$, "=" gdw. $x = 0$ (Definitheit),
ii) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (positive Homogenität),
iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung).
Mit der von $||\cdot||$ induzierten Metrik

$$d(x, y) = ||x - y||$$

ist X dann auch ein metrischer Raum.

Definition 2.1.1. *$(X, ||\cdot||)$ heisst ein* **Banach Raum** *, falls X bezüglich d vollständig ist.*

Bemerkung 2.1.1. *i) Die Norm ist (Lipschitz-)stetig auf X, da*

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||, \forall x, y \in X.$$

ii) Die Vektorraumoperationen sind ebenfalls stetig (Übung).

Beispiel 2.1.1. *i) Sei M eine Menge, $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Raum. Dann ist*

$$B(M, X) = \{f\colon M \to X; \sup_{t \in M} ||f(t)||_X < \infty\}$$

ein Vektorraum mit der Norm

$$||f||_{B(M,X)} = \sup_{t \in M} ||f(t)||_X.$$

ii) $B(M, X)$ ist vollständig, wenn X vollständig ist.

Beweis:

i) Mit den punktweise definierten Vektorraum-Verknüpfungen

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda f)(t) = \lambda f(t), t \in M$$

wird $B(M, X)$ zu einem Vektorraum. Dabei benutzen wir auch die Dreiecks-Ungleichung und die Homogenität der Norm. Die Eigenschaften i) und ii) einer Norm sind trivialerweise erfüllt; bezüglich iii) beachte

$$\begin{aligned}||f+g||_{B(M,X)} &= \sup_{t \in M} ||f(t) + g(t)||_X \leq \sup_{t \in M} (||f(t)||_X + ||g(t)||_X) \\ &\leq ||f||_{B(M,X)} + ||g||_{B(M,X)}.\end{aligned}$$

ii) Falls X vollständig ist, so sind Cauchy-Folgen (f_k) in $B(M, X)$ punktweise konvergent, denn für jedes $t \in M$ ist wegen

$$||f_j(t) - f_k(t)||_X \leq ||f_j - f_k||_{B(M,X)} \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

auch die Folge $(f_k(t))$ eine Cauchy-Folge. □

Als Anwendung von Beispiel 2.1.1 zeigen wir, dass sich jeder metrische Raum (M, d) "isometrisch" in einen vollständigen metrischen Raum (M^*, d^*) einbetten lässt.

Seien $(M, d), (M^*, d^*)$ metrische Räume, $\Phi \colon M \to M^*$.

Definition 2.1.2. Φ *heisst* **Isometrie** *, falls gilt*

$$d^*(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Satz 2.1.1. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (M^*, d^*) und eine Isometrie $\Phi \colon M \to M^*$.*

Bemerkung 2.1.2. *i) Wir bezeichnen in diesem Falle den Raum $\tilde{M} := \overline{\Phi(M)}$ als* **Vervollständigung** *von M, (versehen mit der Metrik $\tilde{d} = d^*|_{\tilde{M} \times \tilde{M}}$).*

ii) Man kann zeigen, dass die Vervollständigung bis auf Isometrien eindeutig ist.

Beweis von Satz 2.1.1: Wähle $M^* = B(M, \mathbb{R})$ mit der von $|| \cdot ||_{B(M,\mathbb{R})}$ induzierten Metrik d^*. Nach Beispiel 2.1.1 ist (M^*, d^*) vollständig.

Fixiere ein $x^* \in M$. Definiere nun $\Phi \colon M \to B(M, X)$ durch

$$\Phi \colon x \mapsto f_x(z) = d(x, z) - d(x^*, z).$$

Beachte

$$|f_x(z)| = |d(x, z) - d(x^*, z)| \leq d(x, x^*), \forall z \in M;$$

also $f_x \in B(M, X)$. Analog folgt

$$\begin{aligned}||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} &= \sup_{z \in M} |f_x(z) - f_y(z)| \\ &= \sup_{z \in M} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)\end{aligned}$$

und

$$||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} \geq |f_x(x) - f_y(x)| = d(x, y).$$

Also ist Φ eine Isometrie. □

Seien $|| \cdot ||_1, || \cdot ||_2$ Normen auf X.

Definition 2.1.3. $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ *heissen* **äquivalent***, falls mit einer Konstanten* $C > 0$ *gilt*

$$C^{-1}||x||_1 \le ||x||_2 \le C||x||_1, \forall x \in X. \tag{2.1.1}$$

Beispiel 2.1.2. *i) Auf* $\mathbb{R}^n$ *(oder* $\mathbb{C}^n$*) ist jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm; also sind je zwei Normen auch zueinander äquivalent.*

Beweis: *Die Einheitssphäre in* $\mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1}\}$$

ist kompakt, jede Norm $||\cdot||_1$ *bezüglich der euklidischen Norm stetig, da für* $x = x_0 + \xi, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *gilt*

$$\begin{aligned} |||x||_1 - ||x_0||_1| \le ||x_1 - x_0||_1 = ||\sum_{i=1}^n \xi_i e_i||_1 \\ \le \sum_{i=1}^n ||\xi_i e_i||_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|||e_i||_1 \le C\sum_{i=1}^n |\xi_i| \le C||\xi||. \end{aligned}$$

Also existieren

$$\max_{x\in S^{n-1}} ||x||_1 = C_1, \min_{x\in S^{n-1}} ||x||_1 = C_2^{-1} > 0.$$

Mit $C = \max\{C_1, C_2\}$ *folgt* (2.1.1). □

ii) Die Normen auf $C^0([0,1])$,

$$||f||_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, ||f||_2 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

sind nicht äquivalent, da für $(f_n)_{n\in N}$ *mit*

$$f_n(t) = t^n, 0 \le t \le 1$$

gilt

$$||f_n||_1 = 1, ||f_n||_2 = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Hingegen lässt sich das Ergebnis aus Beispiel 2.1.2 i) auf jeden endlich-dimensionalen Raum übertragen.

Satz 2.1.2. *Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum* X *sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis: Wir führen die Aussage auf den Fall $X = \mathbb{R}^n$, beziehungsweise $X = \mathbb{C}^n$ zurück. *OBdA* sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wähle eine Basis $e_1, \dots, e_n$ für X. Dann ist die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \to X, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$$

linear und injektiv, mit der Rangformel also auch surjektiv. Seien $||\cdot||_1^X, ||\cdot||_2^X$ Normen auf X. Definiere

$$||x||_1 = ||\Phi(x)||_1^X, x \in \mathbb{R}^n$$

und analog $||x||_2$. Die Eigenschaften i), ii) einer Norm folgen aus der Definitheit und Homogenität von $||\cdot||_i^X$, da Φ linear ist und injektiv. Mit der Linearität von Φ folgt ebenso für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Dreiecksungleichung

$$||x+y||_1 = ||\Phi(x)+\Phi(y)||_1^X \le ||\Phi(x)||_1^X + ||\Phi(y)||_1^X = ||x||_1 + ||y||_1$$

aus derjenigen für $||\cdot||_1^X$. Nach Beispiel 2.1.2 i) gibt es $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} C^{-1}||x||_1 = C^{-1}||\Phi(x)||_1^X &\le ||x||_2 = ||\Phi(x)||_2^X \\ &\le C||x||_1 = C||\Phi(x)||_1^X, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Da Φ surjektiv, folgt die Behauptung. □

Satz 2.1.3. *Endlich-dimensionale Teilräume eines normierten Raumes sind vollständig, insbesondere abgeschlossen.*

Beweis: Sei $Y \subset X$ endlich-dimensional, U Vektorraum des normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$, $\dim_{\mathbb{R}}(Y) = n$. Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to Y$ wie im Beweis von Satz 2.1.2, $||x||_1 = ||\Phi(x)||$ die von der Einschränkung von $||\cdot||$ auf Y induzierte Norm in $\mathbb{R}^n$.

Cauchy-Folgen $(y_k) \subset Y$ werden unter Φ^{-1} abgebildet auf Cauchy-Folgen (x_k) im $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$. Wegen Beispiel 2.1.2 i) sind dies auch Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert

$$\lim_{k\to\infty} x_k =: x$$

und $y_k \to y := \Phi(x)$ $(k \to \infty)$. Somit ist Y vollständig.

Abgeschlossenheit erhält man mit dem Folgenkriterium gemäss Satz 1.2.2. □

Für ∞-dimensionale Unterräume ist das Ergebnis der Satz 2.1.3 im allgemeinen nicht richtig.

Beispiel 2.1.3. *Betrachte $C^0([0,2])$ als Unterraum von $(L^1([0,2]), ||\cdot||_{L^1})$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,2])$ mit*

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in $L^1([0,2])$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1; \end{cases}$$

jedoch gilt $f \notin C^0([0,2])$.

Abstrakt kann man auch wie folgt argumentieren: $C^0([0,1])$ ist ein strikt in $L^1([0,1])$ enthaltener Teilraum,jedoch gilt $L^1([0,1]) = \overline{C^0([0,1])}$.

Wir wiederholen den Begriff der Kompaktheit in metrischen Räumen (M, d).

Definition 2.1.4. *$K \subset M$ heisst (folgen-)* **kompakt***, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ gilt das einfache Kriterium: $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Vergleichbare Kompaktheitskriterien in $C^0(\overline{\Omega})$ oder $L^p(\Omega)$ werden wir später kennenlernen.

In metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit ferner äquivalent zur Überdeckungskompaktheit.

Definition 2.1.5. *$K \subset M$ heisst* **überdeckungskompakt***, falls jede offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Letztere “Heine-Borel-Eigenschaft” benutzt man zur Definition von Kompaktheit in topologischen Räumen.

Schliesslich kann man endlich-dimensionale Vektorräume auch wie folgt charakterisieren.

Satz 2.1.4. *Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\dim(X) < \infty$.

ii) Die Einheitssphäre in X,

$$S = \{x \in X; ||x|| = 1\}$$

ist kompakt.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n, \Phi\colon \mathbb{R}^n \to X$ der Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 2.1.2, $||\cdot||_1$ die durch Φ induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\Phi^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_1 = 1\} =: S_1.$$

Wegen Beispiel 2.1.2 i) ist $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Φ ist stetig. Damit ist auch $\Phi(S_1) = S$ kompakt.

ii) $\Rightarrow$ i) (indirekt) Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = \infty$. Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in S, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Falls die Norm auf X von einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert wird, das heisst falls

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}, \forall x \in X,$$

so erhält man eine geeignete Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, indem man aus einer Folge linear unabhängiger Vektoren y_k mit dem Gram-Schmidtschen [1] Verfahren eine Folge orthonormaler Vektoren erzeugt mit

$$||x_k|| = 1, (x_i, x_k) = 0 \ (i \neq k),$$

[1] siehe zum Beispiel Werner, S. 202

also auch

$$||x_i - x_k||^2 = ||x_i||^2 + ||x_k||^2 - 2(x_i, x_k) = 2 \ (i \neq k).$$

Somit kann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben.

In einem allgemeinen normierten Raum erhält man analog eine geeignete Folge durch Anwendung des folgenden

Lemma 2.1.1. *(Franz Riesz): Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in]0,1[$ ein $x \in X$ mit*

i) $||x|| = 1$,

ii) $d(X,Y) = \inf_{y\in Y} ||x - y|| > 1 - \varepsilon$.

Beweis: Wähle $x^* \in X \setminus Y$. Da $Y = \overline{Y}$, gilt

$$d\colon = d(x^*, Y) = \inf_{y\in Y} ||x^* - y|| > 0.$$

Wähle $y^* \in Y$ mit

$$d \leq ||x^* - y^*|| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Setze

$$x = \frac{x^* - y^*}{||x^* - y^*||}$$

mit $||x|| = 1$ und

$$d(x, Y) = \inf_{y\in Y} ||\frac{x^* - y}{||x^* - y^*||}|| = \frac{d}{||x^* - y^*||} > 1 - \varepsilon.$$

□

Beweis von Satz 2.1.4 ii) $\Rightarrow$ i) (vollendet) Seien $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig. $Y_k = \operatorname{span}\{y_l; l \leq k\}, k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.1.3 ist Y_k für jedes k abgeschlossen. Wähle $x_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$ und für $k \geq 2$ wähle $x_k \in Y_k \setminus Y_{k-1}$ mit

$$||x_k|| = 1, d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}$$

gemäss Lemma 2.1.1. Dann gilt für $k > l$ stets

$$||x_k - x_l|| \geq d(x_k, Y_l) \geq d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}.$$

Also ist S nicht kompakt. □

2.2 Stetige lineare Abbildungen

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Vektorräume, $A\colon X \to Y$ linear.

Satz 2.2.1. *Es sind äquivalent:*

i) A ist stetig in $0 \in X$*;*

ii) A ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$*;*

iii) A ist gleichmässig stetig auf X*;*

iv) A ist Lipschitz stetig;

v) $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y < \infty$.

Beweis: v) $\Rightarrow$ iv) Mit der Linearität von A folgt für $x_1 \neq x_2 \in X$

$$\begin{aligned} ||Ax_1 - Ax_2||_Y = ||A(x_1 - x_2)||_Y &= ||x_1 - x_2||_X \, ||A\frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||_X}||_Y \\ &\le \sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y ||x_1 - x_2||_X. \end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) ist klar.

i) $\Rightarrow$ v) (indirekt) Sei $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y = \infty$. Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$||x_n||_X \le 1, 0 < ||Ax_n||_Y \to \infty \ (n \to \infty).$$

Dann gilt

$$z_n = \frac{x_n}{||Ax_n||_Y} \to 0 \text{ in } X \ (n \to \infty);$$

jedoch folgt mit der Linearität von A

$$||Az_n||_Y = 1, n \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur angenommenen Stetigkeit in $0 \in X$. □

Zusammen mit Satz 2.1.2 folgt:

Satz 2.2.2. *Sei X endlich-dimensional,* $A \colon X \to Y$ *linear. Dann ist A (Lipschitz) stetig.*

Beweis: $||x||_* := ||x||_X + ||Ax||_Y$ definiert eine Norm, die von A induzierte "Graphennorm" auf X. Nach Satz 2.1.2 gibt es $C > 0$ mit

$$||Ax||_Y \le ||x||_* \le C||x||_X, \forall x \in X.$$

□

Satz 2.2.2 gilt nicht mehr, falls X unendlich-dimensional ist.

Beispiel 2.2.1. *Sei* $X = Y = C^0([0,1]), ||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}, ||\cdot||_Y = ||\cdot||_{C^0}, A = id$*. Analog zu Beispiel 2.1.2 ii) gilt*

$$\sup_{||f||_{L^1} \le 1} ||f||_{C^0} = \infty;$$

also ist A nicht stetig.

Setze

$$L(X,Y) = \{A \colon X \overset{\text{linear}}{\to} Y; A \text{ stetig } \}.$$

$L(X,Y)$ ist ein Vektorraum mit Norm

$$||A||_{L(X,Y)} = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X}.$$

Falls $X = Y$ (mit derselben Norm), so setze

$$L(X,X) = L(X).$$

Satz 2.2.3. *i) Seien X, Y, Z normierte Vektorräume, $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$. Dann gilt $BA \in L(X,Z)$, und*

$$||BA||_{L(X,Z)} \leq ||A||_{L(X,Y)} ||B||_{L(Y,Z)}.$$

ii) Die obige Abbildung $A, B \mapsto BA$ ist stetig.

Beweis:

i) Schätze ab

$$\begin{aligned} ||(BA)x||_Z = ||B(Ax)||_Z &\leq ||B||_{L(Y,Z)} ||Ax||_Y \\ &\leq ||B||_{L(Y,Z)} ||A||_{L(X,Y)} ||x||_X. \end{aligned}$$

ii) Stetigkeit der Verkettung folgt aus

$$BA - B_0A_0 = (B - B_0)A + B_0(A - A_0)$$

mit i). □

Falls $X = Y$, so können wir $L(X)$ wegen Satz 2.2.3 als Algebra auffassen. Insbesondere sind die Potenzen $A^k = \underbrace{A \ldots A}_{k-\text{mal}}$ eines $A \in L(X)$ definiert.

Für die Existenz von **Potenzreihen** benötigen wir die Vollständigkeit.

Satz 2.2.4. *Ist Y in Banach-Raum, so ist auch $L(X,Y)$ ein Banach-Raum.*

Beweis: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, das heisst

$$\sup_{||x||_X \leq 1} ||A_n x - A_l x||_Y \to 0 \; (n, l \to \infty).$$

Dann ist $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge für jedes $x \in X$ mit $||x||_X \leq 1$, wegen der Linearität also auch für beliebiges $x \in X$. Falls Y vollständig ist, existiert der punktweise Limes

$$Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x, x \in X.$$

A ist linear wegen der Linearität von A_n und Stetigkeit der Vektorraum-Operationen, und aus

$$||Ax||_Y = ||\lim_{n \to \infty} (A_n x)||_Y = \lim_{n \to \infty} ||A_n x||_Y \leq \limsup_{n \to \infty} ||A_n||_{L(X,Y)} ||x||_X$$

folgt die Stetigkeit von A.

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}||Ax - A_n x||_Y &= ||\lim_{l\to\infty}(A_l x - A_n x)||_Y \\ &= \lim_{l\to\infty}||(A_l - A_n)(x)||_Y \le \limsup_{l\to\infty}||A_l - A_n||_{L(X,Y)}||x||_X\end{aligned}$$

und daher nach Übergang zum Supremum bezüglich $||x||_X \le 1$

$$||A - A_n||_{L(X,Y)} \le \limsup_{l\to\infty}||A_l - A_n||_{L(X,Y)} \to 0\ (n \to \infty).$$

□

Satz 2.2.5. *Sei Y ein Banach-Raum, $A_j \in L(X,Y), j \in \mathbb{N}$, und es gelte*

$$\sum_{j=1}^{\infty}||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} A_j \in L(X,Y)$.

Beweis: Sei $S_n = \sum_{j=1}^{n} A_j, n \in \mathbb{N}$. Da

$$||S_n - S_l||_{L(X,Y)} \le \sum_{j=l+1}^{n}||A_j||_{L(X,Y)} \to 0 (n \ge l \to \infty),$$

ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, nach Satz 2.2.4 also konvergent. □

Beispiel 2.2.2. *i) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert die Reihe* $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \in L(X)$.

Beweis: *Mit $||A^k||_{L(X)} \le ||A||^k_{L(X)}, \forall k \in \mathbb{N}_0$, folgt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}||\frac{A^k}{k!}||_{L(X)} \le \exp(||A||_{L(X)}) < \infty.$$

□

ii) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X), ||A||_{L(X)} < 1$. Dann existiert die **Neumann-Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \in L(X)$, *und es gilt (mit $1 = A^0 = id$)*

$$(1-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}A^k(1-A) = 1; \tag{2.2.1}$$

das heisst, die Abbildung $1 - A$ ist invertierbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k = (1-A)^{-1}.$$

Beweis: *Konvergenz der Reihe $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k, n \in \mathbb{N}$, folgt analog zu i) mit dem Konvergenzkriterium für die geometrische Reihe. Die Identität* (2.2.1) *folgt aus*

$$(1-A)S_n = S_n(1-A) = S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 + (S_n - S_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

Satz 2.2.6. *Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert*

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq ||A||_{L(X)}.$$

r_A heisst **Spektralradius** *von A.*

Beispiel 2.2.3. *Sei $A \in L(X)$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $0 \neq x_\lambda \in X$. Mit*

$$A^n x_\lambda = \lambda A^{n-1} x_\lambda = \cdots = \lambda^n x_\lambda$$

folgt dann $||A^n||_{L(X)} \geq |\lambda|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $r_A \geq |\lambda|$.

Beweis von Satz 2.2.6: Beachte

$$||A^n||_{L(X)}^{1/n} \leq ||A||_{L(X)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{n>1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ schreibe $n = kl + m, m < k$. Es folgt

$$\begin{aligned}
||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} &\leq ||A^{kl}||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} ||A^m||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \\
&\leq ||A^k||_{L(X)}^{\frac{l}{n}} ||A||_{L(X)}^{\frac{m}{n}} \\
&\to ||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{j\in\mathbb{N}} ||A^j||_{L(X)}^{\frac{1}{j}} + \varepsilon \ (n \to \infty),
\end{aligned}$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{n\geq 1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}}.$$

□

Als Folgerung notieren wir abschliessend:

Satz 2.2.7. *Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$ mit $r_A < 1$. Dann konvergiert die Neumann-Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} A^j \in L(X)$, und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (1 - A)^{-1} \in L(X).$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 2.2.5 mit dem Wurzelkriterium. □

Setze

$$Gl(X) = \{A \in L(X); A \text{ invertierbar und } A^{-1} \in L(X)\}.$$

Bemerkung 2.2.1. *In Abschnitt 3.2 werden wir sehen, dass für bijektive Abbildungen $A \in L(X)$ eines Banachraums X die Inverse automatisch stetig ist.*

Aus Satz 2.2.7 folgt nun

Satz 2.2.8. *Sei X ein Banach-Raum. Dann ist $Gl(X)$ offen in $L(X)$.*

Beweis: Sei $A_0 \in Gl(X), A \in L(X)$ mit

$$||A - A_0||_{L(X)} < ||A_0^{-1}||_{L(X)}^{-1}.$$

Wir zeigen $A \in Gl(X)$. Schreibe dazu

$$A = A_0 + (A - A_0) = A_0(1 + A_0^{-1}(A - A_0)).$$

Satz 2.2.3 liefert die Abschätzung

$$||A_0^{-1}(A - A_0)||_{L(X)} \leq ||A_0^{-1}||_{L(X)}||A - A_0||_{L(X)} < 1.$$

Mit Satz 2.2.7 folgt

$$(1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1} \in L(X),$$

und mit Satz 2.2.3 folgt die Behauptung. □

2.3 Quotientenraum

Sei X ein Vektorraum, $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Definiere die Äquivalenzrelation

$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$

mit Äquivalenzklassen

$$[x] = x + Y.$$

Beachte $[\alpha x] = \alpha[x], [x + y] = [x] + [y]$; das heisst

$$X/Y := \{[x]; x \in X\}$$

ist ein Vektorraum. Es sei π die kanonische Quotientenabbildung

$$\pi \colon X \ni x \mapsto [x] \in Y.$$

Satz 2.3.1. *Sei $|| \cdot ||_X$ Norm auf X, $Y \subset X$ abgeschlossen, $Y \neq X$. Dann ist*

$$||[x]||_{X/Y} := \inf_{y \in Y} ||x - y||_X$$

eine Norm auf X/Y, und π ist stetig mit

$$||\pi||_{L(X, X/Y)} = 1.$$

Falls $(X, || \cdot ||_X)$ vollständig ist, so auch $(X/Y, || \cdot ||_{X/Y})$.

Bemerkung 2.3.1. *Auf die Abgeschlossenheit von Y kann man nicht verzichten. Falls $Y \subset X$ ein dichter Unterraum ist, so gilt stets* $\inf_{y \in Y} ||x - y||_X = 0$.

Beweis von Satz 2.3.1:

i) Zum Beweis der Definitheit sei $||[x]||_{X/Y} = 0$ für ein $x \in X$. Dann gibt es eine Folge $(y_k) \subset Y$, so dass $||x - y_k||_X \to 0$ für $k \to \infty$. Mit der Abgeschlossenheit von Y folgt $x = \lim_{k \to \infty} y_k \in Y$, also $[x] = 0$.

Die Homogenität der Norm $|| \cdot ||_{X/Y}$ ist offensichtlich.

Schliesslich zeigen wir die Dreiecks-Ungleichung. Zu $x_1, x_2 \in X, \varepsilon > 0$ wähle $y_1, y_2 \in Y$ mit

$$||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \leq ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} ||[x_1] + [x_2]||_{X/Y} &= ||[x_1 + x_2]||_{X/Y} \leq ||(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)||_X \\ &\leq ||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \leq ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

ii) Mit $||\pi(x)||_{X/Y} = ||[x]||_{X/Y} \leq ||x||_X$ folgt sofort $||\pi||_{L(X,X/Y)} \leq 1$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $x = x_\varepsilon \in X \setminus Y$ gemäss dem Lemma 2.1.1 von Riesz mit

$$||x||_X = 1, \operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon.$$

Beachte die Beziehung

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||_X = ||[x]||_{X/Y}.$$

Es folgt

$$||\pi||_{L(X,X/Y)} \geq \frac{||[x]||_{X/Y}}{||x||_X} > 1 - \varepsilon.$$

iii) Einen eleganten Beweis der Vollständigkeit des Raumes X/Y im Falle eines Banachraums X findet man im Buch von Rudin, S. 29. □

2.4 Hilberträume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $(\cdot, \cdot) \colon X \times X \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 2.4.1. $(\cdot, \cdot)$ *heisst* **Skalarprodukt** *auf* X*, falls gilt*

i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$*,* $\forall x, y \in X$*,*

ii) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha x(x, z) + \beta(y, z)$*,* $\forall x, y, z \in X$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*,*

iii) $(x, x) \geq 0$*,* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*.*

Bemerkung 2.4.1. *In diesem Fall definiert*

$$||x|| := \sqrt{(x, x)},\ x \in X,$$

die **kanonische Norm** *in* X*.*

Beweis: Die Definitheit und die positive Homogenität sind klar. Die Dreiecks-Ungleichung folgt mit der nachstehenden Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 2.4.1, aus der Rechnung

$$||x+y||^2 = (x, x) + 2Re(x, y) + (y, y) \leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

□

Lemma 2.4.1. *(Cauchy-Schwarz) Es gilt*

$$|(x,y)| \le ||x||\,||y||, \ \forall x,y \in X.$$

Beweis: OBdA gelte $||x|| = ||y|| = 1$. Setze $t = \overline{(x,y)}$ und beachte, dass damit $(x, y - tx) = 0$. Mit

$$1 = ||y||^2 = ||tx + (y - tx)||^2 = t^2||x||^2 + ||y - tx||^2 \ge t^2 = |(x,y)|^2$$

folgt die Behauptung. □

Definition 2.4.2. *Der Raum $(X, (\cdot,\cdot))$ heisst* **Hilbertraum** *falls X bzgl. $||\cdot||$ vollständig ist.*

Beispiel 2.4.1. *i) $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ sind Hilberträume mit dem üblichen Skalarprodukt.*
ii) Der Raum $L^2([0,1];\mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\, dt \ .$$

Zu $Y \subset X$ sei

$$Y^\perp = \{z \in X; (z,y) = 0, \forall y \in Y\}.$$

Lemma 2.4.2. *$Y^\perp$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum.*

Beweis: Linearität von $Y^\perp$ folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarprodukts. Falls weiter $(z_k) \subset Y^\perp$ mit $z_k \to z$ $(k \to \infty)$, so gilt

$$(z,y) = \lim_{k\to\infty} (z_k, y) = 0, \forall y \in Y.$$

Also ist $Y^\perp$ abgeschlossen nach Satz 1.2.2. □

Bemerkung 2.4.2. *i) Falls $\overline{Y} = X$, so gilt $Y^\perp = \emptyset$.*
ii) Offenbar gilt

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1^\perp \supset Y_2^\perp.$$

Beweis: i) Sei $z \in Y^\perp$. Falls $\overline{Y} = X$, so gibt es $(y_k) \subset Y$ mit $y_k \to z$ $(k \to \infty)$, also

$$||z||^2 = (z,z) = \lim_{k\to\infty} (z, y_k) = 0.$$

□

Lemma 2.4.3. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ genau ein $y_0 \in Y$ mit*

$$(x_0 - y_0, y) = 0, \forall y \in Y,$$

und

$$||x_0 - y_0|| = \mathrm{dist}(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} ||x_0 - y||.$$

(Der Punkt y_0 ist der "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf Y.)

Beweis: Zu vorgegebenem $x_0 \in X$ wähle $y_k \in Y$ mit

$$||x_0 - y_k|| \to dist(x_0, Y) =: d \ (k \to \infty).$$

Behauptung 1: (y_k) ist Cauchy-Folge.

Beweis: Benutze die Parallelogramm-Identität

$$||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

mit $a = x_0 - y_k$, $b = x_0 - y_l$. Es folgt

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2 \lim_{k,l\to\infty} (||x_0 - y_k||^2 + ||x_0 - y_l||^2) \\ &= \lim_{k,l\to\infty} (4||x_0 - \frac{y_k + y_l}{2}||^2 + ||y_k - y_l||^2) \\ &\geq 4d^2 + \limsup_{k,l\to\infty} ||y_k - y_l||^2. \end{aligned}$$

□

Da X vollständig, existiert $y_0 = \lim_{k\to\infty} y_k \in Y$, und $||x_0 - y_0|| = d$.

Behauptung 2: Für $y_0 \in Y$ gilt: $||x_0 - y_0|| = d \Leftrightarrow (x_0 - y_0) \perp Y$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Mit

$$||x_0 - y_0||^2 = d^2 \leq ||x_0 - y_0 + ty||^2, \forall y \in Y,\ t \in \mathbb{R}$$

folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ||x_0 - y_0 + ty||^2 = 2Re(x_0 - y_0, y), \forall y \in Y.$$

"$\Leftarrow$": Da für jedes $0 \neq y \in Y$ die Funktion $t \mapsto f(t) := ||x_0 - y_0 + ty||^2$ ein quadratisches Polynom in t definiert mit $f'' > 0$ gilt auch die Umkehrung. □

Seien $y_0, y_1 \in Y$ mit $(x_0 - y_0) \perp Y$, $(x_0 - y_1) \perp Y$, nach Behauptung 2 also $||x_0 - y_0|| = d = ||x_0 - y_1||$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d^2 = ||x_0 - y_1||^2 &= ||x_0 - y_0 - (y_1 - y_0)||^2 \\ &= ||x_0 - y_0||^2 + ||y_1 - y_0||^2 = d^2 + ||y_1 - y_0||^2, \end{aligned}$$

also $y_1 = y_0$. □

Korollar 2.4.1. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$, und sei $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $x_0 = y_0 + z$ mit $y_0 \in Y$, $z \in Y^\perp$ und*

$$||z|| = \mathrm{dist}(x_0, Y).$$

Mit Lemma 2.4.3 erhalten wir sofort auch den folgenden Satz.

Satz 2.4.1. *Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gilt*

$$X = Y \oplus Y^\perp$$

und jedes $x \in X$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$x = x^{||} + x^\perp,\ \textit{wobei}\ x^{||} \in Y,\ x^\perp \in Y^\perp,$$

mit

$$||x||^2 = ||x^{||}||^2 + ||x^{\perp}||^2.$$

Insbesondere ist die Orthogonalprojektion $\pi_Y : X \to Y$ *mit* $\pi_Y(x) = x^{||}$ *stetig, und* Y *ist isometrisch zu* $X/Y^{\perp}$.

Bemerkung 2.4.3. *Sei* $(X, (\cdot,\cdot))$ *ein Hilbertraum. Dann hat gemäss Satz 2.4.1 jeder abgeschlossene lineare Unterraum* $Y \subset X$ *das topologische Komplement* $Y^{\perp}$.

Zu $Y \subset X$ setze weiter

$$Y^{\perp\perp} = (Y^{\perp})^{\perp} \supset Y.$$

Lemma 2.4.4. *Sei* $(X, (\cdot,\cdot))$ *ein Hilbertraum. Dann gilt* $Y^{\perp\perp} = \overline{span\ Y}$. *Insbesondere ist* $Y^{\perp\perp} = Y$ *für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum* $Y \subset X$.

Beweis: Setze $W := \overline{span\ Y}$. Nach Bemerkung 2.4.2 gilt $W^{\perp} \subset Y^{\perp}$, mit Lemma 2.4.2 also auch

$$W^{\perp\perp} \supset Y^{\perp\perp} \supset \overline{span\ Y} = W.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $W^{\perp\perp} \subset W$. Andernfalls gibt es $y \in W^{\perp\perp} \setminus W$, und nach Lemma 2.4.3) dürfen wir oBdA annehmen, dass $y \perp W$. Das heisst, $y \in W^{\perp} \cap W^{\perp\perp}$; also $(y, y) = 0$ im Widerspruch zur Wahl von y. □

2.5 Produkte

Analog zu $\mathbb{R}^n$ kann man für Vektorräume $(X_i, ||\cdot||_i), 1 \le i \le n$, den Produktraum $X = \prod_{i=1}^n X_i$ definieren mit Elementen

$$x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in X_i \ (1 \le i \le n).$$

Wie in $\mathbb{R}^n$ kann man aus den Normen $||\cdot||_i$ der X_i verschiedene Normen für X ableiten, zum Beispiel, für $1 \le p < \infty$, die Norm

$$||x||_{p,X} := \left(\sum_{i=1}^n ||x_i||_i^p \right)^{1/p},$$

oder die Norm

$$||x||_{\infty,X} := \max_i ||x_i||_i.$$

Diese sind wegen Beispiel 2.1.2 alle äquivalent, und die Projektionen

$$\pi_i : X \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \in X_i$$

sind stetig, $1 \le i \le n$. X ist vollständig, falls alle X_i dies sind.

Kapitel 3

Prinzipien der Funktionalanalysis

3.1 Gleichmässige Beschränktheit

Wie angekündigt, liefert der Satz 1.4.3 von Baire im Kontext linearer Abbildungen auch Information “im Grossen”. Seien X, Y normierte Räume.

Satz 3.1.1. *(Banach-Steinhaus): Sei X vollständig, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $L(X,Y)$ punktweise beschränkt, das heisst*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda x||_Y < \infty, \forall x \in X.$$

Dann folgt

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} < \infty;$$

das heisst $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist gleichmässig beschränkt.

Beweis: Für $\lambda \in \Lambda$ definiere die stetige Abbildung $f_\lambda \colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\lambda(x) = ||A_\lambda x||_Y, x \in X.$$

Nach Annahme ist $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt.
Da X vollständig ist, existiert nach Satz 1.4.3 eine Kugel $B = B_r(x_0) \subset X$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B} |f_\lambda(z)| < \infty.$$

Es folgt für $||x||_X < 1$:

$$\begin{aligned}
||A_\lambda x||_Y &= \frac{1}{r}||A_\lambda(x_0 + rx) - A_\lambda(x_0)||_Y \\
&\le \frac{1}{r}||A_\lambda(x_0 + rx)||_Y + \frac{1}{r}||A_\lambda x_0||_Y \\
&\le \frac{1}{r} \sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B_r(x_0)} |f_\lambda(z)| + \frac{1}{r}\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda x_0||_Y =: M,
\end{aligned}$$

gleichmässig in $\lambda \in \Lambda$ und $x \in X$ mit $||x||_X < 1$; also

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} \le M.$$

$\square$

Anwendung 3.1.1. *Sei X vollständig, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ punktweise gegen $A\colon X \to Y$ konvergent. Dann ist A linear und stetig mit*

$$||A||_{L(X,Y)} \le \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Beweis: Nach Satz 3.1.1 gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty$. Wähle eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$||A_j||_{L(X,Y)} \underset{(j\to\infty, j\in\Lambda)}{\longrightarrow} \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} =: M < \infty.$$

Diese Teilfolge konvergiert natürlich ebenfalls punktweise gegen A. Offenbar ist A linear, und es gilt

$$||Ax||_Y = \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j x||_Y \le \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j||_{L(X,Y)} ||x||_X = M||x||_X$$

für alle $x \in X$. $\square$

Die Vollständigkeit von X ist wichtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.1.1. *Sei $X = C^0([0,1]), ||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}$. $A_j f\colon = j\int_{1-1/j}^1 f(t)\,dt, j \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt*

$$|A_j f| \le j||f||_{L^1}, j \in \mathbb{N};$$

also ist $A_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter gilt

$$A_j f \underset{(j\to\infty)}{\longrightarrow} Af := f(1), \forall f \in X;$$

jedoch ist $A\colon X \to \mathbb{R}$ unstetig. (Wähle $f_n(t) = t^n$ mit $f_n \to 0$ in $L^1([0,1])$ und $Af_n = f_n(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.)

(Vergleiche auch Übung 3.1.)

3.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien X, Y normierte Räume, $A\colon X \to Y$ linear.

Definition 3.2.1. *A heisst* **offen**, *falls das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ offen ist in Y.*

Satz 3.2.1. *(Satz von der offenen Abbildung): Seien X, Y Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Dann gilt:*

i) Ist A surjektiv, so ist A offen.

ii) Ist A bijektiv, so gilt $A^{-1} \in L(Y,X)$.

Beweis: i) Wir führen den Beweis in 3 Schritten.

Behauptung 1: $\exists r > 0\colon B_{2r}(0;Y) \subset \overline{A(B_1(0;X))}$.

Beweis: Da A surjektiv, folgt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k(0;X)).$$

Da Y vollständig, gibt es nach Satz 1.3.1 iii) ein k_0 mit

$$\overset{\circ}{\overline{A(B_{k_0}(0;X))}} \neq \emptyset,$$

und es gibt $y_0 = A(x_0) \in Y, r_0 > 0$ mit

$$B_{r_0}(y_0, Y) \subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))}.$$

Sei $l_0 \geq ||x_0||_X, l_0 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus

$$B_{r_0}(y_0;Y) = Ax_0 + B_{r_0}(0;Y)$$

mit der Linearität von A

$$\begin{aligned} B_{r_0}(0;Y) &\subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))} - Ax_0 \\ &= \overline{A(B_{k_0}(0;X) - x_0)} \subset \overline{A(B_{k_0+l_0}(0;X))} \\ &= (k_0 + l_0)\overline{A(B_1(0;X))}. \end{aligned}$$

Wähle $r = \frac{r_0}{2(k_0+l_0)}$.

Behauptung 2: $B_r(0;Y) \subset A(B_1(0;X))$.

Beweis: Fixiere $y \in B_r(0;Y)$. Wir konstruieren iterativ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$\sum_{k=1}^{n} Ax_k \to y \ (n \to \infty).$$

Da X vollständig, existiert $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in B_1(0;X)$, und mit der Stetigkeit von A folgt

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = y.$$

Beachte, dass nach Behauptung 1 gilt:

$$B_{sr}(0;Y) \subset \overline{A(B_{s/2}(0;X))}, \forall s > 0.$$

Wähle $x_1 \in B_{1/2}(0;X)$ mit

$$||Ax_1 - y||_Y < \frac{r}{2}.$$

Setze $y_1 = y - Ax_1 \in B_{r/2}(0;Y)$.

Seien für $k \geq 1$ Punkte $x_1, \ldots, x_k$ sowie $y_1, \ldots, y_k$ bereits bestimmt mit

$$||x_l||_X < 2^{-l}, y_l = y_{l-1} - Ax_l \in B_{2^{-l}r}(0;Y), 1 \leq l \leq k.$$

Wähle $x_{k+1} \in B_{2^{-k-1}}(0; X)$, so dass

$$y_{k+1} \colon = y_k - Ax_{k+1} \in B_{2^{-k-1}r}(0; Y).$$

Dann folgt $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k = y_1 - \sum_{k=2}^{n} Ax_k = \ldots = y_n \stackrel{(n\to\infty)}{\to} 0,$$

wie gewünscht.

Behauptung 3: A ist offen.

Beweis: Sei $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$, $y_0 = Ax_0$. Wähle $s > 0$ mit $B_s(x_0; X) \subset U$. Dann folgt mit Behauptung 2 sofort

$$\begin{aligned} B_{rs}(y_0; Y) &= y_0 + B_{rs}(0; Y) \subset Ax_0 + A(B_s(0; X)) \\ &= A(B_s(x_0; X)) \subset A(U). \end{aligned}$$

i) $\Rightarrow$ ii) Falls A bijektiv und offen, so ist A^{-1} offenbar stetig. □

Beispiel 3.2.1. *i) Sei $X = Y$ mit Normen $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$, und es gelte mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$*

$$||x||_2 \leq C||x||_1, \forall x \in X. \tag{3.2.1}$$

Ist X vollständig sowohl bezüglich $||\cdot||_1$ als auch bezüglich $||\cdot||_2$, so sind die Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ äquivalent.

Beweis: Betrachte $A = id \colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$. Wegen (3.2.1) ist A stetig. Falls X vollständig ist bezüglich $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$, so folgt mit Satz 3.2.1 auch die Stetigkeit von A^{-1}; das heisst $||x||_1 \leq C'||x||_2, \forall x \in X$. □

ii) Betrachte insbesondere $X = C^0([0,1]), ||\cdot||_1 = ||\cdot||_{C^0}, ||\cdot||_2 = ||\cdot||_{L^1}$. $A = id$ ist stetig aber nicht offen; sonst wären die Normen $||\cdot||_{C^0}$ und $||\cdot||_{L^1}$ auf $C^0([0,1])$ äquivalent.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Vollständigkeit von Y in Satz 3.2.1 nötig ist. Analog sieht man ein, dass auch die Vollständigkeit von X im allgemeinen notwendig ist. Betrachte dazu das Beispiel

iii) Sei $X = Y = l^2, ||\cdot||_2 = ||\cdot||_{l^2}$, und definiere eine Norm $||\cdot||_1$ auf X, wie folgt: Erweitere das System linear unabhängiger Vektoren $e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}, i = 1, 2, 3, \ldots$ zu einer Hamel-Basis $(b_\iota)_{\iota\in I}$ mit $||b_\iota||_{l^2} = 1, \forall \iota \in I$. Jedes $x \in X$ hat genau eine Darstellung

$$x = \sum_{\iota\in I} \alpha_\iota b_\iota,$$

wobei nur **endlich** *viele $\alpha_\iota \neq 0$. Setze*

$$||x||_1 = \sum_{\iota\in I} |\alpha_\iota|, \forall x = \sum_{\iota\in I} \alpha_\iota b_\iota \in X.$$

Beachte, dass für $x = \sum_\iota \alpha_\iota b_\iota$ stets gilt

$$||x||_{l^2} \leq \sum_\iota |\alpha_\iota| ||b_\iota||_{l^2} = ||x||_1;$$

das heisst $A = id\colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ *ist stetig. Jedoch gilt für* $x_k = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k}}}_{k\text{-mal}}, 0, \ldots) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}} e_i$

$$||x_k||_{l^2} = 1, ||x_k||_1 = \sqrt{k}, k \in \mathbb{N};$$

also sind die Normen $||\cdot||_1$ *und* $||\cdot||_{l^2}$ *nicht äquivalent,* A^{-1} *also nicht stetig und damit* A *nicht offen, und der Raum* $(l^2, ||\cdot||_1)$ *ist nicht vollständig.*

Beispiel 3.2.2. *Sei* $(X, ||\cdot||_X)$ *Banach-Raum,* $Y \subset X$ *abgeschlossen,* $Y \neq X$, $\pi\colon X \to X/Y$ *die kanonische Projektion.* π *ist stetig und surjektiv, der Raum* $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$ *vollständig nach Satz 2.3.1. Nach Satz 3.2.1 ist* π *daher offen. Vergleiche Satz 2.3.1.*

3.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X, Y normierte Vektorräume, $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, wobei $D(A) \subset X$ ein linearer Unterraum ist.

Betrachte den **Graph von** A, also den linearen Raum

$$\Gamma_A = \{(x, Ax); x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Definition 3.3.1. *A heisst* **abgeschlossen**, *falls* Γ_A *abgeschlossen ist in* $X \times Y$.

Dabei versehen wir $X \times Y$ *in üblicher Weise mit einer Norm, zum Beispiel mit der Norm*

$$||(x, y)||_{X\times Y} = ||x||_X + ||y||_Y, \forall x \in X, y \in Y.$$

Beispiel 3.3.1. *Falls* $A \in L(X, Y)$ *mit* $D(A) = X$, *so ist* A *abgeschlossen.*

Beweis: Betrachte eine Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in Γ_A mit

$$x_k \to x, y_k = Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Da A stetig ist, folgt $y = \lim_{k\to\infty} Ax_k = Ax$; das heisst $(x, y) \in \Gamma_A$. Also ist Γ_A abgeschlossen, und damit A. □

Falls X und Y vollständig sind, so ist für lineare Abbildungen $A\colon X \to Y$ die Stetigkeit sogar äquivalent zur Abgeschlossenheit.

Satz 3.3.1. *(Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien* X, Y *Banach-Räume,* $A\colon X \to Y$ *linear. Dann sind äquivalent:*

i) $A \in L(X, Y)$*;*

ii) A *ist abgeschlossen.*

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) siehe Beispiel 3.3.1.

ii) $\Rightarrow$ i) Betrachte Γ_A, versehen mit der von der Norm $||\cdot||_{X\times Y}$ induzierten Norm. Falls X, Y vollständig sind, so gilt dies auch für $X \times Y$. Ist daher Γ_A abgeschlossen in $X \times Y$, so ist $(\Gamma_A, ||\cdot||_{X\times Y})$ ein Banach-Raum.

Die Projektionen

$$\pi_X : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto x \in X, \pi_Y : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto Ax \in Y$$

sind stetig, $\pi_X : \Gamma_A \to X$ zudem surjektiv und injektiv. Nach dem Satz 3.2.1 von der offenen Abbildung folgt $\pi_X^{-1} \in L(X, \Gamma_A)$, und damit

$$A = \pi_Y \circ \pi_X^{-1} \in L(X, Y).$$

□

Bemerkung 3.3.1. *Satz 3.3.1 vereinfacht den Nachweis der Stetigkeit einer linearen Abbildung $A\colon X \to Y$ erheblich. Statt der* **zwei** *Bedingungen*

$$x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} x \Rightarrow \begin{cases} Ax_k \to y \ (k \to \infty) \\ y = Ax \end{cases}$$

genügt es, die **eine** *Bedingung zu prüfen*

$$x_k \to x, Ax_k \to y \ (k \to \infty) \Rightarrow Ax = y.$$

Beispiel 3.3.2. *(Hellinger-Töplitz): Sei $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum, $A\colon H \to H$ linear und symmetrisch; das heisst*

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H, \forall x, y \in H.$$

Dann ist A stetig.

Beweis: Wir zeigen, Γ_A ist abgeschlossen. Betrachte $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $H \times H$ mit

$$x_k \to x, y_k = Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $z \in H$

$$(y, z)_H \underset{(k\to\infty)}{\leftarrow} (y_k, z)_H = (Ax_k, z)_H = (x_k, Az)_H \underset{(k\to\infty)}{\to} (x, Az)_H = (Ax, z)_H;$$

das heisst

$$(Ax - y, z)_H = 0, \forall z \in H.$$

Wähle $z = Ax - y$. Es folgt $Ax = y$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Der Graph Γ_A kann auch abgeschlossen sein, wenn $D(A)$ ein echter Teilraum von X und der Operator A unbeschränkt ist.

Beispiel 3.3.3. *Sei $X = C^0([0, 1])$, versehen mit der Supremumsnorm, $A = \frac{d}{dt}$ mit $D(A) = C^1([0, 1]) \subset X$.*

Behauptung 1: *$A\colon D(A) \subset X \to X$ ist nicht stetig.*

Beweis: Betrachte $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0, 1])$ mit $f_n(t) = t^n, Af_n = nf_{n-1}$, und

$$||f_n||_{C^0} = 1, ||Af_n||_{C^0} = n||f_{n-1}||_{C^0} = n, n \in \mathbb{N};$$

also

$$\sup_{f\in D(A), ||f||_{C^0}\le 1} ||Af||_{C^0} = \infty.$$

□

Behauptung 2: *A ist abgeschlossen.*

Beweis: Falls für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0([0,1])$ gilt

$$f_n \stackrel{C^0}{\to} f, g_n = \frac{df_n}{dt} \stackrel{C^0}{\to} g \ (n \to \infty),$$

so folgt mit einem elementaren Satz der Analysis $g = \frac{df}{dt} = Af$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Im Satz 3.2.1 ii) von der offenen Abbildung können wir nun die Annahme der Stetigkeit von A durch die Annahme der Abgeschlossenheit ersetzen und diesen Satz auf unbeschränkte Operatoren erweitern.

Satz 3.3.2. *(Satz von der stetigen Inversen): Seien X, Y Banach-Räume, $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, abgeschlossen, injektiv und surjektiv. Dann gibt es ein $B = A^{-1} \in L(Y,X)$ mit $AB = id_{|_Y}, BA = id_{|_{D(A)}}$.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 ist jetzt die stetige Projektion $\pi_Y\colon \Gamma(A) \to Y$ bijektiv, also $B := \pi_X \circ \pi_Y^{-1} \in L(Y,X)$, und $B = A^{-1}\colon Y \to D(A)$. □

Beispiel 3.3.4. *Für den Operator A aus Beispiel 3.3.3 wähle als neuen Definitionsbereich*

$$D(A) = C_0^1([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]); f(0) = 0\}.$$

Dann ist $A = \frac{d}{dt}\colon D(A) \subset C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ surjektiv und injektiv mit stetiger Inversen

$$B\colon f \mapsto F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

3.4 Abschliessbare Operatoren

Seien X, Y normierte Vektorräume, $\Gamma \subset X \times Y$ ein linearer Unterraum.

Definition 3.4.1. *Γ heisst ein* **linearer Graph** *, falls gilt*

$$(x, y_1) \in \Gamma, (x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2,$$

oder, dazu äquivalent, falls gilt

$$(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0.$$

Bemerkung 3.4.1. *Falls $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, so ist Γ_A offenbar ein linearer Graph.*

Umgekehrt induziert ein linearer Graph $\Gamma \subset X \times Y$ genau eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \subset X \to Y$ mit $\Gamma = \Gamma_A$, gegeben durch

$$D(A) = \pi_X(\Gamma), Ax = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap \Gamma), x \in D(A).$$

Seien $A\colon D(A) \subset X \to Y, B\colon D(B) \subset X \to Y$ linear mit Graphen $\Gamma_A, \Gamma_B \subset X \times Y$.

Definition 3.4.2. *B heisst* **Erweiterung** *von A, $B \supset A$, falls $\Gamma_A \subset \Gamma_B$, oder – dazu äquivalent – falls*

$$D(A) \subset D(B) \text{ und } B_{|_{D(A)}} = A.$$

Definition 3.4.3. *A heisst* **abschliessbar**, *falls $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist. Der zugehörige Operator $\overline{A} \supset A$ mit $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A} \supset \Gamma_A$ heisst* **Abschluss** *von A.*

Bemerkung 3.4.2. *i) Falls A abschliessbar ist, so ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung (im Sinne der Inklusion der Graphen) von A.*
ii) Es gilt $D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}$, genauer

$$D(\overline{A}) = \{x \in X; \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A), y \in Y \colon (x_k, Ax_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} (x,y)\}.$$

Im Allgemeinen gilt $D(\overline{A}) \neq \overline{D(A)}$. So sind die Operatoren in Beispiel 3.3.3 oder in Beispiel 3.4.3 später in diesem Abschnitt abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich, dieser ist jedoch jeweils ein strikter Unterraum des Grundraumes.

Satz 3.4.1. *A ist abschliessbar genau dann, wenn für $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_A$ gilt:*

$$x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} 0, y_k = Ax_k \underset{(k\to\infty)}{\to} y \Rightarrow y = 0.$$

Beweis: A ist abschliessbar genau dann, wenn $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist und dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$(0, y) \in \overline{\Gamma_A} \Rightarrow y = 0.$$

□

Beispiel 3.4.1. *Sei $A \colon D(A) \subset X \to Y$ linear und stetig. Dann ist A abschliessbar.*

Beweis: Sei $(x_k, Ax_k = y_k) \in \Gamma_A$ mit $x_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$. Da A stetig, folgt

$$||Ax_k||_Y \leq \sup_{\substack{0 \neq x \in D(A) \\ ||x||_X \leq 1}} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X} ||x_k||_X \to 0 \ (k \to \infty),$$

also $Ax_k \to 0$ $(k \to \infty)$. □

Nicht jeder Operator ist abschliessbar.

Beispiel 3.4.2. *Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, A die Abbildung*

$$A \colon D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\} \ni f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Für

$$f_k = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]}, k \in \mathbb{N},$$

gilt $f_k \in D(A), ||f_k||_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ $(k \to \infty)$, jedoch gilt andererseits

$$Af_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also ist A nicht abschliessbar nach Satz 3.4.1.

Die wichtigste Klasse abschliessbarer Operatoren sind lineare Differentialoperatoren.

Beispiel 3.4.3. $\Delta\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *ist abschliessbar.*

Beweis: Sei $((u_k, f_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Gamma_\Delta \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mit

$$u_k \stackrel{L^2}{\to} 0, f_k = \Delta u_k \stackrel{L^2}{\to} f \ (k \to \infty).$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alle $k \in \mathbb{N}$ nach partieller Integration die Gleichung

$$\int_\Omega f_k \varphi \, dx = \int_\Omega \Delta u_k \varphi \, dx = \int_\Omega u_k \Delta\varphi \, dx.$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\int_\Omega f \varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $L^2(\Omega)$, folgt $f = 0$; also ist Δ abschliessbar nach Satz 3.4.1. □

Allgemein betrachten wir für $1 \leq p \leq \infty$ Operatoren

$$A\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$Au = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha(x) D^\alpha u, \ u \in C_0^\infty(\Omega),$$

mit Multi-Indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ vom Gewicht $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, und mit

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, 1 \leq j \leq n.$$

Die Koeffizientenfunktionen a_α seien der Einfachheit halber von der Klasse $C^N(\overline{\Omega})$ vorausgesetzt.

Satz 3.4.2. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der oben definierte Operator*

$$A\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

abschliessbar.

Beweis: Wir argumentieren wie in Beispiel 3.4.3. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to 0$ in $L^p(\Omega), f_k := Au_k \to f$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nach partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_k \varphi \, dx = \int_\Omega Au_k \varphi \, dx &= \sum_{|\alpha|\leq N} \int_\Omega a_\alpha(x) D^\alpha u_k \varphi \, dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq N} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k D^\alpha(a_\alpha(x)\varphi) \, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\int_\Omega f \varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Der folgende Satz 3.4.3 ergibt $f = 0$; das heisst, A ist abschliessbar. □

Satz 3.4.3. *("Fundamentallemma der Variationsrechnung") Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Falls*

$$\int_\Omega f\varphi\, dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

so ist $f = 0$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.4.3. *Die Annahme $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist zum Beispiel erfüllt, falls $f \in L^p(\Omega)$ für ein $p \in [1, \infty]$.*

Beweis von Satz 3.4.3: (indirekt) Annahme: $f \neq 0$. Wähle einen Lebesgue-Punkt $x_0 \in \Omega$ mit

$$f(x_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x)\, dx \neq 0.$$

Wähle $r > 0$ mit $dist(x_0, \partial\Omega) > r$ und

$$\int_{B_r(x_0)} f(x)\, dx \neq 0.$$

Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(B_r(x_0)) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$0 \leq \varphi_k \leq 1, \varphi_k \underset{(k\to\infty)}{\to} \chi_{B_r(x_0)}\ \mu\text{-fast überall.}$$

Falls $r = 1, x_0 = 0$ wähle z. B. $\varphi_k(x) = e^{-\frac{1/k}{1-|x|^2}}$, falls $|x| < 1$, $\varphi_k(x) = 0$ sonst. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt der gewünschte Widerspruch

$$0 = \int_\Omega f\varphi_k\, dx \to \int_\Omega f\chi_{B_r(x_0)}\, dx = \int_{B_r(x_0)} f(x)\, dx \neq 0 \quad (k \to \infty).$$

□

Im Falle der oben genannten Differentialoperatoren möchte man $\overline{A}$ und $D(\overline{A})$ gerne explizit bestimmen. Diese Frage führt auf die sogenannten **Sobolev-Räume**. Zum Beispiel ist $D(\overline{\Delta}) \subset L^2(\Omega)$ der Raum

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\colon |\alpha| \leq 2\};$$

vergleiche Funktionalanalysis II.

Kapitel 4

Der Satz von Hahn-Banach, Konvexität

4.1 Der Satz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Siehe Satz 4.1.2 für den komplexen Fall.)

Definition 4.1.1. *Ein $p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst* **sublinear***, falls gilt*

i) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall x \in X, \alpha \geq 0.$

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X.$

Beispiel 4.1.1. *Jede Norm auf X ist sublinear.*

Satz 4.1.1. *(Hahn-Banach): Sei M ein linearer Teilraum von X, $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in M. \tag{4.1.1}$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F_{|_M} = f$ und

$$F(x) \leq p(x), \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

Beweis:

i) OBdA sei $M \neq X$; sonst wähle $F = f$. Wähle $x_1 \notin M$ und setze

$$M_1 = \{x + tx_1; x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Beachte, dass für $x, y \in M$ wegen Linearität von f und Sublinearität von p stets gilt

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

also auch

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y), \forall x, y \in M. \tag{4.1.3}$$

Es folgt

$$\alpha := \sup_{x \in M} \left(f(x) - p(x - x_1)\right) < \infty,$$

und
$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1), \forall x \in M.$$
Weiter liefert (4.1.3) nach Übergang zum Supremum bezüglich $x \in M$
$$f(y) + \alpha \leq p(y + x_1), \forall y \in M.$$
Definiere $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$ durch
$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha, \forall x \in M, t \in \mathbb{R}.$$
Dann ist $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$ linear, $f_{1|M} = f$, und es gilt
$$f_1(x \pm x_1) = f(x) \pm \alpha \leq p(x \pm x_1), \forall x \in M. \tag{4.1.4}$$
Nach Multiplikation von (4.1.4) mit $t > 0$ und mit $t^{-1}x$ anstelle von x erhalten wir
$$f_1(x \pm tx_1) = f(x) \pm t\alpha \leq p(x \pm tx_1), \forall x \in M, t > 0,$$
also die Bedingung (4.1.1) auf dem Raum M_1.

ii) Mit transfiniter Induktion können wir uns nun eine lineare Fortsetzung g von f auf einem maximalen linearen Unterraum N von X verschaffen. Wir benutzen dazu das **Zornsche Lemma**. (Dies ist ein zum Auswahlaxiom oder zum Wohlordnungssatz äquivalentes Axiom; vergleiche Analysis I.)

Zornsches Lemma: *Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ nicht leer, partiell geordnet, und jede linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$ besitze eine obere Schranke. Dann besitzt $\mathcal{P}$ ein maximales Element.*

Setze
$$\mathcal{P} = \{(N, g); N \subset X \text{ linear}, M \subset N, g \text{ linear}, g_{|_M} = f, g \leq p \text{ auf } N\}$$
und für $(N, g), (L, h) \in \mathcal{P}$ setze
$$(N, g) \leq (L, h) :\Leftrightarrow N \subset L, h_{|_N} = g.$$
Offenbar ist $(\mathcal{P}, \leq)$ partiell geordnet, $(M, f) \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Sei $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$ linear geordnet. Setze
$$N = \bigcup_{\iota \in I} N_\iota$$
und für $x \in N$ setze
$$g(x) = g_\iota(x), \text{ falls } x \in N_\iota.$$
Beachte $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in N$.

N ist ein linearer Unterraum von X, g ist wohldefiniert und linear. Sei nämlich $x \in N_\iota \cap N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ für $\iota, \kappa \in I$; dann gilt $g_{\kappa|_{N_\iota}} = g_\iota$, also $g_\iota(x) = g_\kappa(x)$. Weiter gilt für $x \in N_\iota$, $y \in N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ auch $x, y \in N_\kappa$ und daher
$$g(x + y) = g_\kappa(x + y) = g_\kappa(x) + g_\kappa(y) = g(x) + g(y).$$
Schliesslich ist (N, g) obere Schranke für $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$, da für jedes $\iota \in I$ gilt
$$N_\iota \subset N \text{ und } g_{|_{N_\iota}} = g_\iota.$$

Das Zornsche Lemma liefert nun ein (bezüglich $\leq$) maximales $(N, g) \in \mathcal{P}$, wie gewünscht.

Es gilt $N = X$, sonst liefert i) ein $(N_1, g_1) \in \mathcal{P}$ mit $(N, g) < (N_1, g_1)$ im Widerspruch zur Maximalität von (N, g). Setze $F = g$. □

Sei nun X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 4.1.2. $p \colon X \to \mathbb{R}$ *heisst* $\mathbb{C}$-**sublinear**, *falls gilt*

i) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$,

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

Bemerkung 4.1.1. *Aus i), ii) folgt im komplexen Fall zusätzlich die Bedingung*

iii) $p(x) \geq 0, \forall x \in X$.

Beweis: Für $x \in X$ schätze ab

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

□

Satz 4.1.2. *Sei X ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum, $M \subset X$ ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum, $f \colon M \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit*

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in M, \tag{4.1.5}$$

für ein $\mathbb{C}$-sublineares p. Dann gibt es eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $F \colon X \to \mathbb{C}$ mit $F_{|_M} = f$ und

$$|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X.$$

Beweis: Betrachte $f_1 = Re\ f \colon M \to \mathbb{R}$. Beachte, f_1 ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt (4.1.5). Weiter gilt für $x \in M$ mit $f = f_1 + i f_2$:

$$\begin{aligned} f(ix) = i f(x) &= -f_2(x) + i f_1(x) \\ &= f_1(ix) + i f_2(ix); \end{aligned}$$

also

$$f_2(x) = -f_1(ix), \forall x \in M.$$

Sei $F_1 \colon X \to \mathbb{R}$ die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von f_1 gemäss Satz 4.1.1 mit $F_{1|_M} = f_1$ und

$$F_1(x) \leq p(x), \forall x \in X. \tag{4.1.6}$$

Setze

$$F(x) = F_1(x) - i F_1(ix), x \in M.$$

F ist $\mathbb{R}$-linear und wegen $F(ix) = iF(x)$ auch $\mathbb{C}$-linear mit $F_{|_M} = f$.

Schliesslich zeigen wir, dass F auch (4.1.5) erfüllt.

Behauptung: $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$.

Beweis: Sei $x \in X$. Wähle $\alpha = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = F_1(\alpha x).$$

Dann folgt aus (4.1.6)

$$|F(x)| = F_1(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x),$$

wie gewünscht. □

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber stets den reellen Fall.

Satz 4.1.1 gestattet es insbesondere, stetige lineare Abbildungen auf einem Unterraum M eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||_X)$ auf ganz X zu erweitern, mit derselben Abbildungsnorm.

Satz 4.1.3. *(Dominierte Fortsetzung): Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear und stetig.*

Dann gibt es $F \in L(X;\mathbb{R})$ mit $F_{|M} = f$ und

$$||F||_{L(X;\mathbb{R})} = ||f||_{L(M;\mathbb{R})} = \sup_{x \in M;\, ||x||_X \leq 1} |f(x)|.$$

Beweis: Definiere $p\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = ||x||_X \cdot ||f||_{L(M;\mathbb{R})}.$$

p ist sublinear, $f \leq p$ auf M. Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.1. □

4.2 Dualraum

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 4.2.1. $X^* := L(X;\mathbb{R})$ *heisst* **Dualraum** *von* X.

Notation: Für $x^* \in X^*$, $x \in X$ schreiben wir

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}.$$

Beachte, dass gemäss Beispiel 2.1.1 der Raum X^* stets ein Banachraum ist, unabhängig davon, ob dies für X gilt.

Wie "reichhaltig" ist X^*?

Satz 4.2.1. *Zu jedem $x \in X$ gibt es $x^* \in X^*$ mit*

$$\langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = ||x||_X^2 = ||x^*||_{X^*}^2.$$

Beweis: Betrachte $M = \operatorname{span}\{x\}$. Setze $f(tx) = t||x||_X^2$ mit $f \in L(M;\mathbb{R})$,

$$||f||_{L(M;\mathbb{R})} = \sup_{||tx||_X \leq 1} |f(tx)| = ||x||_X.$$

Setze f zu $x^* \in L(X;\mathbb{R})$ fort. Offenbar gilt

$$||x^*||_{X^*} = ||f||_{L(M;\mathbb{R})} = ||x||_X,\ \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = f(x) = ||x||_X^2.$$

□

Insbesondere erhalten wir die duale Charakterisierung der Norm.

Satz 4.2.2. *Es gilt*

i) $||x||_X = \sup_{x^* \in X^*, ||x^*||_{X^*} \le 1} |\langle x^*, x\rangle|, \forall x \in X;$

ii) $||x^*||_{X^*} = \sup_{x \in X, ||x||_X \le 1} |\langle x^*, x\rangle|, \forall x^* \in X^*.$

Das Supremum in i) wird stets sogar angenommen.

Beweis: i) OBdA sei $x \neq 0$; weiter dürfen wir wegen Homogenität annehmen, dass $||x||_X = 1$. Die Ungleichung $|\langle x^*, x\rangle| \le ||x||_X = 1$ für alle $x^* \in X^*$ mit $||x^*||_{X^*} \le 1$ folgt unmittelbar aus der Definition der Norm in X^*. Wählen wir weiter $x^* \in X^*$ gemäss Satz 4.2.1, erhalten wir $|\langle x^*, x\rangle| = 1$ und damit die Behauptung.

ii) Dies ist die Definition der Norm in X^*. □

Weiter kann man verschiedene Punkte $x \neq y$ in X durch ein $l \in X^*$ "trennen".

Satz 4.2.3. *Seien $x; y \in X, x \neq y$. Dann gibt es $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$.*

Beweis: Wähle l gemäss Satz 4.2.1 zum Vektor $y - x \in X$ mit

$$l(x-y) = l(x) - l(y) = ||x-y||_X^2 > 0.$$

□

Man kann sogar Punkte von (abgeschlossenen) Unterräumen trennen.

Satz 4.2.4. *Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $M \neq X$, und sei $x_0 \notin M$ mit*

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{x \in M} ||x_0 - x||_X > 0.$$

Dann gibt es $l \in X^*$ mit $l_{|_M} = 0$ und

$$||\, l||_{X^*} = 1,\ l(x_0) = d.$$

Beweis: Setze

$$M_0 = \{x + tx_0;\ x \in M, t \in \mathbb{R}\},$$

und definiere die lineare Abbildung $f \colon M_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x + tx_0) = td.$$

Dann gilt: $f_{|_M} = 0$, $f(x_0) = d$.

Behauptung: $||f||_{L(M_0,\mathbb{R})} = 1$.

Beweis: Für $y = x + tx_0 \in M_0$ mit $t \neq 0$ gilt

$$|f(y)| = |t|d \le |t|\ ||x_0 - (\frac{-x}{t})||_X = ||tx_0 + x||_X = ||y||_X,$$

also $||f||_{L(M_0;\mathbb{R})} \le 1$.

Umgekehrt wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $x = x_\varepsilon \in M$ mit

$$d \le ||x_0 - x||_X < d + \varepsilon.$$

Es folgt für $y = x_0 - x \in M_0$

$$f(y) = d \ge \frac{d}{d+\varepsilon} ||y||_X; \tag{4.2.1}$$

das heisst
$$||f||_{L(M_0;\mathbb{R})} = \sup_{0\neq y\in M_0} \frac{|f(y)|}{||y||_X} \geq \frac{d}{d+\varepsilon}.$$
Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Wähle $l = F$, die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.2. □

Bemerkung 4.2.1. *Aus (4.2.1) folgt sogar für jedes $f \in X^*$ mit $f_{|_M} = 0$ und $|f(x_0)| \geq d$ die Abschätzung $||f||_{X^*} \geq 1$. Somit erfüllt das in Satz 4.2.4 konstruierte l die Bedingung*
$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = l(x_0) = \sup_{\substack{f_{|_M}=0 \\ ||f||_{X^*}\leq 1}} |f(x_0)|;$$
das heisst, das Supremum wird für $f = l$ angenommen.

Sei $A \subset X$.

Definition 4.2.2. *Der* **Annihilator** *von A ist die Menge*
$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f_{|_A} = 0\}.$$

Bemerkung 4.2.2. *Offenbar gilt $A^\perp = \operatorname{span}(A)^\perp$, wobei $\operatorname{span}(A)$ die lineare Hülle von A ist.*

Satz 4.2.5. *Sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent*

i) $x_0 \in \overline{M}$;

ii) $f(x_0) = 0,\ \forall f \in M^\perp$.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Sei $f \in M^\perp$, $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ mit $x_k \in M$. Es folgt: $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $x_0 \notin \overline{M}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l_{|_{\overline{M}}} = 0$, $l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$.

□

Beispiel 4.2.1. *Insbesondere gilt für jeden linearen Unterraum $M \subset X$:*
$$\overline{M} = X \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\overline{M} = X$, $f \in X^*$ mit $f_{|_M} = 0$. Da f stetig, verschwindet f auf $\overline{M}$; also folgt $f = 0$.

"$\Leftarrow$": Sei $M^\perp = \{0\}$ und nimm widerspruchsweise an, $\overline{M} \neq X$. Zu $x_0 \in X \setminus \overline{M}$ wähle $f \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $f(x_0) \neq 0$ und $f_{|_{\overline{M}}} = 0$. Das heisst, $0 \neq f \in M^\perp$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Bemerkung 4.2.3. *Zu $L \subset X^*$ sei*
$${}^\perp L = \{x \in X;\ l(x) = 0, \forall l \in L\}.$$
Dann gilt gemäss Satz 4.2.5 für jeden linearen Unterraum $M \subset X$
$${}^\perp(M^\perp) = \overline{M};$$
vergleiche Lemma 2.4.4.

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir den Dualraum eines normierten Raumes und dessen Trennungseigenschaften genauer.

4.3 Dualität im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum (über $\mathbb{R}$). Für $y \in H$ sei $j_y \in H^*$ die Abbildung

$$j_y(x) = (y, x)_H, \forall x \in H.$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung

$$J\colon H \ni y \mapsto j_y \in H^*$$

erklärt.

Satz 4.3.1. *J ist eine lineare Isometrie.*

Beweis: Offenbar ist J linear. Weiter gilt für $y \in H$ mit Cauchy-Schwarz

$$||j_y||_{H^*} = \sup_{x \in H, ||x||_H \le 1} |j_y(x)| = \sup_{x \in H, ||x||_H \le 1} |(y, x)_H| \le ||y||_H.$$

Durch Einsetzen von $x = \frac{y}{||y||_H}$ erhält man sogar die Gleichheit der Norm. □

Tatsächlich ist J sogar ein Isomorphismus, insbesondere surjektiv.

Satz 4.3.2. *(Rieszscher Darstellungssatz) Zu jedem $l \in H^*$ gibt es genau ein $y \in H$ mit*

$$l(x) = (y, x)_H = j_y(x), \forall x \in H.$$

Beweis: OBdA sei $||l||_{H^*} > 0$; wegen Homogenität dürfen wir weiter annehmen, dass $||l||_{H^*} = 1$. Nach Satz 4.2.2 ii) gibt es $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in H mit

$$||y_k||_H = 1,\ l(y_k) \to ||l||_{H^*} = 1\ (k \to \infty).$$

Behauptung 1: $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis: Benutze die Parallelogramm-Identität

$$||x + y||_H^2 + ||x - y||_H^2 = 2(||x||_H^2 + ||y||_H^2),\ \forall x, y \in H.$$

Mit $x = y_k, y = y_l$ folgt

$$||\frac{y_k + y_l}{2}||_H^2 = 1 - ||\frac{y_k - y_l}{2}||_H^2,\ \forall k, l \in \mathbb{N}. \tag{4.3.1}$$

Mit Fehler $o(1) \to 0\,(k, l \to \infty)$ gilt somit

$$\begin{aligned} 1 + o(1) = \frac{1}{2}(l(y_k) + l(y_l)) = l\left(\frac{y_k + y_l}{2}\right) &\le ||l||_{H^*}||\frac{y_k + y_l}{2}||_H \\ &= \sqrt{1 - ||\frac{y_k - y_l}{2}||_H^2}; \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{k,l \to \infty} ||y_k - y_l||_H = 0,$$

wie gewünscht.

Da H vollständig ist, existiert

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k \in H, \; ||y||_H = 1.$$

Behauptung 2: $l = j_y$.

Beweis: Wegen Stetigkeit von l gilt

$$l(y) = \lim_{k\to\infty} l(y_k) = ||l||_{H^*} = 1 = ||y||_H^2 = j_y(y). \tag{4.3.2}$$

Sei

$$X = y^\perp = \{x \in H;\; (y,x)_H = 0\}$$

der zu span$\{y\}$ orthogonale Unterraum von H. Sei $x \in X$ mit $||x||_H = 1$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$||y + \varepsilon x||_H^2 = ||y||_H^2 + 2\varepsilon (y,x)_H + \varepsilon^2 ||x||_H^2 = 1 + \varepsilon^2.$$

Setze

$$y_\varepsilon = \frac{y + \varepsilon x}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

mit

$$||y_\varepsilon||_H = 1, \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Da für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$l(y_\varepsilon) \le 1 = l(y) = l(y_0),$$

folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(y_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} (l(y) + \varepsilon l(x)) = l(x);$$

das heisst

$$l_{|X} = 0 = j_{y|X}.$$

Mit (4.3.2) und da $H = span\{y\} + X$ nach Korollar 2.4.1 folgt die Behauptung und der Satz. □

Bemerkung 4.3.1. *Bedingung* (4.3.1) *besagt, dass die* 1*-Kugel in* H **gleichmässig** *strikt konvex ist.*

Mittels J können wir daher den Dualraum H^* von H mit H "identifizieren".

Eine wichtige Anwendung von Satz 4.3.2 liefert der folgende Satz.

Satz 4.3.3. *(Lax-Milgram) Sei* $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ *bilinear und stetig mit*

$$|a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H ||y||_H, \; \forall x,y \in H.$$

Mit einer Konstanten $\lambda > 0$ *gelte weiter*

$$a(x,x) \ge \lambda ||x||_H^2, \; \forall x \in H.$$

Dann gibt es eine stetige Bijektion $A \in L(H)$ *mit*

$$a(x,y) = (Ax,y)_H, \; \forall x,y \in H,$$

und es gilt

$$||A||_{L(H)} \le \Lambda, \; ||A^{-1}||_{L(H)} \le \lambda^{-1}.$$

Bemerkung 4.3.2. *Die Bilinearform a muss nicht symmetrisch sein.*

Beweis: Für alle $x \in H$ ist
$$l_x \colon y \mapsto a(x,y)$$
linear und
$$||l_x||_{H^*} = \sup_{y \in H, ||y||_H \le 1} |a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H < \infty.$$
Nach Satz 4.3.2 existiert $Ax := J^{-1} l_x \in H$ mit
$$a(x,y) = l_x(y) = (Ax, y)_H, \ \forall y \in H.$$
Offenbar ist A linear und wegen
$$||Ax||_H = ||l_x||_{H^*} \le \Lambda ||x||_H$$
gilt $A \in L(H)$, $||A||_{L(H)} \le \Lambda$.

Behauptung 1: A ist injektiv.

Beweis: Für $x \in H$ gilt
$$(Ax, x)_H = a(x,x) \ge \lambda ||x||_H^2.$$
Mit
$$(Ax, x)_H \le ||Ax||_H ||x||_H$$
folgt
$$||Ax||_H \ge \lambda ||x||_H;$$
insbesondere erhalten wir $Ax \ne 0$, falls $x \ne 0$.

Behauptung 2: $Im(A) = A(H)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H mit
$$Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$
Schätze ab
$$\begin{aligned} \lambda ||x_k - x_l||_H^2 &\le a(x_k - x_l, x_k - x_l) \\ &= (Ax_k - Ax_l, x_k - x_l)_H = o(1) ||x_k - x_l||_H, \end{aligned}$$
wobei $o(1) \to 0 \, (k, l \to \infty)$. Es folgt
$$||x_k - x_l||_H \to 0 \, (k, l \to \infty).$$
Sei $x = \lim_{k \to \infty} x_k$. Da $A \in L(H)$, erhalten wir
$$Ax = \lim_{k \to \infty} Ax_k = y;$$
das heisst, $Im(A)$ ist abgeschlossen.

Behauptung 3: A ist surjektiv.

Beweis: Sei widerspruchsweise $M := Im(A) \ne H$. Wähle $x_0 \in H \setminus M$, $l \in H^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit
$$l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0, \ l_{|_M} = 0.$$

Sei $y = J^{-1}l \neq 0$. Da $Ay \in M$, folgt mit

$$0 < \lambda||y||_H^2 \leq a(y,y) = (Ay,y)_H = l(Ay) = 0.$$

der gewünschte Widerspruch.

Somit ist A bijektiv, und nach Satz 3.2.1 ii) (Satz von der offenen Abbildung) gilt $A^{-1} \in L(H)$.

Zur Abschätzung der Norm betrachte $x \in H$. Setze $z = A^{-1}x$ und schätze ab

$$\lambda||z||_H^2 \leq a(z,z) = (Az,z)_H = (x,z)_H \leq ||x||_H||z||_H;$$

also folgt

$$||A^{-1}x||_H = ||z||_H \leq \lambda^{-1}||x||, \ \forall x \in H;$$

das heisst,

$$||A^{-1}||_{L(H)} \leq \lambda^{-1}.$$

□

Korollar 4.3.1. *Sei $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ wie in Satz 4.3.3, und sei $l \in H^*$. Dann gibt es genau ein $x \in H$ mit*

$$a(x,y) = l(y), \ \forall y \in H,$$

und

$$||x||_H \leq \lambda^{-1}||l||_{H^*}.$$

Beweis: Setze $x = A^{-1}J^{-1}l$, mit A wie in Satz 4.3.3. Es gilt

$$a(x,y) = (Ax,y)_H = (J^{-1}l,y)_H = l(y), \ \forall y \in H,$$

und

$$||x||_H \leq ||A^{-1}||_{L(H)}||l||_{H^*} \leq \lambda^{-1}||l||_{H^*}$$

nach Satz 4.3.2 und Satz 4.3.3. □

4.4 Der Dualraum von $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega,\mu)$ für ein Radonmass μ auf $\mathbb{R}^n$, q der zu p konjugierte Exponent $1 < q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir formulieren den Hauptsatz dieses Abschnittes.

Satz 4.4.1. *$L^p(\Omega)^*$ ist isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$.*

Zum Beweis konstruieren wir eine lineare Isometrie $J\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ und zeigen anschliessend mit Hilfe der gleichmässigen Konvexität der Norm in $L^p(\Omega)$ analog zu unserem Vorgehen im Beweis von Satz 4.3.2 deren Surjektivität.

Für $g \in L^q(\Omega)$ sei $l_g \in L^p(\Omega)^*$ die lineare Abbildung

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega fg\,d\mu \in \mathbb{R}.$$

Stetigkeit von l_g folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\left|\int_\Omega fg\,d\mu\right| \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}. \tag{4.4.1}$$

Lemma 4.4.1. $J\colon L^q(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in L^p(\Omega)^*$ *ist eine lineare Isometrie.*

Beweis: Offenbar ist J linear. Weiter folgt aus (4.4.1) die Abschätzung

$$||l_g||_{L^p(\Omega)^*} = \sup_{||f||_{L^p} \le 1} \left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| \le ||g||_{L^q(\Omega)};$$

das heisst, J ist stetig mit

$$||J||_{L(L^q(\Omega);L^p(\Omega)^*)} \le 1.$$

i) Sei $1 < p < \infty$. In diesem Fall ist $q < \infty$, und es gilt $p = \frac{q}{q-1}$. Zu $g \in L^q(\Omega)$ wähle $f = g|g|^{q-2} \in L^p(\Omega)$ als Vergleichsfunktion mit $||f||_{L^p(\Omega)} = ||g||^{q-1}_{L^q(\Omega)}$. Dies ergibt

$$|l_g(f)| = \int_\Omega |g|^q \, d\mu = ||g||^q_{L^q} \le ||l_g||_{L^{p*}} ||f||_{L^p} = ||l_g||_{L^{p*}} ||g||^{q-1}_{L^q};$$

das heisst

$$||l_g||_{L^{p*}} \ge ||g||_{L^q},$$

also

$$||l_g||_{L^{p*}} = ||g||_{L^q}.$$

ii) Betrachte nun $p = 1$, $q = \infty$. Sei $g \in L^\infty(\Omega)$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $x \in \Omega$ Lebesguepunkt von g mit

$$|g(x)| = \lim_{r \to 0} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \ge ||g||_{L^\infty} - \varepsilon.$$

Wähle $r > 0$ mit $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ und

$$\alpha := \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \ge ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Setze $f = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \chi_{B_r(x)} \in L^1(\Omega)$. Beachte

$$||f||_{L^1} = 1, \ |l_g(f)| = \alpha \ge ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$||l_g||_{L^{1*}} \ge ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$||l_g||_{L^{1*}} \ge ||g||_{L^\infty}$$

und damit

$$||l_g||_{L^{1*}} = ||g||_{L^\infty},$$

wie gewünscht. □

Lemma 4.4.2. J *ist surjektiv.*

Beweis: i) Betrachte zunächst den Fall $1 < p < \infty$. Sei $l \in L^p(\Omega)^*$. Wähle eine "Maximalfolge" $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $||f_k||_{L^p} = 1$ und

$$l(f_k) \to ||l||_{L^{p*}} \quad (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir annehmen $||l||_{L^{p*}} = 1$.

Behauptung 1: $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich genau gleich wie Behauptung 1 im Beweis von Satz 4.3.2 aus dem folgenden Satz 4.4.2 über die gleichmässige Konvexität von $L^p(\Omega)$. (Einen Beweis findet man zum Beispiel in **Adams**: Sobolev spaces, 2.29 Corollary.)

Satz 4.4.2. *Sei $1 < p < \infty$, und seien $u, \nu \in L^p(\Omega)$, mit $||u||_{L^p} = ||\nu||_{L^p} = 1$ und $\varepsilon\colon = ||u-\nu||_{L^p} > 0$.*

i) Falls $2 \le p < \infty$, so gilt

$$||\frac{u+\nu}{2}||_{L^p} \le \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p};$$

ii) Falls $1 < p \le 2$, so gilt mit $q = \frac{p}{p-1}$

$$||\frac{u+\nu}{2}||_{L^p} \le \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existiert

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k \in L^p(\Omega),$$

und es gilt

$$||f||_{L^p} = 1,\ l(f) = ||l||_{L^{p*}} = 1.$$

Setze $g = f|f|^{p-2} \in L^q(\Omega)$ mit $||g||_{L^q} = 1$.

Behauptung 2: $l = l_g = l_g$.

Beweis: Für $\varphi \in L^p(\Omega)$, $|\varepsilon| \ll 1$ sei

$$f_\varepsilon = \frac{f + \varepsilon\varphi}{||f+\varepsilon\varphi||_{L^p}},\ ||f_\varepsilon||_{L^p} = 1.$$

Da $l(f_\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ maximal, folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(f_\varepsilon) = l(\varphi) - l(f)\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} ||f+\varepsilon\varphi||_{L^p},$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f+\varepsilon\varphi||_{L^p} &= \frac{1}{p}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_\Omega |f+\varepsilon\varphi|^p\,d\mu \\ &= \frac{1}{p}\int \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}|f+\varepsilon\varphi|^p\,d\mu = \int_\Omega \varphi f|f|^{p-2}\,d\mu = \int_\Omega \varphi g\,d\mu.\end{aligned}$$

Das heisst,

$$l(\varphi) = l(f)l_g(\varphi) = l_g(\varphi),\ \forall \varphi \in L^p(\Omega).$$

$\square$

ii) Sei nun $p = 1$. Zur Vereinfachung nehmen wir an $\mu(\Omega) < \infty$. Sei $l \in L^1(\Omega)^*$. Da $\mu(\Omega) < \infty$, liefert die Höldersche Ungleichung für alle $s > 1$ die topologische Einbettung $i_s \colon L^s(\Omega) \to L^1(\Omega)$ mit

$$||i_s||_{L(L^s,L^1)} \leq (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{s}} \underset{(s\to 1)}{\to} 1,$$

also auch $l = l \circ i_s \in L^s(\Omega)^*$ mit

$$\limsup_{s\to 1} ||l||_{L^s(\Omega)^*} \leq ||l||_{L^1(\Omega)^*}.$$

Nach i) besitzt l als Element von $L^s(\Omega)^*$ eine Darstellung $l = l_g$ mit $g = g_r \in L^r(\Omega), \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$; insbesondere gilt

$$l(\varphi) = l_{g_r}(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_r \, d\mu, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Es folgt für $1 < s < s'$ und zugehörige $1 < r' < r < \infty$

$$\int_\Omega \varphi g_r \, d\mu = l(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_{r'} \, d\mu, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega);$$

insbesondere

$$\int_\Omega (g_r - g_{r'}) \varphi \, d\mu = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit Satz 3.4.3 erhalten wir $g_r = g_{r'} =: g \in \bigcap_{r<\infty} L^r(\Omega)$ mit

$$||g||_{L^r} = ||g_r||_{L^r} = ||l_{g_r}||_{L^{s*}} = ||l||_{L^{s*}}$$

für alle $s > 1$ und zugehörige r, wobei $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Mit $s \downarrow 1$ folgt $r \uparrow \infty$ und

$$\limsup_{r\to\infty} ||g||_{L^r} = \limsup_{s\to 1} ||l||_{L^{s*}} \leq ||l||_{L^{1*}};$$

das heisst, $g \in L^\infty(\Omega)$, und $l = l_g$. $\square$

Bemerkung 4.4.1. *Alternativ kann man Lemma 4.4.2 mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym beweisen.*

Bemerkung 4.4.2. $L^1(\Omega) \neq L^\infty(\Omega)^*$*, wie das folgende Beispiel zeigt.*

Beispiel 4.4.1. *Sei $x_0 \in \Omega$, und sei $\delta_{x_0} \colon C^0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ das Dirac-Funktional*

$$\delta_{x_0}(f) = f(x_0), \ \forall f \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Sei l eine Fortsetzung von δ_{x_0} auf $L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.1.3. Dann gilt $l \neq l_g, \forall g \in L^1(\Omega)$.

Beweis: Nimm an, $l = l_g$. OBdA sei $x_0 = 0$, $B_1(0) \subset \Omega$. Fixiere $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit

$$0 \leq \varphi \leq 1, \ \varphi \equiv 1 \text{ auf } B_{1/2}(0).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx) \in C_0^\infty(B_1(0)) \subset C^0(\overline{\Omega})$$

mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$ μ-fast überall. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$1 = \delta_{x_0}(\varphi_k) = l(\varphi_k) = l_g(\varphi_k) = \int_\Omega g\varphi_k \, dx \to 0 \ (k \to \infty).$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch. $\square$

4.5 Trennungssätze für konvexe Mengen, Extremalpunkte

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz 4.5.1. *(Trennungssatz): Seien $A, B \subset X$ nicht leer, disjunkt und konvex. Dann gilt:*

i) Falls A offen ist, so gibt es $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$l(a) < \lambda \leq l(b),\ \forall a \in A, b \in B.$$

ii) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{a\in A} l(a) < \lambda < \inf_{b\in B} l(b).$$

Bemerkung 4.5.1. *Gemäss Satz 4.5.1 kann man disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene $H = \{x \in X;\ l(x) = \lambda\}$ trennen.*

Beweis von Satz 4.5.1 i) Fixiere $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Setze $x_0 = b_0 - a_0$, $C = A - B + x_0$. Dann ist C konvex, offen und nicht leer mit $0 \in C$. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt weiter $x_0 \notin C$.

Wähle $R > 0$ mit $B_R(0) \subset C$. Sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ das **Minkowski-Funktional** mit

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda C\}.$$

Behauptung 1: Die Funktion p ist sublinear.

Beweis: Die positive Homogenität von p ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Seien weiter $x = \lambda x_0$, $y = \mu y_0$ mit $x_0, y_0 \in C$ und $\lambda, \mu > 0$. Da C konvex, gilt

$$z := \frac{\lambda x_0 + \mu y_0}{\lambda + \mu} \in C,$$

und $p(z) \leq 1$. Mit positiver Homogenität von p folgt

$$p(x + y) = p(\lambda x_0 + \mu y_0) = p(z)(\lambda + \mu) \leq \lambda + \mu.$$

Nach übergang zum Infimum bezüglich λ und μ erhalten wir schliesslich

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

wie gewünscht. $\square$

Da für jedes $x \in X$ mit $\lambda = 2R^{-1}||x||_X$ trivialerweise gilt

$$x \in B_{\lambda R}(0) \subset \lambda C,$$

folgt mit der Konstanten $M = 2R^{-1}$

$$p(x) \leq M||x||_X,\ \forall x \in X.$$

Da C offen, gilt $C = \{x;\ p(x) < 1\}$. Weiter erhalten wir aus $x_0 \notin C$, dass

$$p(x_0) \geq 1.$$

Definiere $f\colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Beachte

$$f(tx_0) = t \le tp(x_0) = p(tx_0),\ \forall t \ge 0,$$
$$f(tx_0) = t < 0 \le p(tx_0),\ \forall t < 0.$$

Sei l die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.1 mit

$$l(tx_0) = t,\ \forall t \in \mathbb{R},\ l(x) \le p(x),\ \forall x \in X.$$

Für alle $x \in X$ gilt dann

$$|l(x)| = \max\{l(x), l(-x)\} \le \max\{p(x), p(-x)\} \le M||x||_X;$$

also $l \in X^*$. Weiter gilt für $a \in A$, $b \in B$

$$l(a) - l(b) = l(a - b + x_0) - l(x_0) < 0,$$

da $l(x_0) = 1$ und da $l(x) \le p(x) < 1$ für $x = a - b + x_0 \in C$.

ii) Mit der folgenden Beobachtung lässt sich ii) auf i) zurückführen.

Behauptung 2: Seien A, B wie in ii). Dann gibt es $r > 0$ mit $U_r(A) \cap B = \emptyset$, wobei

$$U_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

offen, konvex und nicht leer.

Beweis: Offenbar ist $U_r(A)$ für jedes $r > 0$ offen, konvex und nicht leer, da $A \neq \emptyset$. Nimm an, für $r_k \downarrow 0$ gibt es $a_k \in A$, $b_k \in B_{r_k}(a_k) \cap B$, $k \in \mathbb{N}$. Da A kompakt, konvergiert eine Teilfolge $a_k \to a\,(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$, wobei $a \in A$. Da B abgeschlossen, und

$$||b_k - a||_X \le ||b_k - a_k||_X + ||a_k - a||_X \le r_k + ||a_k - a||_X \overset{(k\to\infty)}{\to} 0,$$

folgt andererseits $a = \lim_{k\to\infty} b_k \in B$; also $A \cap B \neq \emptyset$, und die Behauptung folgt. ☐

Wähle nun $r > 0$ wie in Behauptung 1, $l \in X^*$ gemäss i) zu $A' = U_r(A)$ und B. Es folgt

$$\max_{a \in A} l(a) < \sup_{x \in U_r(A)} l(x) \le \inf_{b \in B} l(b),$$

wie gewünscht. ☐

Sei $K \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $M \subset K$.

Definition 4.5.1. *i) M heisst* **extremale Teilmenge von** K *, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in K$ und $0 < \alpha < 1$ gilt*

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in M \Rightarrow x_0, x_1 \in M.$$

ii) Falls $M = \{x\}$ extremale Teilmenge ist, so heisst x ein **extremaler Punkt von** K *.*

Beispiel 4.5.1. *i) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $||\cdot||_X$ die euklidische Norm, K die Vollkugel $K = B_1(0) = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Dann ist jeder Randpunkt von K extremal.*

ii) Sei $X = \mathbb{R}^2$, versehen mit der Norm

$$||(x, y)||_X = \max\{|x|, |y|\},$$

und sei K die Menge

$$K = B_1(0) = \{(x, y);\ -1 \le x, y \le 1\}.$$

Dann sind die Seiten von K extremal, zum Beispiel

$$F = \{(x, 1); -1 \le x \le 1\}.$$

Die Extremalpunkte von K sind genau die Punkte $(\pm 1, \pm 1)$.

Lemma 4.5.1. *Sei $M \subset K$ extremale Teilmenge von K, $L \subset M$ extremale Teilmenge von M. Dann ist L extremale Teilmenge von K.*

Beweis: Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$ und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in L.$$

Da $L \subset M$, gehört x_α zu M; da weiter M extremal in K ist, folgt $x_0, x_1 \in M$. Da schliesslich L extremal in M, liegen x_0 und x_1 sogar in L; also ist L extremal in K. □

Lemma 4.5.2. *Sei $K \subset X$ kompakt, $l \in X^*$, $\lambda = \min_{x \in K} l(x)$. Dann ist*

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}$$

extremale Teilmenge von K.

Beweis: Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$ und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0 \in K_\lambda;$$

das heisst,

$$l(x_\alpha) = \alpha l(x_1) + (1 - \alpha)l(x_0) = \lambda.$$

Da $l(x_0) \ge \lambda$, $l(x_1) \ge \lambda$, folgt $l(x_0) = \lambda = l(x_1)$; also $x_0, x_1 \in K_\lambda$. □

Satz 4.5.2. *(Krein-Milman): Sei $K \subset X$ kompakt und nicht leer. Dann besitzt K einen extremalen Punkt.*

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ die Familie

$$\mathcal{M} = \{M \subset K;\ \emptyset \ne M \text{ kompakt, extremal in } K\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$L \le M \Leftrightarrow M \subset L,\ \forall L, M \in \mathcal{M}.$$

Wir verifizieren die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas.

Offenbar gilt $K \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sei $(M_\iota)_{\iota \in I}$ linear geordnete Teilmenge in $\mathcal{M}$. Setze $M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$. Dann ist M kompakt und nicht leer.

Behauptung 1: $M \in \mathcal{M}$.

Beweis: Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$, und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota.$$

Dann gilt $x_\alpha \in M_\iota$ für beliebiges $\iota \in I$. Da M_ι extremal in K, folgt $x_0, x_1 \in M_\iota$ für alle ι; das heisst, $x_0, x_1 \in M$. □

Da offenbar $M \subset M_\iota$ für alle $\iota \in I$, ist M eine obere Schranke für $(M_\iota)_{\iota \in I}$. Gemäss dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $M \in \mathcal{M}$. Sei $x \in M$.

Behauptung 2: $M = \{x\}$.

Beweis: (indirekt) Nimm an, $y \neq x$ sei ein weiteres Element von M. Wähle $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$ gemäss Satz 4.2.3. Setze $\lambda = \min_{m \in M} l(m)$. Gemäss Lemma 4.5.2 ist

$$M_\lambda = \{m \in M; l(m) = \lambda\} \subset M$$

extremal in M, nach Lemma 4.5.1 also auch in K. Weiter gilt $M_\lambda \neq \emptyset$, und M_λ ist kompakt, also $M_\lambda \in \mathcal{M}$. Schliesslich gilt $M_\lambda \subset M$, jedoch $M_\lambda \neq M$, da wegen $l(x) \neq l(y)$ entweder $x \notin M_\lambda$ oder $y \notin M_\lambda$, im Widerspruch zur Minimalität von M. □

Definition 4.5.2. *Für $A \subset X$ sei*

$$\overline{\mathrm{conv}}(A) = \bigcap_{A \subset B;\ B \text{ konvex und abgeschlossen}} B$$

die abgeschlossene **konvexe Hülle** *von A.*

Satz 4.5.3. *(Krein-Milman): Sei K kompakt und konvex, $E \subset K$ die Menge der Extremalpunkte von K. Dann gilt $K = \overline{\mathrm{conv}}(E)$.*

Beweis: (indirekt). Sei $x_0 \in K \setminus \overline{\mathrm{conv}}(E)$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1 ii) mit $A = \{x_0\}, B = \overline{\mathrm{conv}}(E)$ und

$$\inf_{x \in \overline{\mathrm{conv}}(E)} l(x) > l(x_0) \geq \min_{x \in K} l(x) = \lambda. \tag{4.5.1}$$

Setze

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}.$$

Da $K \neq \emptyset$, folgt $K_\lambda \neq \emptyset$, und K_λ ist kompakt und gemäss Lemma 4.5.2 zudem extremal. Nach Satz 4.5.2 besitzt K_λ einen extremalen Punkt y_0. Da K_λ extremal, ist dieser gemäss Lemma 4.5.1 extremal auch in K; also $y_0 \in E \subset \overline{\mathrm{conv}}(E)$, im Widerspruch zu (4.5.1). □

4.6 Schwache Konvergenz und Konvexität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $x \in X$.

Definition 4.6.1. *Die Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert schwach gegen** x*, oder* $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k\to\infty)$*, falls für alle* $l \in X^*$ *gilt:*

$$l(x_k) \to l(x)\ (k\to\infty).$$

Beispiel 4.6.1. $l^2 \ni e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots) \xrightarrow{w} 0\ (i\to\infty)$.

Bemerkung 4.6.1. *i) Der schwache Limes* x *ist eindeutig bestimmt wegen Satz 4.2.3. Wir schreiben daher* $x = w - \lim_{k\to\infty} x_k$*.*

ii) Falls $x_k \to x$ $(k\to\infty)$*, so auch* $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k\to\infty)$*.*

Satz 4.6.1. *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ *mit* $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k\to\infty)$*. Dann ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt. Weiter gilt*

$$||x||_X \le \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

Beweis: Die Abbildungen $A_k \in L(X^*,\mathbb{R})$ mit

$$A_k(l) = l(x_k),\ l\in X^*,\ k\in\mathbb{N}$$

sind punktweise beschränkt. Da X^* vollständig ist, folgt mit Satz 4.2.2 und Satz 3.1.1 die gleichmässige Beschränkheit der Normen

$$||x_k||_X = \sup_{l\in X^*,\ ||l||_{X^*}\le 1} |l(x_k)| = ||A_k||_{L(X^*,\mathbb{R})} \le C < \infty.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.2 mit

$$||l||_{X^*} = 1,\ l(x) = ||x||_X.$$

Es folgt

$$||x||_X = l(x) = \liminf_{k\to\infty} l(x_k) \le \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

□

Definition 4.6.2. *Die von den Mengen*

$$\Omega_{l,U} = l^{-1}(U),\ l\in X^*,\ U\subset\mathbb{R} \text{ offen}$$

induzierte Topologie heisst **schwache Topologie** τ_w *auf* X*.*

Bemerkung 4.6.2. *i) Offenbar ist die schwache Konvergenz die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie.*

ii) Falls $dim(X) = \infty$*, so ist die schwache Topologie nicht metrisierbar; das heisst, sie wird von keiner Metrik auf* X *induziert. Man muss daher zum Beispiel zwischen den Begriffen schwach abgeschlossenen (weakly closed) und schwach Folgen-abgeschlossen (weakly sequentially closed) unterscheiden; vgl. Lemma 4.6.2.*

iii) Da $l \in X^*$ *stetig, ist jedes* $\Omega_{l,U}$ *auch offen in der Standardtopologie* τ*; das heisst,* $\tau_w \subset \tau$*.*

Für $\Omega \subset X$ *sei*

$$\overline{\Omega}_w = w - \mathrm{clos}(\Omega) = \bigcap_{A\supset\Omega;\ A \text{ schwach abgeschlossen}} A.$$

die schwach abgeschlossene Hülle von Ω*.*

Lemma 4.6.1. *i)* $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_w$.

ii) Falls $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$ *für* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$*, so folgt* $x \in \overline{\Omega}_w$.

Beweis: i) Nach Bemerkung 4.6.2 iii) gilt $\tau_w \subset \tau$, eine schwach abgeschlossene Menge ist somit auch (stark) abgeschlossen. Es folgt

$$\overline{\Omega}_w = \bigcap_{\substack{A\supset\Omega \\ A \text{ schwach abgeschlossen}}} A \supset \bigcap_{\substack{A\supset\Omega \\ A \text{ abgeschlossen}}} A = \overline{\Omega}.$$

ii) Falls $x \notin \overline{\Omega}_w$, so gibt es $U = \bigcap_{j=1}^J l_j^{-1}(I_j) \in \tau_w$ mit geeigneten $l_j \in X^*$ und offenen Mengen $I_j \subset \mathbb{R}$, $1 \le j \le J$, so dass $\Omega \cap U = \emptyset$ und $x \in U$. Jedoch folgt mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$ insbesondere Konvergenz $l_j(x_k) \to l_j(x)$ $(k \to \infty)$ für jedes j, also $x_k \in \Omega \cap U$ für genügend grosses k im Widerspruch zur Wahl von U. □

Definition 4.6.3. *Eine Menge* $A \subset X$ *heisst* **schwach Folgen-abgeschlossen** *(w.s.c.: weakly sequentially closed), falls für alle* $(x_k) \subset A$ *gilt*

$$x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Lemma 4.6.2. *Für* $A \subset X$ *gilt:*

i) A schwach abgeschlossen $\Rightarrow$ *A schwach Folgen-abgeschlossen.*

ii) A schwach Folgen-abgeschlossen $\Rightarrow$ *A abgeschlossen.*

Beweis: i) Sei A schwach abgeschlossen, und sei $(x_k) \subset A$ mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$. Mit Lemma 4.6.1 ii) folgt $x \in \overline{A}_w = A$.

ii) Sei $(x_k) \subset A$ mit $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, also auch $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$ gemäss Bemerkung 4.6.1 ii). Ist A schwach Folgen-abgeschlossen, so gilt $x \in A$; das heisst, A ist abgeschlossen. □

Beispiel 4.6.2. *Die* 1*-Sphäre in* l^2 *ist abgeschlossen, aber nach Beispiel 4.6.1 ist sie nicht schwach Folgen-abgeschlossen. Dies zeigt, dass die Umkehrung der Aussage von Lemma 4.6.2 ii) nicht gilt.*

Satz 4.6.2. *Sei* $\Omega \subset X$ *konvex. Dann gilt*

$$\overline{\Omega}_w = \overline{\Omega}.$$

Beweis: (indirekt). Nimm an $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_w$. Sei $x_0 \in \overline{\Omega}_w \setminus \overline{\Omega}$. Setze $A = \{x_0\}$, $B = \overline{\Omega}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1 mit

$$l(x_0) < \inf_{x\in B} l(x) \le \inf_{x\in\Omega} l(x).$$

Es folgt $x_0 \notin \overline{\Omega}_w$ im Widerspruch zur Wahl von x_0. □

Satz 4.6.3. *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *schwach konvergent mit* $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty)$*. Dann gibt es eine Folge von Konvexkombinationen* $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k, \ \ 0 \le a_{kl} \le 1, \ \ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1$$

und

$$y_l \to x \ (l \to \infty).$$

Beweis: Setze $K = \overline{\mathrm{conv}}(\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\})$. Nach Satz 4.6.2 gilt $K = \overline{K} = \overline{K}_w$; mit Lemma 4.6.1 ii) folgt $x \in K$. □

Bemerkung 4.6.3. *Die schwache Topologie τ_w und τ unterscheiden sich nur, falls* $\dim X = \infty$*; in diesem Fall enthält mit den Mengen $\Omega_{l,U}$ auch jede schwach offene Menge einen offenen affinen Unterraum. Eine Konsequenz daraus sieht man im nachstehenden Beispiel.*

Beispiel 4.6.3. *Sei* $\dim X = \infty$. *Der schwache Abschluss der Menge*

$$A = \{x \in X; ||x||_X = 1\}.$$

ist die Vollkugel

$$\overline{A}_w = B_1(0; X) = \{x \in X;\ ||x||_X \leq 1\}.$$

Beweis: "$\overline{A}_w \subset B_1(0;X)$": Nach Satz 4.6.2 gilt $\overline{A}_w \subset \overline{\mathrm{conv}(A)} = B_1(0;X)$.

"$\overline{A}_w \supset B_1(0;X)$": Sei $x \in X$ mit $||x||_X < 1$, $\Omega \in \tau_w$ eine Umgebung von x. Nach Bemerkung 4.6.3 enthält Ω einen offenen affinen Unterraum durch x; jeder derartige Raum schneidet jedoch A. Insbesondere folgt $\Omega \cap A \neq \emptyset$, und $x \in \overline{A}_w$.

□

Kapitel 5

Reflexivität, Separabilität und Schwache Kompaktheit

5.1 Reflexivität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*.

Definition 5.1.1. *Der Raum* $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$ *heisst* **Bidualraum von** X *.*

Allgemein können wir X in kanonischer Weise in X^{**} einbetten mittels $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, wobei
$$\mathcal{I}x(l) := l(x),\ \forall l \in X^*,\ x \in X. \tag{5.1.1}$$

Satz 5.1.1. $\mathcal{I}$ *ist eine lineare Isometrie.*

Beweis: Offenbar ist $\mathcal{I}$ linear. Wie im Beweis von Satz 4.6.1 folgt zudem mit Satz 4.2.2 für jedes $x \in X$ die Identität

$$||x||_X = \sup_{l \in X^*,\ ||l||_{X^*} \le 1} |l(x)| = ||\mathcal{I}x||_{X^{**}}\ .$$

□

Definition 5.1.2. X *heisst* **reflexiv** *, falls die durch* (5.1.1) *definierte Abbildung* $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$ *surjektiv ist.*

Beispiel 5.1.1. *i)* $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ *sind (wegen der Rangformel) reflexiv (für eine beliebige Norm).*

ii) Jeder Hilbert-Raum $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ *ist reflexiv.*

iii) $L^p(\Omega)$ *ist reflexiv, falls* $1 < p < \infty$*.*

iv) $L^1(\Omega)$ *ist nicht reflexiv.*

Beweis: ii) Sei $J\colon H \to H^*$ die in Abschnitt 4.3 konstruierte Isometrie mit

$$J(x)(y) = (x, y)_H,\ \forall y \in H. \tag{5.1.2}$$

H^* ist wiederum Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(J(x), J(y))_{H^*} = (x, y)_H, \ \forall l = J(x), \ k = J(y) \in H^*. \tag{5.1.3}$$

Sei $J^* \colon H^* \to H^{**}$ der isometrische Isomorphismus analog zu (5.1.2). Dann gilt $\mathcal{I} = J^* \circ J$, denn

$$\begin{aligned}\mathcal{I}y(J(x)) &\overset{(5.1.1)}{=} J(x)(y) \overset{(5.1.2)}{=} (x,y)_H \overset{(5.1.3)}{=} (J(x), J(y))_{H^*} = (J(y), J(x))_{H^*} \\ &\overset{(5.1.2)}{=} J^*(J(y))(J(x)), \ \forall x, y \in H.\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

iii) Sei $1 < p < \infty$, und sei q zu p konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $J = J^p \colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ der in Lemma 4.4.1 konstruierte Isomorphismus, und sei $\xi \in L^p(\Omega)^{**}$. Zu $l \in L^p(\Omega)^*$ sei $g \in L^q(\Omega)$ mit $l = J^p g$. Zu $k = \xi \circ J^p \in L^q(\Omega)^*$ finden wir analog $f \in L^p(\Omega)$ mit $k = J^q f$; also $f = (J^q)^{-1} \circ \xi \circ J^p$. Es folgt

$$(\mathcal{I}f)(l) = l(f) = J^p g(f) = \int_\Omega fg \, d\mu = J^q f(g) = \xi(J^p g) = \xi(l),$$

und $\mathcal{I}$ ist surjektiv.

iv) $\mathcal{I} \colon L^1(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in (L^\infty(\Omega))^*$ ist gemäss Beispiel 4.4.1 nicht surjektiv. $\square$

Bemerkung 5.1.1. *Falls X reflexiv ist, so ist X auch vollständig. Somit liefert $\overline{\mathcal{I}(X)} \subset X^{**}$ eine kanonische Vervollständigung für jeden normierten Raum X; vergleiche Satz 2.1.1.*

Beweis: X^{**} ist nach Beispiel 2.1.1 vollständig. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Dann ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X^{**}. Sei $z = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}x_k \in X^{**}$. Da X reflexiv, folgt $z = \mathcal{I}x$ für ein $x \in X$, und $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, da $\mathcal{I}$ isometrisch. $\square$

Ist $L^\infty(\Omega)$ reflexiv oder nicht? – Wir beantworten diese Frage in einem allgemeinen Kontext.

Satz 5.1.2. *i) Falls X reflexiv ist, so gilt dies auch für X^*.*

ii) Falls X^* reflexiv ist und X vollständig, so ist auch X reflexiv.

Beweis:

i) (Übung)

ii) (indirekt) Seien $\mathcal{I} \colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^* \colon X^* \to (X^*)^{**}$ die kanonischen Isometrien gemäss (5.1.1). Widerspruchsweise nehmen wir an $\mathcal{I}(X) \neq X^{**}$. Da X vollständig ist, ist $M := \mathcal{I}(X)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Wähle $x^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{I}(X)$ und dazu $l^{**} \in (X^{**})^* = (X^*)^{**}$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l^{**}(x^{**}) = 1$, $l^{**}_{|M} = 0$. Da $\mathcal{I}^*$ surjektiv, gilt $l^{**} = \mathcal{I}^*(l)$ für ein $l \in X^*$; also

$$0 = l^{**}(\mathcal{I}x)) = \mathcal{I}^*(l)(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}(x)(l) = l(x), \ \forall x \in X.$$

Es folgt $l = 0$, $\mathcal{I}(l) = l^{**} = 0$. $\square$

Beispiel 5.1.2. *$L^\infty(\Omega)$ ist nicht reflexiv.*

Beweis: $L^1(\Omega)$ ist vollständig mit Dualraum $(L^1(\Omega))^*$ isometrisch isomorph zu $L^\infty(\Omega)$, jedoch gemäss Beispiel 5.1.1 iv) nicht reflexiv. □

Satz 5.1.3. *Sei X reflexiv, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann ist auch Y reflexiv.*

Beweis: Sei $\xi\colon X^* \to Y^*$ die Einschränkungsabbildung, definiert durch

$$\xi(l)(y) = l(y),\ \forall y \in Y,$$

mit

$$||\xi(l)||_{Y^*} \le ||l||_{X^*},\ \forall l \in X^*.$$

Sei analog $\eta\colon Y^{**} \to X^{**}$ gegeben durch

$$\eta(y^{**})(l) = y^{**}(\xi(l)),\ \forall l \in X^*,$$

mit

$$||\eta(y^{**})||_{X^{**}} \le ||y^{**}||_{Y^{**}}||\xi||_{L(X^*,Y^*)} \le ||y^{**}||_{Y^{**}},\ \forall y^{**} \in Y^{**}.$$

Seien weiter $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^Y\colon Y \to Y^{**}$ die kanonischen Isometrien. Nach Annahme ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

Behauptung 1: $\mathcal{I}^{-1}(\eta(Y^{**})) \subset Y$.

Beweis: Sei $y^{**} \in Y^{**}$, und nimm an $x = \mathcal{I}^{-1}(\eta(y^{**})) \notin Y$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l(x) \neq 0$, $l_{|_Y} = 0$. Da $l_{|_Y} = 0$, folgt $\xi(l) = 0$; also

$$0 = y^{**}(\xi(l)) = \eta(y^{**})(l) = \mathcal{I}x(l) = l(x) \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Sei nun $y^{**} \in Y^{**}$. Nach Behauptung 1 gilt $y := \mathcal{I}^{-1}(\eta(y^{**})) \in Y$. Für $f \in Y^*$ sei $l \in X^*$ eine beliebige Fortsetzung gemäss Satz 4.1.2 mit $l_{|_Y} = f$; das heisst, $\xi(l) = f$. Es folgt

$$y^{**}(f) = y^{**}(\xi(l)) = \eta(y^{**})(l) = \mathcal{I}y(l) = l(y) \overset{(y\in Y)}{=} f(y) = \mathcal{I}^Y y(f)$$

für alle $f \in Y^*$; das heisst $\mathcal{I}^Y$ ist surjektiv. Weiter folgt mit der Identität $y^{**}(f) = \mathcal{I}^Y y(f)$ für alle $f \in Y^*$ wegen $\mathcal{I}y = \eta(y^{**})$ die Gleichheit

$$\eta\mathcal{I}^Y = \mathcal{I}_{|Y}.$$

□

5.2 Separabilität

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 5.2.1. *M heisst* **separabel**, *falls es eine abzählbare Teilmenge $D \subset M$ gibt mit $\overline{D} = M$.*

Bemerkung 5.2.1. *Eine Folge* $(x_k) \subset M$ *ist dicht genau dann, wenn*

$$M = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(x_k) \ .$$

Beispiel 5.2.1. *i)* $\mathbb{R}^n$ *ist separabel, falls d die von einer Norm induzierte Metrik ist.*

ii) $C^0([0,1])$ *ist nach dem Weierstraßschen Approximationssatz separabel, analog gilt dies auch für* $C^0(\overline{\Omega})$ *für eine beliebige offene Menge* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$*.*

iii) $L^p(\Omega)$ *ist für* $1 \leq p < \infty$ *separabel.*

iv) $L^\infty([0,1])$ *ist nicht separabel. Betrachte dazu die Familie* $f_s = \chi_{[0,s]}, 0 < s \leq 1$ *mit*

$$||f_s - f_t||_{L^\infty} = ||\chi_{]s,t]}||_{L^\infty} = 1, \ \forall 0 < s < t \leq 1. \tag{5.2.1}$$

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dicht. Für* $0 < s \leq 1$ *wähle* $k \in \mathbb{N}$ *mit*

$$||f_s - g_k||_{L^\infty} < 1/2. \tag{5.2.2}$$

Wegen (5.2.1) kann (5.2.2) für festes k nur für höchstens ein $s = s(k)$ *gelten. Dies liefert eine surjektive Abbildung* $\mathbb{N} \ni k \mapsto s(k) \in]0,1]$*, was jedoch unmöglich ist. (Vergleiche Beispiel 3.5.2 und Satz 3.5.2, Analysis III.)*

Satz 5.2.1. *Sei M separabel,* $A \subset M$*. Dann ist A separabel (bezüglich der induzierten Metrik* $d_{|_{A\times A}}$*).*

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in M, $a_0 \in A$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$A \cap B_{1/2l}(x_k) \neq \emptyset$$

wähle $a_{kl} \in A \cap B_{1/2l}(x_k)$, $a_{kl} = a_0$ sonst. Dann gilt

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_{1/2l}(x_k)) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(a_{kl});$$

also ist $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ dicht. □

Wir verknüpfen nun Separabilität und lineare Struktur.

Satz 5.2.2. *Sei* $(X, ||\cdot||_X)$ *ein normierter* $\mathbb{R}$*-Vektorraum.*

i) Ist X^* *separabel, so ist X separabel.*

ii) Ist X separabel und reflexiv, dann ist X^* *separabel.*

Beweis:

i) Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^*. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit $||x_k||_X = 1$ und

$$l_k(x_k) \geq ||l_k||_{X^*} - 1/k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Setze

$$M = \overline{\text{span}\{x_k; \ k \in \mathbb{N}\}}.$$

M ist separabel. Die Aussage i) folgt daher aus

Behauptung: $M = X$.

Beweis: (indirekt) Sei $X \neq M$, und seien $x_0 \in X \setminus M$ und dazu $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 gewählt mit

$$l(x_0) = 1, \; l_{|M} = 0.$$

Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $l = \lim_{k\to\infty,\; k\in\Lambda} l_k$. Es folgt

$$0 \neq ||l||_{X^*} = \lim_{k\to\infty,\; k\in\Lambda} ||l_k||_{X^*} \leq \limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} l_k(x_k),$$

jedoch gilt

$$|l_k(x_k)| = |(l_k - l)(x_k)| \leq ||l_k - l||_{X^*} ||x_k||_X \to 0 \; (k \to \infty,\; k \in \Lambda).$$

ii) Mit X ist auch $X^{**} = \mathcal{I}(X)$ separabel. Falls nämlich $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in X, so liegt $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^{**}. Mit i) folgt Separabilität von X^*. □

5.3 Schwache Folgenkompaktheit

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*, Bidualraum X^{**} und kanonischer Isometrie $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$. Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^*, $l \in X^*$.

Definition 5.3.1. $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert schwach*** *gegen* l, $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \, (k \to \infty)$, *falls*

$$l_k(x) \underset{(k\to\infty)}{\to} l(x), \; \forall x \in X. \tag{5.3.1}$$

Somit haben wir auf X^* nun drei Konvergenzbegriffe:

i) Normkonvergenz $l_k \to l \; (k \to \infty)$;

ii) schwache Konvergenz $l_k \overset{w}{\rightharpoonup} l \; (k \to \infty)$ im Sinne

$$z(l_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} z(l), \; \forall z \in X^{**} \tag{5.3.2}$$

iii) schwache* Konvergenz $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \; (k \to \infty)$ im Sinne von (5.3.1), das heisst im Sinne von (5.3.2), jedoch nur für alle $z \in \mathcal{I}(X)$.

Bemerkung 5.3.1. *i) Falls X reflexiv, so sind schwache und schwache* Konvergenz äquivalent.*

ii) Im allgemeinen gilt: $l_k \underset{(k\to\infty)}{\to} l \;\Rightarrow\; l_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{w}{\rightharpoonup}} l \;\Rightarrow\; l_k \underset{k\to\infty}{\overset{w^*}{\rightharpoonup}} l.$

iii) Die schwache* Konvergenz ist Konvergenz bezüglich der von den Mengen

$$\Omega_{x,U} = \{l \in X^*;\, l(x) \subset U\} = (l(x))^{-1}(U), \; x \in X,\, U \subset \mathbb{R} \text{ offen},$$

erzeugten schwachen* Topologie τ_{w^*}. Offenbar gilt $\tau_{w^*} \subset \tau_w$, also ist τ_{w^*} gröber als τ_w und daher im allgemeinen nicht metrisierbar. Abgeschlossenheit, beziehungsweise Kompaktheit können daher nicht äquivalent mit dem Folgenkriterium umschrieben werden. Schwach* abgeschlossene Mengen sind analog zu Abschnitt 4.6 stets auch abgeschlossen bezüglich schwacher* Konvergenz und sind schwach abgeschlossen, sowie stark abgeschlossen.

Nach dem *Satz von Tychonov* ist die abgeschlossene 1-Kugel in X^* stets schwach* kompakt. Für die Anwendungen, die wir unten besprechen, wird jedoch Folgenkompaktheit benötigt.

Satz 5.3.1. *(Banach-Alaoglu) Sei X separabel, $(l_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ beschränkt. Dann gibt es $l \in X^*$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Wähle Teilfolgen $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_j \supset \ldots \supset \ldots$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$l_k(x_j) \to a_j =: l(x_j) \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda_j),$$

und definiere Λ als die zugehörige Diagonalfolge.

Behauptung 1: l lässt sich zu $l \in X^*$ erweitern.

Beweis: l ist linear auf $M = \operatorname{span}\{x_j;\ j \in \mathbb{N}\}$, und

$$|l(x)| = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} |l_k(x)| \leq \limsup_{k\to\infty} ||l_k||_{X^*} ||x||_X,\ \forall x \in M.$$

Also ist l stetig fortsetzbar auf $X = \overline{M}$.

Behauptung 2: $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$

Beweis: Sei $x \in X$, $x = \lim_{j\to\infty,\ j\in K} x_j$, wobei $K \subset \mathbb{N}$. Für $j, k \in \mathbb{N}$ schätze ab

$$\begin{aligned} |l_k(x) - l(x)| &\leq |l_k(x - x_j)| + |l(x - x_j)| + |l_k(x_j) - l(x_j)| \\ &\leq (\sup_k ||l_k||_{X^*} + ||l||_{X^*}) ||x - x_j||_X + |l_k(x_j) - l(x_j)|. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ für festes $j \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} |l_k(x) - l(x)| \leq C ||x - x_j||_X.$$

Mit $j \to \infty$ folgt $l_k(x) \to l(x)$ $(k \to \infty)$, wie gewünscht. □

Beispiel 5.3.1. *i) $X = L^1(\Omega)$ ist separabel, $X^* \cong L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.4.1. Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so existiert nach Satz 5.3.1 eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^\infty(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega f_k g \, d\mu \to \int_\Omega f g \, d\mu \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $g \in L^1(\Omega)$.

ii) $X = L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 5.3.1 in diesem Fall nicht gilt.

Für $0 < \varepsilon \leq 1$ sei $T_\varepsilon \in X^*$ gegeben durch

$$T_\varepsilon f = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f \, dx,\ f \in L^\infty([0,1]).$$

Offenbar gilt

$$||T_\varepsilon||_{X^*} = \sup_{||f||_{L^\infty} \leq 1} |T_\varepsilon f| \leq 1,$$

jedoch ist die Menge $\{T_\varepsilon;\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$ nicht schwach* relativ folgenkompakt.

Beweis: (indirekt). Nimm an, für eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und ein $T \in X^*$ gelte

$$T_{\varepsilon_k} \overset{w^*}{\rightharpoonup} T \ (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, dass gilt

$$1 > \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \to 0 \ (k \to \infty).$$

Wähle

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \chi_{[\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k[} \in L^\infty([0,1])$$

mit $||f||_{L^\infty} = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_k} f &= \frac{1}{\varepsilon_k} \sum_{l=k}^{\infty} (-1)^l (\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}) \\ &= (-1)^k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^{\varepsilon_{k+1}} f\,dx; \end{aligned}$$

das heisst,

$$|T_{\varepsilon_k} f - (-1)^k| \leq \frac{1}{\varepsilon_k} \left(\varepsilon_{k+1} + \int_0^{\varepsilon_{k+1}} |f|\,dx \right) \leq \frac{2\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Die Folge $(T_{\varepsilon_k} f)_{k \in \mathbb{N}}$ häuft sich somit bei 1 und -1, ist daher divergent. □

Die Annahme der Separabilität kann in reflexiven Räumen entfallen. Ausserdem können wir mittels $\mathcal{I}$ Konvergenzaussagen in $X^{**} = (X^*)^*$ zurückziehen und erhalten so schwache Folgenkompaktheit im ursprünglichen Raum ("schwaches Bolzano-Weierstrass Theorem").

Satz 5.3.2. *(Eberlein-Šmulyan) Sei X reflexiv, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X beschränkt. Dann existiert $x \in X$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis: Betrachte

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Offenbar ist Y separabel und nach Satz 5.1.3 reflexiv. Nach Satz 5.2.2 ist auch Y^* separabel. Sei $\mathcal{I}\colon Y \to Y^{**}$ die kanonische Isometrie.

Nach Satz 5.3.1 ist $(\mathcal{I}x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y^{**} = \mathcal{I}Y$ schwach* folgenkompakt; das heisst, für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x \in Y$ gilt

$$(\mathcal{I}x_k)(l) = l(x_k) \underset{(k \to \infty,\ k \in \Lambda)}{\to} (\mathcal{I}x)(l) = l(x),\ \forall l \in Y^*.$$

Für jedes $l \in X^*$ gehört die Einschränkung $l_{|_Y}$ zu Y^*. Da weiter $x_k, x \in Y$, folgt

$$l(x_k) \to l(x) \ (k \to \infty, k \in \Lambda)$$

für alle $l \in X^*$; das heisst, $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. □

Beispiel 5.3.2. *i) Satz 5.3.2 ist insbesondere anwendbar, falls X ein Hilbert-Raum ist.*

ii) Sei $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Nach Satz 4.4.1 ist $X = L^p(\Omega)$ reflexiv. Daher liefert Satz 5.3.2 eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^p(\Omega)$ mit $f_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} f$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$; das heisst mit $q = \frac{p}{p-1}$ gilt für $k \to \infty,\ k \in \Lambda$:

$$\int_\Omega f_k g\,d\mu \to \int_\Omega f g\,d\mu,\ \forall g \in L^q(\Omega).$$

Als weitere Anwendung von Satz 5.3.2 beweisen wir das folgende Approximationstheorem.

Satz 5.3.3. *(Approximationstheorem) Sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen, $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es $m_0 \in M$ mit*

$$||x_0 - m_0||_X = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{m\in M} ||x_0 - m||_X.$$

Bemerkung 5.3.2. *Satz 5.3.3 ist insbesondere anwendbar, falls M ein nicht trivialer abgeschlossener linearer Unterraum von X ist, und liefert ein Analogon zu Korollar 2.4.1 in diesem Fall. Analog zur Situation im Hilbertraum können wir m_0 als "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf M auffassen.*

Beweis: Sei $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ eine "Minimalfolge" mit

$$||x_0 - m_k||_X \to \operatorname{dist}(x_0, M)\ (k \to \infty).$$

Die Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach Satz 5.3.2 gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $m_0 \in X$ mit

$$m_k \overset{w}{\rightharpoonup} m_0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Da M abgeschlossen und konvex ist, ist M nach Satz 4.6.2 auch schwach abgeschlossen, somit auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz, und $m_0 \in M$. Schliesslich folgt mit Satz 4.6.1

$$||x_0 - m_0||_X \le \liminf_{k\to\infty, k\in\Lambda} ||x_0 - m_k|| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

□

5.4 Variationsrechnung

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset X$, $F\colon M \to \mathbb{R}$.

Definition 5.4.1. *Die Funktion F ist* **schwach folgen-unterhalb-stetig** *(kurz: w.s.l.s.c. oder weakly sequentially lower semi-continuous) in $x_0 \in M$, falls für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x_0$ $(k \to \infty)$ gilt*

$$F(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} F(x_k).$$

Kürzer schreiben wir auch

$$F(x_0) \le \liminf_{x \overset{w}{\rightharpoonup} x_0,\ x\in M} F(x).$$

Beispiel 5.4.1. *i) Die Norm $F(x) = ||x||_X$ ist w.s.l.s.c. auf X gemäss Satz 4.6.1.*

ii) Sei $F\colon M \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, wobei $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist F auf M w.s.l.s.c.

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \overset{w}{\to} x_0$. Wähle eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$F(x_l) \to \liminf_{k\to\infty} F(x_k) =: \alpha_0 \ (l \to \infty,\ l \in \Lambda).$$

OBdA dürfen wir annehmen, dass $\Lambda = \mathbb{N}$.

Nach Satz 4.6.3 gibt es Konvexkombinationen

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k,\ 0 \le a_{kl} \le 1,\ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1$$

mit $y_l \to x_0$ $(l \to \infty)$, und $(y_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset M$, da M konvex. Für beliebiges $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 4.6.2 und Lemma 4.6.1 die Beziehung $x_0 \in \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \ge k_0\}}$. Für ein festes $k_0 \in \mathbb{N}$ dürfen wir daher annehmen, dass

$$a_{kl} = 0,\ \forall k \le k_0.$$

Mit der Konvexität von F folgt

$$F(y_l) \le \sum_{k=k_0}^{l} a_{kl} F(x_k) \le \sup_{k\ge k_0} F(x_k),\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Nach Grenzübergang $l \to \infty$ erhalten wir

$$F(x_0) = \lim_{l\to\infty} F(y_l) \le \sup_{k\ge k_0} F(x_k).$$

Mit $k_0 \to \infty$ folgt schliesslich

$$F(x_0) \le \limsup_{k\to\infty} F(x_k) = \alpha_0.$$

□

Definition 5.4.2. *$F\colon M \to \mathbb{R}$ heisst* **koerziv** *auf M bezüglich $||\cdot||_X$, falls gilt*

$$F(x) \to \infty \quad (||x||_X \to \infty,\ x \in M).$$

Satz 5.4.1. *(Variationsprinzip) Sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer und schwach folgen-abgeschlossen, $F\colon M \to \mathbb{R}$ koerziv und w.s.l.s.c. Dann existiert $x_0 \in M$ mit*

$$F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x).$$

Beweis: Betrachte eine Minimalfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$F(x_k) \to \inf_{x\in M} F(x) =: \alpha_0 \ (k \to \infty).$$

Da F koerziv, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Satz 5.3.2 besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $x_k \overset{w}{\to} x_0$ $(k \to \infty, k \in \Lambda)$.

Da M schwach folgen-abgeschlossen, folgt $x_0 \in M$, und

$$F(x_0) \le \liminf_{k\to\infty, k\in\Lambda} F(x_k) = \alpha_0,$$

da F w.s.l.s.c. □

Bemerkung 5.4.1. *Falls M konvex, F strikt konvex, so kann F höchstens eine Minimalstelle in M besitzen.*

Beweis: Seien $x_0 \neq x_1 \in M$ mit

$$F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x) = F(x_1).$$

Für $0 < t < 1$ gilt $x_t = tx_1 + (1-t)x_0 \in M$, und mit

$$F(x_t) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x)$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. □

Kapitel 6

Auflösung linearer Gleichungen, Spektraltheorie

6.1 Duale Operatoren

Seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Dualraum X^*, beziehungsweise Y^*, $A\colon D_A \subset X \to Y$ linear mit $\overline{D_A} = X$.

Definition 6.1.1. *Der zu A* **duale Operator** $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^*} = \{y^* \in Y^*;\ l_{y^*}\colon D_A \ni x \mapsto \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} \textit{ ist stetig }\},$$

und für $y^* \in D_{A^*}$ ist $A^*y^* \in X^*$ die eindeutige Fortsetzung von l_{y^*} auf X.

Bemerkung 6.1.1. *i) A^* hat die Eigenschaft*

$$\langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y},\ \forall x \in D_A,\ y^* \in D_{A^*}. \tag{6.1.1}$$

ii) Auch falls A nicht dicht definiert ist, kann man **formal** *zu A* **duale Operatoren** *durch* (6.1.1) *charakterisieren, jedoch sind diese dann nicht eindeutig.*

Satz 6.1.1. *Für $A \in L(X,Y)$ gilt $A^* \in L(Y^*, X^*)$, und*

$$||A||_{L(X,Y)} = ||A^*||_{L(Y^*,X^*)}.$$

Beweis: Für $y^* \in Y^*$, $x \in X$ gilt

$$|\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| \le ||y^*||_{Y^*}||A||_{L(X,Y)}||x||_X;$$

das heisst, $y^* \in D_{A^*}$, und

$$\begin{aligned}\sup_{||y^*||_{Y^*}\le 1} ||A^*y^*||_{X^*} &= \sup_{||x||_X\le 1,\ ||y^*||_{Y^*}\le 1} |\langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X}| \\ &= \sup_{||x||_X\le 1,\ ||y^*||_{Y^*}\le 1} |\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| = ||A||_{L(X,Y)}\end{aligned}$$

gemäss Satz 4.2.2. □

Beispiel 6.1.1. *Seien $1 < p, q < \infty$ konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte $X = Y = L^p(\Omega)$ mit Dualraum $X^* = Y^* = L^q(\Omega)$. Sei*

$$A = \Delta \colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega).$$

Dann gilt $D_{A^*} \supset C_0^\infty(\Omega)$, da für alle $g \in C_0^\infty(\Omega)$ die Abbildung

$$l_g(\Delta f) = \int_\Omega g \Delta f \, d\mu = \int_\Omega \Delta g f \, d\mu = l_{\Delta g}(f)$$

mit

$$|l_{\Delta g}(f)| \leq ||\Delta g||_{L^q} ||f||_{L^p}, \ \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

sich stetig auf $L^p(\Omega)$ fortsetzen lässt, und

$$A^* g = \Delta g, \ \forall g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Satz 6.1.2. *Sei $A \colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert. Dann folgt*

i) $A^* \colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ ist abgeschlossen.

ii) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

Beweis: i) Betrachte $(y_k^*)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{A^*}$ mit

$$y_k^* \to y^* \text{ in } Y^*, \ x_k^* := A^* y_k^* \to x^* \text{ in } X^* \ (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $x \in D_A$:

$$\begin{aligned} \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} &= \lim_{k \to \infty} \langle y_k^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} \\ &= \lim_{k \to \infty} \langle A^* y_k^*, x \rangle_{X^* \times X} = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}. \end{aligned}$$

Also ist $y^* \in D_{A^*}$ mit $A^* y^* = x^*$; das heisst, A^* ist abgeschlossen.

ii) Sei $A \subset B$; das heisst $D_A \subset D_B$, $B_{|_{D(A)}} = A$. Sei $y^* \in D_{B^*}$. Dann gilt für alle $x \in D_A \subset D_B$

$$\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} = \langle y^*, Bx \rangle_{Y^* \times Y} = \langle B^* y^*, x \rangle_{X^* \times X};$$

das heisst $y^* \in D_{A^*}$, $A^* y^* = B^* y^*$. □

6.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die Auflösbarkeit der Gleichung

$$Ax = y \tag{6.2.1}$$

zu vorgegebenem y aufgrund der Eigenschaften von A^* entscheiden.

Satz 6.2.1. *(Banach : Closed range theorem) Seien X, Y Banach-Räume, der lineare Operator $A \colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert und abgeschlossen, mit dualem Operator A^*. Dann sind äquivalent:*

i) $im(A)$ ist abgeschlossen in Y;

ii) $im(A^*)$ ist abgeschlossen in X^*;

iii) $im(A) = \ker(A^*)^\perp = \{y \in Y; \ \langle y^*, y \rangle_{Y^* \times Y} = 0, \ \forall y^* \in \ker(A^*)\}$;

iv) $im(A^*) = \ker(A)^\perp = \{x^* \in X^*; \ \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = 0, \ \forall x \in \ker(A)\}$.

Wir beweisen nur die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ iii). Der vollständige Beweis ist recht aufwendig und anspruchsvoll. So beweist Werner den Satz nur für beschränkte Operatoren und überlässt es in Aufgabe VII.5.19 dem Leser, die Details für den allgemeinen Fall zu ergänzen. Auch der Beweis von Kato gilt nur im Fall beschränkter Operatoren. (Die von Kato durchgeführte Reduktion auf diesen Fall enthält einen Fehler.) Einen ausführlichen Beweis für den allgemeinen Fall findet man jedoch bei Brezis.

Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 6.2.1. *i) Sei $M \subset X$. Dann ist $M^\perp \subset X^*$ abgeschlossen (sogar schwach* folgenabgeschlossen).*

ii) Sei $L \subset X^*$. Dann ist $L^\perp \subset X$ abgeschlossen (sogar schwach folgenabgeschlossen).

Beweis: ii) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\perp$ mit $x_k \stackrel{w}{\to} x \in X$ $(k \to \infty)$. Für beliebiges $x^* \in L$ erhalten wir

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = \lim_{k\to\infty} \langle x^*, x_k\rangle_{X^*\times X} = 0;$$

das heisst, $x \in L^\perp$.

i) analog. □

Beweis von Satz 6.2.1:

iii) $\Rightarrow$ i) folgt unmittelbar aus Lemma 6.2.1.

i) $\Rightarrow$ iii) Aus Bemerkung 6.1.1 folgt unmittelbar die Inklusion $im(A) \subset \ker(A^*)^\perp$. Die umgekehrte Inklusion beweisen wir indirekt. Sei $y \in \ker(A^*)^\perp \setminus im(A)$. Da $im(A)$ nach Voraussetzung abgeschlossen, gibt es $y^* \in Y^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} \neq 0$ und $y^*_{|im(A)} = 0$. Letztere Bedingung besagt, dass

$$\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} = 0,\ \forall x \in D_A.$$

Es folgt $y^* \in D_{A^*}$ und $A^*y^* = 0$; also $y^* \in \ker(A^*)$. Da $y \in \ker(A^*)^\perp$, erhalten wir $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} = 0$ und somit den gewünschten Widerspruch. □

Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren $A\colon D_A \subset X \to Y$ mit abgeschlossenem Bild ist die Gleichung (6.2.1) somit zu vorgegebenem $y \in Y$ genau dann durch ein $x \in D_A$ auflösbar, wenn alle linearen Funktionale im Kern von A^* auf y verschwinden. Wir sagen dann, die Gleichung (6.2.1) **ist "normal" lösbar**.

Satz 6.2.2. *Für $A\colon D_A \subset X \to Y$ wie in Satz 6.2.1 sind äquivalent:*

i) A ist surjektiv;

ii) A^* ist injektiv, $im(A^*)$ ist abgeschlossen;

iii) $\exists c_0 > 0\, \forall y^* \in D_{A^*}\colon c_0||y^*||_{Y^*} \le ||A^*y^*||_{X^*}$.

Beweis: i) $\Leftrightarrow$ ii) folgt unmittelbar aus Satz 6.2.1.

ii) $\Rightarrow$ iii) A^* ist abgeschlossener Operator $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to im(A^*)$, wobei $im(A^*)$ als abgeschlossener Unterraum eines Banach-Raums ebenfalls ein Banach-Raum ist. Die Behauptung folgt somit aus Satz 3.3.2.

iii) $\Rightarrow$ ii) Offenbar ist A^* mit iii) injektiv. Sei $x_k^* = A^* y_k^*$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in $im(A^*)$ mit $x_k^* \to x^*$ $(k \to \infty)$. Wegen iii) ist dann auch $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Sei $y^* = \lim_{k\to\infty} y_k^*$. Da A^* abgeschlossen, folgt $y^* \in D_{A^*}, x^* = A^* y^*$; das heisst, $im(A^*)$ ist abgeschlossen. $\square$

Wann ist das Bild eines Operators abgeschlossen? Eine wichtige Klasse sind die sogenannten **Fredholm Operatoren** $A = id - T$ auf einem Banach-Raum X, wobei T kompakt.

Definition 6.2.1. *Ein Operator $T \in L(X)$ heisst* **kompakt**, *falls $\overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt ist.*

Lemma 6.2.2. *Sei $T \in L(X)$ kompakt. Falls $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$, so folgt $Tx_k \to Tx$ $(k \to \infty)$.*

Beweis: Nach Satz 4.6.1 ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da T nach Annahme kompakt, ist der Abschluss der Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kompakt. Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $y_k = Tx_k \to y$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Zu $l \in \mathbb{N}$ wähle

$$z_l = \sum_{k\geq l,\ k\in\Lambda} a_{kl} x_k \in \overline{\mathrm{conv}\{x_k;\ k \geq l,\ k \in \Lambda\}},\ 0 \leq a_{kl} \leq 1, \quad \sum_{k\geq l,\ k\in\Lambda} a_{kl} = 1,$$

gemäss Satz 4.6.3 mit

$$z_l = \sum_{k\geq l,\ k\in\Lambda} a_{kl} x_k \to x\ (l \to \infty).$$

Es folgt

$$Tz_l = \sum_{k\geq l} a_{kl} y_k \to y = Tx\ (l \to \infty).$$

Aus der Eindeutigkeit des Häufungspunkts $y = Tx$ folgt die Konvergenz der ganzen Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

Satz 6.2.3. *Sei X ein Banach-Raum, $T \in L(X)$ kompakt. Dann ist im $(id-T)$ abgeschlossen.*

Beweis: Setze $M = \ker(id - T)$. Da $\overline{B_1(0;M)} = \overline{T(B_1(0,M))} \subset \overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt, ist M endlich-dimensional nach Satz 2.1.4.

Sei $L = \overline{L}$ ein topologisches Komplement von M. Setze

$$Sx = x - Tx, x \in L.$$

Dann ist S injektiv, $im(S) = im(id - T)$.

Behauptung 1: $\exists r > 0\ \forall x \in L\colon r||x||_X \leq ||Sx||_X$.

Beweis: (indirekt) Andernfalls gibt es $x_k \in L$ mit

$$k||Sx_k||_X \leq ||x_k||_X = 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt für eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$:

$$Sx_k = x_k - Tx_k \to 0,\ Tx_k \to x_0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda);$$

das heisst,

$$x_k \to x_0 \in L \ (k \to \infty; \ k \in \Lambda),$$

und $Sx_0 = 0, ||x_0||_X = 1$. Der Widerspruch ergibt die Behauptung.

Sei $y_k = Sx_k \to y \ (k \to \infty)$, $x_k \in L$. Mit Behauptung 1 folgt, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in L. Da L abgeschlossen ist, existiert $x = \lim_{k\in\mathbb{N}} x_k \in L$ mit $y = Sx$; das heisst $im(S) = im(id - T)$ ist abgeschlossen. □

Beispiel 6.2.1. *Kompakte Operatoren erhält man oft in der Form von Integraloperatoren.*

6.3 Kompaktheit

Der folgende Satz gibt ein klassisches Kriterium für Folgenkompaktheit im Raum der stetigen Funktionen auf einem beschränkten Gebiet im $\mathbb{R}^n$.

Satz 6.3.1. *(Arzéla-Ascoli) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, \mathcal{F} \subset C^0(\overline{\Omega})$. Es sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist relativ folgenkompakt;

ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig, das heisst

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{C^0} < \infty$$

und

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \Omega \forall f \in \mathcal{F} : \\ &|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Übung.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, und sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ dicht in $\overline{\Omega}$. Da $\mathcal{F}$ beschränkt, gibt es Teilfolgen $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$ mit

$$f_k(x_l) \to a_l =: f(x_l) \quad (k \to \infty, k \in \Lambda_l).$$

Nach Auswahl einer Diagonalfolge Λ erhalten wir

$$f_k(x_l) \to f(x_l) \quad (k \to \infty, k \in \Lambda) \tag{6.3.2}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1: f ist gleichmässig stetig und lässt sich daher fortsetzen zu einer Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Für $x_l, x_m \in \Omega$ mit $|x_l - x_m| < \delta$ schätze ab

$$\begin{aligned} |f(x_l) - f(x_m)| &\le |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f_k(x_m)| + |f_k(x_m) - f(x_m)| \\ &\le \varepsilon + |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f(x_m) - f_k(x_m)|, \end{aligned}$$

wobei $k \in \Lambda$ beliebig. Nach Grenzübergang $k \to \infty, k \in \Lambda$, folgt mit (6.3.2) die Abschätzung

$$|f(x_l) - f(x_m)| \le \varepsilon,$$

wie gewünscht. □

Behauptung 2: $f_k \to f$ in $C^0(\overline{\Omega})$ für $k \to \infty, k \in \Lambda$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dazu gemäss (6.3.1) gewählt. Da $\overline{\Omega}$ kompakt, überdecken endlich viele Bälle $B_\delta(x_l), 1 \leq l \leq L$, die Menge $\overline{\Omega}$. Wähle k_0 gemäss (6.3.2), so dass für $k \geq k_0$ und $1 \leq l \leq L$ gilt

$$|f_k(x_l) - f(x_l)| < \varepsilon.$$

Sei $x \in \Omega$ beliebig. Wähle $1 \leq l \leq L$ mit $x \in B_\delta(x_l)$ und schätze ab

$$\begin{aligned}|f_k(x) - f(x)| &\leq |f_k(x) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x)| \\ &< 3\varepsilon \text{ für } k \geq k_0.\end{aligned}$$

□

Ein analoges Kriterium gilt auch in den Funktionenräumen $L^p(\Omega)$.

Satz 6.3.2. *(Fréchet-Kolmogorov). Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, 1 \leq p < \infty, \mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$. Es sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist relativ folgenkompakt;

ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und "gleichgradig stetig in L^p", das heisst

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f - \tau_h f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 (h \to 0). \tag{6.3.3}$$

Hierbei setzen wir $f \in \mathcal{F}$ durch $f = 0$ ausserhalb Ω zu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fort.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) $\overline{\mathcal{F}}$ ist kompakt, also auch beschränkt. Zum Beweis von (6.3.3) sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Endlich viele Bälle $B_\varepsilon(f_k), 1 \leq k \leq K$, mit $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ überdecken $\overline{\mathcal{F}}$. Wähle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \forall k \in \{1, \ldots, K\} \colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)|^p < \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}^n(\mathrm{supp}(f_k))}.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ folgt für $1 \leq k \leq K$:

$$||f_k - \tau_h f_k||^p_{L^p} \leq ||f_k - \tau_h f_k||^p_{L^\infty} \int_{\mathrm{supp}(f_k)} dx < \varepsilon.$$

Sei nun $f \in \mathcal{F}$ beliebig, $1 \leq k \leq K$ so gewählt, dass $f \in B_\varepsilon(f_k)$.

Es folgt für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned}||f - \tau_h f||_{L^p} &\leq ||f - f_k||_{L^p} + ||f_k - \tau_h f_k||_{L^p} + ||\tau_h (f - f_k)||_{L^p} \\ &= 2||f - f_k||_{L^p} + ||f_k - \tau_h f_k||_{L^p} < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

□

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(\rho_\delta)_{\delta > 0}$ eine regularisierende Folge. Setze $f_\delta = \rho_\delta * f$ für $f \in \mathcal{F}.(OBdA \rho_\delta \in C_0^\infty(B_\delta(0).)$

Behauptung 1: Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gemäss (6.3.3) gewählt. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}$ die Abschätzung $||f - f_\delta||_{L^p} < \varepsilon$.

Beweis: Schreibe

$$(f_\delta - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)(f(x - y) - f(x))\, dy.$$

Schätze ab mit der Dreiecks-Ungleichung

$$||f_\delta - f||_{L^p} \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)||f - \tau_y f||_{L^p}\, dy < \varepsilon,$$

da

$$\sup_{f\in\mathcal{F},|y|<\delta} ||f - \tau_y f||_{L^p} < \varepsilon, \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y)\, dy = 1.$$

□

Behauptung 2: Für festes $\delta > 0$ ist $(f_\delta)_{f\in\mathcal{F}} \subset C^0(\overline{\Omega})$ beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis: Schätze ab

$$|f_\delta(x)| \le \sup_y \rho_\delta(y) \int_{B_\delta(0)} |f(x-y)|\, dy \le C_\delta ||f||_{L^p} \le C$$

mit einer von $x \in \Omega$ und $f \in \mathcal{F}$ unabhängigen Konstanten C. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}|f_\delta(x) - f_\delta(z)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\delta(x-y) - \rho_\delta(z-y))f(y)\, dy| \\ &\le \sup_y |\rho_\delta(x-y) - \rho_\delta(z-y)|||f||_{L^p} \le C_\delta|x-z|||f||_{L^p}.\end{aligned}$$

□

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Für $\varepsilon_l = 1/l$ mit zugehörigem $\delta_l > 0$ wähle Teilfolgen $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$ gemäss Satz 6.3.1 und Behauptung 2 so dass

$$||f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}||_{L^p} \le \mathcal{L}^n(\Omega)||f_{k,\delta_l} - f_{j,\delta_l}||_{C^0} < \varepsilon_l$$

für $j,k \ge k_0(l), j,k \in \Lambda_., l \in \mathbb{N}$. $OBdA k_0(l+1) > k_0(l)$.

Sei Λ die Diagonalfolge

$$\Lambda = \{k_0(l); l \in \mathbb{N}\}.$$

Es folgt für $j,k \in \Lambda$ mit Behauptung 1:

$$\begin{aligned}||f_j - f_k||_{L^p} &\le ||f_j - f_{j,\delta_l}||_{L^p} + ||f_{j,\delta_l} - f_{k,\delta_l}||_{L^p} \\ &+ ||f_{k,\delta_l} - f_k||_{L^p} < 3\varepsilon_l,\end{aligned}$$

falls $j,k \ge k_0(l)$; das heisst $(f_k)_{k\in\Lambda}$ ist Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. □

6.4 Adjungierter Operator im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit kanonischem Isomorphismus $\mathcal{I}\colon H \to H^*$, wobei

$$\langle y^*, x\rangle_{H^*\times H} = (\mathcal{I}^{-1}y^*, x)_H, \forall x \in H, y^* \in H^*. \quad (6.4.1)$$

Sei weiter $A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert mit dualem Operator $A^*\colon D_{A^*} \subset H^* \to H^*$.

Definition 6.4.1. *Der zu A* **adjungierte Operator** $A^T \colon D_{A^T} \subset H \to H$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^T} = \{y \in H; l_y \colon D_A \ni x \mapsto (y, Ax)_H \text{ ist stetig } \}$$

und $A^T y = \mathcal{I}^{-1} l_y$ für alle $y \in D_{A^T}$; das heisst

$$(A^T y, x)_H = l_y(x) = (y, Ax)_H, \ \forall x \in D_A, \, y \in D_{A^T}. \tag{6.4.2}$$

Bemerkung 6.4.1. *Offenbar hängen A^T und A^* wie folgt zusammen:*
i) $y^* \in D_{A^*} \Leftrightarrow y = \mathcal{I}^{-1} y^* \in D_{A^T}$, und weiter
ii) $A^T \mathcal{I}^{-1} y^* = \mathcal{I}^{-1}(A^* y^*), \ \forall y^* \in D_{A^*}$;
das heisst,

$$A^T = \mathcal{I}^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{I}. \tag{6.4.3}$$

Beispiel 6.4.1. *Sei $H = \mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \ \forall x = (x_1, \ldots, x_n), \, y = (y_1, \ldots, y_n),$$

und sei $A \in L(H)$ gegeben mit

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \, 1 \le i \le n;$$

das heisst, A hat die Matrixdarstellung

$$a = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$(y, Ax) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i x_j = (A^T y, x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

mit

$$(A^T y)_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i, \, 1 \le j \le n,$$

und A^T hat die Matrixdarstellung

$$a^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notation: Im weiteren schreiben wir – im Einklang mit der Lehrbuchliteratur – anstelle von A^T wieder A^*, wobei wir H und H^* implizit mittels $\mathcal{I}$ identifizieren. Die Gleichung, welche A^* auf einem Hilbert-Raum charakterisiert, ist also stets (6.4.2) – mit A^* anstelle von A^T.

Definition 6.4.2. *i) Ein Operator* $A\colon D_A \subset H \to H$ *heisst* **symmetrisch** *, falls* $A \subset A^*$*, das heisst, falls* $D_A \subset D_{A^*}$ *und falls gilt*

$$(Ay, x)_H = (y, Ax)_H, \ \forall x, y \in D_A.$$

ii) Ein Operator $A\colon D_A \subset H \to H$ *heisst* **selbstadjungiert** *, falls* $A = A^*$*, das heisst, falls A symmetrisch ist mit* $D_A = D_{A^*}$*.*

Bemerkung 6.4.2. *Ein symmetrischer Operator wird auch als* **formal selbstadjungiert** *bezeichnet.*

Beispiel 6.4.2. *i) Sei* $A \in L(H)$ *symmetrisch. Dann ist A selbstadjungiert, da mit* $H = D_A \subset D_{A^*} \subset H$ *notwendig* $D_A = D_{A^*} = H$*.*

ii) Sei $T \in L(H)$ *selbstadjungiert. Dann ist* $id - T \in L(H)$ *symmetrisch und nach i) selbstadjungiert,*

Beispiel 6.4.3. *Wir betrachten die Erweiterungen* A_1*,* A_2*,* A_3 *des Laplace-Operators* $A_\infty\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$*,* $A_\infty u = \Delta u$ *für* $u \in C_0^\infty(\Omega)$*, auf einem glatt berandeten Gebiet* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$*, wobei*

$$\begin{aligned} D_{A_1} &= C^2(\overline{\Omega}), \\ D_{A_2} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\, u = 0 \ \textit{auf}\ \partial\Omega\}, \\ D_{A_3} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\, u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n} \ \textit{auf}\ \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $A_\infty \subsetneqq A_3 \subsetneqq A_2 \subsetneqq A_1$*, nach Satz 6.1.2 also*

$$A_1^* \subset A_2^* \subset A_3^* \subset A_\infty^*.$$

Weiter gilt nach partieller Integration

$$(v, A_i u)_{L^2} = \int_\Omega v \Delta u \, d\mu = \int_\Omega \Delta v \cdot u \, d\mu = (A_i v, u)_{L^2} \tag{6.4.4}$$

für alle $u, v \in D_{A_i}$*, falls* $i = 2, 3$ *oder* $i = \infty$*; das heisst,* A_2, A_3 *und* A_∞ *sind symmetrisch.*

Zudem gilt (6.4.4) *auch für* $u \in D_{A_3}$*,* $v \in D_{A_1}$*; das heisst,*

$$D_{A_1} \subset D_{A_3^*}, \ A_1 \subset A_3^*.$$

Somit ist $A_3^* \supset A_1 \supsetneqq A_3$ *eine echte Erweiterung von* A_3*.*

Bemerkung 6.4.3. *Eine selbstadjungierte Erweiterung des Laplace-Operators erhalten wir im Sobolev-Raum* $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$*; vgl. Funktionalanalysis II.*

6.5 Spektrum und Resolvente

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$, $A\colon D_A \subset X \to X$ linear.

Definition 6.5.1. *Die* **Resolventenmenge** *von A ist*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda \cdot id - A)\colon D_A \to X \ \textit{ist bijektiv mit}\ (\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)\}.$$

Bemerkung 6.5.1. *i) Falls $\rho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen.*

ii) Ist A abgeschlossen, $\lambda \cdot id - A$ bijektiv, so folgt $\lambda \in \rho(A)$, da $(\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)$ gemäss Satz 3.3.2.

iii) Statt $\lambda \cdot id - A$ schreiben wir der Einfachheit halber im folgenden auch $\lambda - A$, sowie $1 = id$.

Beweis: i) Sei $\lambda \in \rho(A)$, also $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$. Dann ist $(\lambda - A)^{-1}$ abgeschlossen; das heisst, die Menge

$$M = \{(x, y) \in X \times X;\ x = (\lambda - A)^{-1} y,\ y \in X\}$$

ist abgeschlossen. Jedoch gilt offenbar

$$M = \Gamma_{(\lambda - A)} = \{(x, \lambda x - Ax);\ x \in D_A\},$$

und die Abgeschlossenheit von M impliziert diejenige von A. □

Definition 6.5.2. *Die* **Resolvente** *von A ist die Abbildung $R\colon \rho(A) \to L(X)$ mit*

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R_\lambda = (\lambda - A)^{-1} \in L(X).$$

Satz 6.5.1. *Sei $A\colon D_A \subset X \to X$, $z_0 \in \rho(A)$. Dann enthält $\rho(A)$ die offene Kreisscheibe*

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| ||(z_0 - A)^{-1}||_{L(X)} < 1\}.$$

Insbesondere ist $\rho(A)$ offen, $\sigma(A)$ abgeschlossen und

$$||R_z||_{L(X)} \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))},\ \forall z \in \rho(A).$$

Weiter ist die Abbildung $z \mapsto R_z \in L(X)$ stetig in $\rho(A)$.

Beweis: Schreibe

$$(z - A) = (z - z_0) + (z_0 - A) = (1 + (z - z_0) R_{z_0})(z_0 - A).$$

Falls $z \in D$, so ist $1 + (z - z_0) R_{z_0}$ gemäss Satz 2.2.7 invertierbar mit

$$(1 + (z - z_0) R_{z_0})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (z_0 - z)^n R_{z_0}^n,$$

also auch

$$R_z = (z - A)^{-1} = R_{z_0} (1 + (z - z_0) R_{z_0})^{-1} \in L(X);$$

vergleiche Satz 2.2.8.

Weiter folgt mit $1 + (z - z_0) R_{z_0} \to 1$ in $L(X)$ $(z \to z_0)$ offenbar auch

$$||R_z - R_{z_0}||_{L(X)} = ||R_{z_0}((1 + (z - z_0) R_{z_0})^{-1} - 1)||_{L(X)} \to 0 \quad (z \to z_0).$$

□

Satz 6.5.2. *Falls $\lambda, \mu \in \rho(A)$, so gilt:*

i) $R_\lambda A \subset A R_\lambda = \lambda R_\lambda - id \in L(X)$;

ii) $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$;

iii) $R_\lambda \cdot R_\mu = R_\mu \cdot R_\lambda$.

Beweis: Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$\lambda R_\lambda - R_\lambda A = R_\lambda(\lambda - A) = id_{D_A} \subset id_X = (\lambda - A)R_\lambda = \lambda R_\lambda - AR_\lambda.$$

Insbesondere erhalten wir i) aus der Darstellung

$$R_\lambda A = \lambda R_\lambda - id_{D_A} \subset \lambda R_\lambda - id_X = AR_\lambda.$$

Weiter lesen wir ab

$$A(R_\mu - R_\lambda) = \mu R_\mu - \lambda R_\lambda,$$

also

$$(A - \mu)(R_\mu - R_\lambda) = (\mu - \lambda)R_\lambda,$$

und ii) folgt nach Komposition mit R_μ. Schliesslich erhalten wir iii) aus ii) durch Vertauschen von μ und λ. □

Bemerkung 6.5.2. *Mit Satz 6.5.1 und Satz 6.5.2 ii) folgt, dass R auf $\rho(A)$ komplex differenzierbar ist mit $\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2$.*

Definition 6.5.3. *Das* **Spektrum** *von A ist die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Insbesondere enthält $\sigma(A)$ die Menge*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda - A \text{ nicht injektiv}\}$$

der **Eigenwerte** *von A mit* **Eigenraum**

$$\ker(\lambda - A) = \{x \in D_A;\ Ax = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

$\sigma_p(A)$ heisst das **Punktspektrum** *von A. Die Menge*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A);\ \lambda - A \text{ injektiv},\ im(\lambda - A) \text{ dicht}\}$$

heisst **kontinuierliches Spektrum** *von A. Schliesslich bezeichnen wir mit*

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$$

das **Restspektrum** *von A.*

Beispiel 6.5.1. *Sei $X = \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen der Rangformel sind äquivalent:*

i) $\lambda \cdot id - A$ ist injektiv,

ii) $\lambda \cdot id - A$ ist surjektiv;

das heisst $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Nach Darstellung von A durch eine quadratische Matrix gilt überdies die Äquivalenz von i), ii) zu

iii) $\det(\lambda \cdot id - A) \neq 0$.

Somit enthält $\sigma_p(A)$ höchstens n Punkte, und $\rho(A)$ ist nicht leer und liegt sogar dicht in $\mathbb{C}$.

Ein analoges Resultat gilt in einem beliebigen Hilbertraum H für einen kompakten, selbstadjungierten Operator $T \in L(H)$.

Beispiel 6.5.2. *Sei H Hilbertraum, und sei $T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

(Vergleiche hierzu auch den Satz von Riesz-Schander.)

Beweis: Nach Satz 6.2.3 hat der Operator $id - T$ abgeschlossenes Bild und gemäss Beispiel 6.4.2 ii) ist $id - T$ selbstadjungiert. Mit Satz 6.2.1 folgt

$$im(id - T) = ker(id - T)^{\perp}.$$

Ersetzen wir T durch μT, wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so folgt nach Multiplikation mit $\lambda = \mu^{-1}$ die Identität

$$im(\lambda - T) = ker(\lambda - T)^{\perp},\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

□

Beispiel 6.5.3. *Für den Shift-Operator* $S\colon l^2 \to l^2$ *mit*

$$S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

gilt $0 \in \sigma(S)$, $0 \notin \sigma_p(S)$.

Beweis: S ist nicht surjektiv, offenbar aber injektiv. □

Satz 6.5.3. *Sei* $A \in L(X)$. *Dann ist* $\rho(A) \neq \emptyset \neq \sigma(A)$, *und es gilt:*

i) $|z| > r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow z \in \rho(A)$;

ii) $r_A = \sup_{z\in\sigma(A)} |z|$.

Beweis: i) Sei $|z| > r_A$. Setze $\tilde{A} = z^{-1}A \in L(X)$ mit $r_{\tilde{A}} < 1$. Aus Satz 2.2.7 folgt Invertierbarkeit von $id - \tilde{A}$ und

$$\begin{aligned} R_z = (z - A)^{-1} = z^{-1}(id - \tilde{A})^{-1} = z^{-1} \sum_{n\geq 0} \tilde{A}^n \\ = z^{-1} \cdot id + z^{-2}A + z^{-3}A^2 + \ldots \in L(X). \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

ii) Mit i) folgt zunächst $r_A \geq \sup_{z\in\sigma(A)\cup\{0\}} |z| =: \sigma_0$.

Behauptung 1: $r_A \leq \sigma_0$.

Beweis: Für $|z| > r_A$ entwickle R_z gemäss (6.5.1). Gliedweise Integration über $\partial B_r(0) \subset \mathbb{C}$, $r > r_A$, liefert

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n (z - A)^{-1}\, dz,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.5.2}$$

Offenbar ist (6.5.2) äquivalent zu

$$l(A^n x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n\, l(R_z x)\, dz,\ \forall n \in \mathbb{N}, x \in X, l \in X^*. \tag{6.5.3}$$

Mit Bemerkung 6.5.2 folgt, dass die Abbildung

$$\rho(A) \ni z \mapsto l(R_z x) \in \mathbb{C} \tag{6.5.4}$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ holomorph ist; somit gilt (6.5.3), also auch (6.5.2), für jedes $r > \sigma_0$.

Für $r > \sigma_0$ setze

$$M(r) = \max\{||R_z||_{L(X)};\ |z| = r\}.$$

Aus (6.5.2) folgt mit der Minkowski Ungleichung

$$||A^n||_{L(X)} \le r^{n+1} M(r),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

also

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le r.$$

Da $r > \sigma_0$ beliebig war, folgt $r_A \le \sigma_0$. □

Behauptung 2: $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Beweis: (indirekt) Nimm an, $\sigma(A) = \emptyset$, $\rho(A) = \mathbb{C}$. Wegen Bemerkung 6.5.2 ist dann die Funktion

$$f(z) = l(R_z x),\ z \in \mathbb{C}$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ analytisch, und (6.5.1) ergibt

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \le C \cdot \lim_{|z|\to\infty} |z|^{-1} ||(1 - z^{-1}A)^{-1}||_{L(X)} = 0.$$

Mit dem Satz von Liouville folgt $f(z) = 0,\ \forall z$. Da l und x beliebig gewählt waren, erhalten wir $R_z = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ im Widerspruch zu der Gleichung

$$(z - A)R_z x = x,\ \forall x \in X,\ z \in \rho(A).$$

□

6.6 Spektraltheorie im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ mit hermiteschem Skalarprodukt

$$(x, y)_H = \overline{(y, x)_H},\ \forall x, y \in H,$$

$A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert mit adjungiertem Operator A^*.

Welche Aussagen über das Spektrum von A kann man machen, falls A symmetrisch ist oder selbstadjungiert?

Satz 6.6.1. *Sei A symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte reell, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma_p(A)$ mit zugehörigem Eigenvektor $0 \neq x \in \ker(\lambda - A) \subset D_A$. Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda ||x||_H^2 &= (Ax, x)_H = (A^* x, x)_H \\ &= (x, Ax)_H = \overline{(Ax, x)_H} = \overline{\lambda} ||x||_H^2; \end{aligned}$$

also $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Gilt dieselbe Aussage für das gesamte Spektrum? – Betrachte dazu das folgende Beispiel. Zuvor benötigen wir noch eine Definition.

Beispiel 6.6.1. *Sei* $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$ *mit Skalarprodukt*

$$(f,g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\,dt,\ \ f,g \in H,$$

und sei $A_\infty = i\frac{d}{dt} \colon C_0^\infty([0,1];\mathbb{C}) \subset H \to H$. *Betrachte die folgenden Erweiterungen* A_k *von* A_∞, $k = 1,\dots,4$, *wobei*

$$\begin{aligned}
&D_{A_1} = H^1 = H^1([0,1];\mathbb{C}) := \{f \in L^2;\ f \textit{ ist absolut stetig mit } f' \in L^2\},\\
&D_{A_2} = \{f \in H^1;\ f(0) = f(1)\} \textit{ (periodische Randbedingung)},\\
&D_{A_3} = \{f \in H^1;\ f(0) = 0 = f(1)\} \textit{(Dirichlet Randbedingung)},\\
&D_{A_4} = \{f \in H^1;\ f(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

Natürlich setzen wir $A_k f = if'$ für $f \in D_{A_k}$. D_{A_1} ist dann offenbar der **maximale** Definitionsbereich, und es gilt $A_\infty \subsetneqq A_3 \subsetneqq A_2 \subsetneqq A_1$, $A_\infty \subsetneqq A_4$.

Behauptung 1: $A_3 \subset A_1^* \subset A_2^* = A_2 \subset A_3^*$; das heisst, A_3 ist symmetrisch, wegen $A_3 \subsetneqq A_2 \subset A_3^*$ aber nicht selbstadjungiert, und A_2 ist selbstadjungiert.

Beweis: Die Aussagen $A_3 \subset A_1^*$, $A_2 \subset A_2^*$ folgen analog zu Beispiel 6.4.3. Es genügt daher, $A_2^* \subset A_2$ zu zeigen; alles weitere folgt aus Satz 6.1.2.

Sei $f \in D_{A_2^*}$. Für $g \in C_0^\infty([0,1]) \subset D_{A_2}$ erhalten wir

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i\int_0^1 f\overline{g}'\,dt.$$

Da $f \in D_{A_2^*}$, können wir abschätzen

$$\sup\{\int_0^1 f\overline{g}'\,dt;\ g \in C_0^\infty, ||g||_{L^2} \le 1\} \le \sup_{||g||_{L^2}\le 1} (A_2^* f, g)_{L^2} = ||A_2^* f||_{L^2};$$

das heisst, $f \in H^1$ besitzt eine schwache Ableitung $f' \in L^2$, so dass

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = -i\int_0^1 f\overline{g}'\,dt = i\int_0^1 f'\overline{g}\,dt = (if', g)_{L^2}$$

für alle $g \in C_0^\infty([0,1])$, und $A_2^* f = if'$; vgl. Satz 7.3.2.

Für allgemeine $g \in D_{A_2}$ erhalten wir mit partieller Integration zusätzlich einen Randterm

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i\int_0^1 f\overline{g}'\,dt = i\int_0^1 f'\overline{g}\,dt - i(f\overline{g})|_{t=0}^1. \tag{6.6.1}$$

Da andererseits $A_2^* f = if'$, folgt jedoch auch in diesem Fall

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = i\int_0^1 f'\overline{g}\,dt;$$

mit (6.6.1) also

$$(f\overline{g})|_0^1 = (f(1) - f(0))\overline{g}(1) = 0,\ \forall g \in D_{A_2}.$$

Da $\overline{g}(1)$ beliebig ist, erhalten wir $f(0) = f(1)$, also $f \in D_{A_2}$. $\square$

Behauptung 2: Es gilt

i) $\sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) = \mathbb{C}$, $\rho(A_1) = \emptyset$;

ii) $\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = 2\pi\mathbb{Z}$, $\overline{\rho(A_2)} = \mathbb{C}$;

iii) $\sigma(A_3) = \mathbb{C}$, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$, $\rho(A_3) = \emptyset$;

iv) $\sigma(A_4) = \emptyset$, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$.

Beweis: i) Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f = e^{-i\lambda t} \in \ker(\lambda - A_1) \subset D_{A_1}$.

ii) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt analog, dass $f = e^{-2\pi ikt} \in D_{A_2} \cap \ker(2\pi k - A_2)$; das heisst, $2\pi\mathbb{Z} \subset \sigma_p(A_2) \subset \sigma(A_2)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $g \in L^2$ erhält man mit der Variation-der-Konstanten-Formel die Darstellung aller Lösungen f der Gleichung

$$\left(\lambda - i\frac{d}{dt}\right) f = \lambda f - if' = g. \tag{6.6.2}$$

Die allgemeine Lösung von (6.6.2) hat die Form

$$f(t) = ae^{-i\lambda t} + i\int_0^t e^{i\lambda(s-t)} g(s)\, ds,\ a \in \mathbb{C}. \tag{6.6.3}$$

Falls $f \in D_{A_2}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, so ist $a \in \mathbb{C}$ eindeutig durch die Bedingung $f(0) = f(1)$ bestimmt. Aus

$$f(0) = a = f(1) = ae^{-i\lambda} + i\int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s)\, ds; \tag{6.6.4}$$

folgt

$$a = (1 - e^{-i\lambda})^{-1} i \int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s)\, ds,$$

und wir erhalten $f \in L^2$ mit

$$||f||_{L^2} \leq |a| + ||g||_{L^2} \leq \left(\frac{1}{|1 - e^{-i\lambda}|} + 1\right) ||g||_{L^2}.$$

iii) Falls $A_3 f = if' = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so folgt $f(t) = ae^{-i\lambda t}$ und $a = 0$, falls $f \in D_{A_3}$; das heisst, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$.

Andererseits ist $\lambda - A_3$ für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ surjektiv. Für $g(s) = e^{-i\lambda s}$ folgt nämlich mit (6.6.3) und (6.6.4) für jede Lösung $f \in D_{A_3}$ von (6.6.2) zunächst $a = 0$ und

$$f(t) = ie^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} g(s)\, ds = ite^{-i\lambda t},$$

also $f(1) = ie^{-i\lambda} \neq 0$.

iv) Wie im Falle von A_3 erhalten wir aus (6.6.3) für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ die Darstellung

$$f(t) = ie^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} g(s)\, ds \in D_{A_4}$$

einer Lösung von (6.6.2); das heisst, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$. □

Symmetrische Operatoren können demnach durchaus imaginäre Spektralanteile besitzen, jedoch gilt:

Lemma 6.6.1. *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die Abschätzung*

$$||(z - A)u||_H \geq |Im(z)| \, ||u||_H, \; u \in D_A;$$

das heisst, für $z \notin \mathbb{R}$ ist $(z - A)$ stets injektiv. Falls $(z - A)$ zusätzlich surjektiv ist, so folgt $z \in \rho(A)$ und

$$||(z - A)^{-1}||_{L(H)} \leq \frac{1}{|Im(z)|}.$$

Beweis: Für $u \in D_A$ gilt wegen $A \subset A^*$

$$(u, Au)_H = (Au, u)_H = \overline{(u, Au)_H} \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für alle $u \in D_A$ die Abschätzung

$$|Im(z)| \, ||u||_H^2 = |Im(u, (z - A)u)_H| \leq |(u, (z - A)u)_H| \leq ||u||_H ||(z - A)u||_H,$$

wie gewünscht. □

Beispiel 6.6.1 illustriert sehr schön den folgenden Satz, welcher die selbstadjungierten Operatoren durch ihr Spektrum charakterisiert.

Satz 6.6.2. *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

i) $A = A^*$;

ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;

iii) $z - A$ ist surjektiv für je ein z mit $Im(z) > 0$ und eines mit $Im(z) < 0$.

Beweis: Wir zeigen iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii).

iii) $\Rightarrow$ ii): Sei $z_0 - A$ surjektiv, $Im(z_0) > 0$. Mit Lemma 6.6.1 folgt $z_0 \in \rho(A)$, und Satz 6.5.1 liefert zusammen mit Lemma 6.6.1

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < Im(z_0)\} \subset \rho(A).$$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C}; \; Im(z) > 0\}$ lässt sich iterativ durch derartige Kreisscheiben überdecken. Analog erhalten wir $\{z \in \mathbb{C}; \; Im(z) < 0\} \subset \rho(A)$.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $u \in D_{A^*}$. Da $\pm i \in \rho(A)$ nach Annahme, existiert $v \in D_A$ mit

$$(A^* - i)u = (A - i)v = (A^* - i)v,$$

letzteres wegen $A \subset A^*$. Es folgt $(u - v) \in \ker(A^* - i)$. Wähle nun $w \in D_A$ mit $(A + i)w = u - v$. Es folgt

$$||u - v||_H^2 = (u - v, (A + i)w)_H = ((A^* - i)(u - v), w)_H = 0;$$

das heisst, $u = v \in D_A$.

i) $\Rightarrow$ iii): Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Behauptung 1: $im(z-A)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $v_k = (z-A)u_k \to v$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ insbesondere symmetrisch ist, folgt mit Lemma 6.6.1 die Abschätzung

$$||u_k - u_l||_H \leq \frac{1}{|Im(z)|}||v_k - v_l|| \to 0 \ (k, l \to \infty);$$

das heisst, $u_k \to u$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ abgeschlossen ist, folgt $u \in D_A$, und $v = (z-A)u \in im(z-A)$. Der Raum $im(z-A)$ ist somit abgeschlossen.

Behauptung 2: $z - A$ ist surjektiv.

Beweis: Nach Behauptung 1 ist der Raum $M := im(z-A)$ abgeschlossen. Nimm an, $M \neq H$. Wähle $v \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$(v, (z-A)u)_H = 0, \ \forall u \in D_A;$$

das heisst,

$$(v, Au)_H = \overline{z}(v, u)_H, \ \forall u \in D_A.$$

Die Abbildung $D_A \ni u \mapsto (v, Au)_H$ ist somit stetig, und $v \in D_{A^*} = D_A$ mit

$$Av = A^*v = \overline{z}v.$$

Mit Lemma 6.6.1 folgt jedoch

$$|Im(z)|||v||_H \leq ||(\overline{z} - A)v||_H = 0,$$

und wir erhalten $v = 0$ im Widerspruch zur Wahl von v. □

Teil II

Funktionalanalysis II

Kapitel 7

Sobolev-Räume

7.1 Funktionalanalytische Zugänge zum Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, glatt berandet, und seien $f, u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Gesucht: u mit

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{7.1.1}$$

$$u = u_0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \tag{7.1.2}$$

Bemerkung 7.1.1. *Ersetze u durch $v = u - u_0$. Dann geht* (7.1.1),(7.1.2) *über in*

$$\begin{aligned} -\Delta v = -\Delta u + \Delta u_0 = f + \Delta u_0 =: g \qquad & \textit{in } \Omega \\ v = 0 \qquad & \textit{auf } \Omega \textit{ (lineare Randbedingung)} \end{aligned}$$

Im Folgenden nehmen wir daher stets an $u_0 \equiv 0$.

2 mögliche Lösungsansätze:
- via Banach's closed range theorem., Satz 6.2.1
- via Rieszschen Darstellungssatz, Satz 4.3.2

1. Strategie: Banach's closed range theorem

Deute (7.1.1),(7.1.2) als Gleichung $Au = f$, $A : D_A \subset X \to X$ mit einem geeigneten Funktionenraum $X \supset C^\infty(\overline{\Omega})$ und $C_0^\infty(\Omega) \subset D_A \subset X$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $u \in D_A$ und $Au = -\Delta u$ für $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Idealfall: $X = H$ ein Hilbertraum, A selbstadjungiert.

Wähle $X = L^2(\Omega), D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u|_\Omega = 0\}$ und $Au = -\Delta u$ für $u \in D_A$.

A ist symmetrisch: Für $u, v \in D_A$ gilt

$$(Au, v)_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u) v \; dx = \int_\Omega u(-\Delta v) \; dx = (u, Av)_{L^2}$$

Nach Satz 3.4.2 ist A abschliessbar mit $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A}$ und

$$\begin{aligned} D_{\overline{A}} =& \{u \in L^2(\Omega); \\ & \exists (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_A, u_k \to u,\ Au_k \to f =: \overline{A}u\ (k\to\infty) \text{ in } L^2(\Omega)\} \end{aligned}$$

Mit A ist auch $\overline{A}$ symmetrisch: Seien $u, v \in D_{\overline{A}}$ mit

$$\begin{aligned} (u_k) \subset D_A : u_k \to u,\ -\Delta u_k &= f_k \to f &&= \overline{A}u \text{ in } L^2\ (k\to\infty), \\ (v_l) \subset D_A : v_l \to v,\ -\Delta v_l &= g_l \to g &&= \overline{A}v \text{ in } L^2\ (l\to\infty). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$(\overline{A}u, v)_{L^2} = \lim_{k,l\to\infty} (\overbrace{Au_k}^{=-\Delta u_k}, v_l)_{L^2} = \lim_{k,l\to\infty} (u_k, Av_l)_{L^2} = (u, \overline{A}v)_{L^2}.$$

Lemma 7.1.1. *Sei $v \in L^2(\Omega)$ und es gelte für alle $u \in D_{\overline{A}}$ die Abschätzung*

$$|(v, \overline{A}u)_{L^2}| = |\int_\Omega v\overline{A}u\ dx| \le C \cdot \|u\|_{L^2}$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C. Dann folgt $v \in D_{\overline{A}}$, d.h. $\overline{A}$ ist selbstadjungiert.

Beweis. Folgt später (Abschnitt 9.4). □

Bemerkung 7.1.2.

$$\begin{aligned} D_{\overline{A}^*} =& \{v \in L^2(\Omega); \\ & D_{\overline{A}} \ni u \mapsto (v, \overline{A}u)_{L^2} \textit{ kann stetig auf } L^2(\Omega) \textit{ erweitert werden}\} \\ & \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} :\ |(v, \overline{A}u)_{L^2}| \le C \cdot \|u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Satz 7.1.1. *i) $im(\overline{A})$ ist abgeschlossen*
ii) $ker(\overline{A}) = \{0\}$

Folge: Mit Satz 6.2.1 folgt die Existenz einer Lösung $u \in D_{\overline{A}}$ der Gleichung $\overline{A}u = f$ für jedes $f \in L^2(\Omega)$, eine verallgemeinerte Lösung von (7.1.1),(7.1.2).

Lemma 7.1.2 (Poincaré)**.** *Für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \le L^2 \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx,$$

falls $\Omega \subset]0, L[\ \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Beweis. Für $x = (x_1, x') \in \Omega$ schätze ab

$$\begin{aligned} |u(x_1, x')|^2 = |\int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(s, x')\ ds|^2 &\le |\int_0^L |\frac{\partial u}{\partial x_1}(s, x')|\ ds|^2 \\ &\le L \cdot \int_0^L |\nabla u(s, x')|^2\ ds. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_\Omega |u|^2\ dx \le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\int_0^L |u(x_1,x')|^2\ dx_1}_{\le L^2\cdot\int_0^L |\nabla u(s,x')|^2\ ds}\ dx' \le L^2 \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx.$$

□

Beweis von Satz 7.1.1. i) Seien $(u_k) \subset D_{\bar{A}}$, wobei

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\Omega);\ \exists (u_l) \subset D_A,\ u_l \to u,\ -\Delta u_l \to f = \bar{A}u \text{ in } L^2\},$$

mit $\bar{A}u_k =: f_k \to f$ in $L^2(\Omega)$ für $k \to \infty$.

OBdA $u_k \in D_A$ (sonst betrachte $(u_{k_l}) \subset D_A$ mit $u_{k_l} \to u_k$, $Au_{k_l} \to Au_k = f_k$ in L^2 $(l \to \infty)$ und betrachte $\widetilde{u_k} = u_{k_{l(k)}}$ für geeignetes $l(k)$).

Es folgt $u_k \in C^2(\bar{\Omega})$, $Au_k = -\Delta u_k \in C^0(\bar{\Omega})$, $u_k = 0$ auf $\partial\Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Also mit Lemma 7.1.2

$$\begin{aligned}\|u_k - u_l\|_{L^2}^2 &\le \underbrace{L^2}_{=:C} \cdot \|\nabla(u_k-u_l)\|_{L^2}^2 = C \cdot \int_\Omega |\nabla(u_k-u_l)|^2\ dx \\ &= C \cdot \int_\Omega \underbrace{|-\Delta(u_k-u_l)|}_{f_k - f_l}(u_k-u_l)\ dx \\ &\le C \cdot \|f_k - f_l\|_{L^2} \cdot \|u_k - u_l\|_{L^2}\,,\end{aligned}$$

wobei wir für die Partielle Integration die Gleichung

$$div(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \Delta v$$

und den Satz von Gauss angewendet haben.
Es folgt

$$\|u_k - u_l\|_{L^2} \le C \cdot \|f_k - f_l\|_{L^2} \to 0\ (k,l \to \infty).$$

Also ist $(u_k) \subset L^2(\Omega)$ Cauchy-Folge und $\exists u = \lim_{k\to\infty} u_k$. Mit $u_k \to u$, $Au_k = f_k \to f$ in L^2 folgt $u \in D_{\bar{A}}$, $f = \bar{A}u$, d.h. $im\overline{A}$ ist abgeschlossen.

ii) Sei $u \in D_{\bar{A}}$ mit $\bar{A}u = 0$. Wähle wie in i) $u_k \subset D_A$ mit $u_k \to u$ $(k \to \infty)$, $Au_k = -\Delta u_k \to 0$ in L^2. Mit Lemma 7.1.2 folgt

$$\|u_k\|_{L^2} \le C \cdot \|\nabla u_k\|_{L^2}^2 = C \cdot \int_\Omega (-\Delta u_k)u_k\ dx \le o(1) \cdot \|u_k\|_{L^2}\,,$$

mit $o(1) \to 0$ $(k \to \infty)$, also $u = \lim_{k\to\infty} u_k = 0 \in L^2(\Omega)$.

□

Zu $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ gibt es nach Satz 7.1.1 und Satz 6.2.1 genau ein $u \in D_{\bar{A}}$ mit $\bar{A}u = f$.

Fragen:

i) Ist u „glatt“, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$?

ii) Ist u eine klassische Lösung von (7.1.1),(7.1.2)?

iii) Beweis von Lemma 7.1.1?

2. Strategie zur Lösung

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{7.1.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{7.1.2}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine „Testfunktion“. Nach partieller Integration folgt aus (7.1.1)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \; dx = \int_\Omega f\varphi \; dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Setze

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx, \qquad \forall u \in C_0^\infty.$$

Wegen Lemma 7.1.2 gilt

$$\|u\|_{L^2} \leq C \cdot \|u\|_{H_0^1}, \; \forall u \in C_0^\infty,$$

also ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C_0^\infty(\Omega)$. Definiere

$$H_0^1(\Omega) = \|\cdot\|_{H_0^1} - clos(C_0^\infty).$$

Dann ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx, \; \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei für $u = \lim_{k\to\infty} u_k$ in $H_0^1(\Omega)$ mit $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ gelte $\nabla u := \lim_{k\to\infty} \nabla u_k$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Weiter lässt sich $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi \; dx$ stetig erweitern zu $l \in (H_0^1(\Omega))^*$.

Mit Satz 4.3.2 folgt

Satz 7.1.2. *Für alle $f \in L^2(\Omega)$ gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega fv \; dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.1.3}$$

Definition 7.1.1. *Ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit* (7.1.3) *heisst* **schwache Lösung der Klasse H_0^1 von** (7.1.1)**,** (7.1.2).

Fragen

i) $f \in C_0^\infty \Rightarrow u \in C_0^\infty$? $\to$ Regularitätstheorie

ii) $u \in C_0^\infty \Rightarrow$ (7.1.1), (7.1.2)?

7.2 Distributionsableitung, schwache Ableitung, Sobolev - Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definition 7.2.1. *i) Die lineare Abbildung*

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto -\int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx$$

definiert die **Distributionsableitung** $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$.
ii) Analog definiert für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *mit*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{ und } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

die Abbildung

$$C_0^\infty \ni \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx$$

die **Distributionsableitung** $D^\alpha u$.

Definition 7.2.2. *i) Die Funktion* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ **hat eine schwache Ableitung** $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *in* $L^p(\Omega)$, *falls* $g_i \in L^p(\Omega)$ *existiert mit*

$$\int_\Omega g_i \varphi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(„Die Distributionsableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \in L^p(\Omega)$*“)*
ii) Analog gilt für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *falls* $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ *existiert mit*

$$\int_\Omega g_\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx,$$

Beispiel 7.2.1. *i) Falls* $u \in C^k(\Omega)$, *so ist für* $|\alpha| \le k$ *die klassische Ableitung* $D^\alpha u$ *auch schwache Ableitung in* $L^\infty_{loc}(\Omega)$.
ii) Sei $\Omega = I =]-1, 1[$, $u(x) = max\{0, x\}$.

Beh. $u' = \chi_{]0,1[} \in L^\infty(I)$

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\int_I u\varphi' \, dx = -\int_0^1 x\varphi'(x) \, dx &= \underbrace{-(x\varphi(x))|_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \int_0^1 \varphi \, dx \\ &= \int_I \chi_{]0,1[} \, \varphi \, dx. \end{aligned}$$

□

iii) Sei $u = \chi_{]0,\infty[}$. *Dann hat* u *die Distributionsableitung* $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$-\int_{\mathbb{R}} u\varphi' \, dx = -\int_0^\infty \varphi' \, dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

$\square$

iv) Sei $u \in C_0^\infty([0,1])$ *die Cantor-Lebesgue-Funktion mit* $u' = 0$ *punktweise fast überall. Jedoch gilt*

$$\int_0^1 u\varphi_k' \, dx \to -1 \quad (k \to \infty),$$

falls $\varphi_k \in C_0^\infty(]0,1[$ *geeignet mit* $\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} \chi_{]0,1[}$, *also verschwindet die Distibutionsableitung* u' *nicht!*

v) Sei $v \in L^2(\Omega)$, *und es gelte*

$$|\int_\Omega v\Delta\varphi \, dx| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann definiert die Distribtutionsableitung

$$\Delta v : C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega v\Delta\varphi \, dx$$

ein Funktional $l \in (L^2(\Omega))^*$. *Nach Satz 4.3.2 gibt es* $f \in L^2(\Omega)$ *mit* $l(\varphi) = (f,\varphi)_{L^2}$, $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$, *insbesondere*

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = l(\varphi) = \int_\Omega v\Delta\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega);$$

d.h. $\Delta v = f \in L^2(\Omega)$, *vgl. Lemma 7.1.1.*

Definition 7.2.3. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $1 \leq p \leq \infty$. *Setze*

i) $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$ *mit*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}.$$

ii) $W_0^{1,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{1,p}} - clos(C_0^\infty(\Omega))$

iii) $W^{1,2}(\Omega) =: H^1(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega) =: H_0^1(\Omega)$

iv) Analog für $k \in \mathbb{N}$:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

mit

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{k,p}} - clos(C_0^\infty(\Omega)), \quad W_{(0)}^{k,2}(\Omega) = H_{(0)}^k(\Omega)$$

Bemerkung 7.2.1. *i) Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, so folgt mit Hölder*

$$W^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \le p \le q \le \infty.$$

ii) Weiter gilt für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ neu weiter die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ und $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_{L^p}$ für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Falls $u \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt analog zu Lemma 7.1.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p \, dx &\le \int_\Omega \Big(\int_0^L |\frac{\partial u}{\partial x_1}| \, dx_1 \Big)^p \, dx \\ &\le L \cdot L^{p-1} \int_\Omega \int_0^L |\nabla u|^p \, dx_1 \, dx' \\ &= L^p \cdot \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx.\end{aligned}$$

Folglich sind die Normen $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ und $\|u\|_{W_0^{1,p}}$ äquivalent.

Satz 7.2.1. *Der Raum $W^{1,p}(\Omega)$ ist*

i) vollständig, für $1 \le p \le \infty$

ii) separabel, für $1 \le p < \infty$

iii) reflexiv, für $1 < p < \infty$

Beweis. i) Sei $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Dann sind (u_k), $(\frac{\partial u}{\partial x_i})$ Cauchy-Folgen in $L^p(\Omega)$, $1 \le i \le n$. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existiert $u = \lim_{k\to\infty} u_k$, $g_i = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ in $L^p(\Omega)$.

Beh.1. $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_i \, \varphi \, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \, \varphi \, dx = - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \\ &= - \int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx.\end{aligned}$$

□

Es folgt $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

ii) Die Einbettung

$$i : W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$$

ist isometrisch. Nach Beispiel 5.2.1.iii) ist $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ separabel, nach Satz 5.2.1 daher auch $i(W^{1,p}(\Omega))$; da i isometrisch, also auch $W^{1,p}(\Omega)$.

iii) Nach i) ist $i(W^{1,p}(\Omega)) =: Y$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von $X := (L^p(\Omega))^{n+1}$. Für $1 < p < \infty$ ist X nach Beispiel 5.1.2.iii) reflexiv, nach Satz 5.1.3 dann auch Y, also auch $W^{1,p}(\Omega)$.

□

Bemerkung 7.2.2. *i) Insbesondere ist $H^1(\Omega)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt*

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega uv\ dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx, \qquad \forall u,v \in H^1(\Omega).$$

ii) Analog für beliebige $k \in \mathbb{N}$.

Fragen:

i) Entspricht die Distributionsableitung der punktweisen Ableitung?

ii) Was kann man über die Randwerte sagen?

Beispiel 7.2.2. *$u \in C([0,1])$ Cantor-Lebesgue Funktion ist fast überall differenzierbar mit $u'(x) = 0$ f.ü., aber die Distributionsableitung von $u \not\equiv 0$.*

7.3 Sobolev-Räume auf einem Intervall

Sei $I =]a,b[, -\infty \le a < b \le \infty$.

Satz 7.3.1. *i) Sei $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p \le \infty$. Dann existiert $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ mit $u = \tilde{u}$ f.ü. und für $x_0, x \in I$ gilt*

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t)\ dt.$$

Insbesondere ist $\tilde{u}$ absolut stetig und punktweise f.ü. differenzierbar mit $\tilde{u}'(x) = u'(x_0)$ für f.a. $x \in I$.
Bemerkung: *Im folgenden schreiben wir daher meist auch u statt $\tilde{u}$.*

ii) Sei $u \in C(I)$ absolut stetig. Dann gilt $u \in W^{1,1}_{loc}(I)$, und die f.ü. definierte Ableitung $u'(x)$ stimmt überein mit der schwachen Ableitung u'.
Falls $u, u' \in L^p(I)$, so ist $u \in W^{1,p}(I)$.

Lemma 7.3.1 (du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(I)$ mit*

$$\int_I f\varphi'\ dx = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Dann gilt $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 7.3.1. *Lemma 7.3.1 sagt aus, dass falls die Distributionsableitung von f verschwindet, f konstant sein muss.*

Beweis. i) Sei $v \in C_0^\infty(I)$ mit $\int_I v\ dx = 0$. Dann gilt $v = \varphi'$ für die Funktion

$$\varphi(x) = \int_a^x v(t)\ dt \ \in C_0^\infty(I).$$

ii) Sei $w \in C_0^\infty(I)$. Fixiere $\psi \in C_0^\infty(I)$ mit $\int_I \psi\ dx = 1$ und setze $v = w - c_0\ \psi$, wo $c_0 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$0 = \int_I v\ dx = \int_I w\ dx - c_0 \overbrace{\int_I \psi\ dx}^{=1};$$

d.h. $c_0 = \int_I w\ dx$. Nach Annahme und i) gilt

$$0 = \int_I f\ v\ dx = \int_I f\ w\ dx - c_0 \int_I f \cdot \psi\ dx = \int_I (f-c) w\ dx$$

mit $c = \int_I f\ \psi\ dx$. Da $w \in C_0^\infty(I)$ beliebig, folgt $f \equiv c$.

□

Lemma 7.3.2. *Sei $g \in L^1(I)$, $x_0 \in I$. Dann ist die Funktion*

$$v(x) = \int_{x_0}^x g(t)\ dt$$

absolut stetig und von der Klasse $W^{1,1}_{loc}(I)$ mit schwacher Ableitung $v' = g$.

Beweis. Absolute Stetigkeit von v folgt aus Sätzen der Analysis III. Wir zeigen

$$\int_I g\ \varphi\ dx = -\int_I v\ \varphi'\ dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_I v\ \varphi'\ dx &= \int_a^b \left(\int_{x_0}^x g(t)\ dt \right) \varphi'(x)\ dx \\
&= -\int_a^{x_0} \left(\int_x^{x_0} g(t)\ \varphi'(x)\ dt \right)\ dx + \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x g(t)\ \varphi'(x)\ dt \right)\ dx \\
&= -\int_a^{x_0} \left(\int_a^t g(t)\ \varphi'(x)\ dx \right)\ dt + \int_{x_0}^b \left(\int_t^b g(t)\ \varphi'(x)\ dx \right)\ dt \\
&= -\int_a^{x_0} g(t)\ \varphi(t)\ dt - \int_{x_0}^b g(t)\ \varphi(t)\ dt \\
&= -\int_a^b g(t)\ \varphi(t)\ dt.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 7.3.1. i) Sei $u \in W^{1,p}(I)$. Fixiere $x_0 \in I$. Setze

$$v(x) = \int_{x_0}^x u'(t)\ dt.$$

Nach Lemma 7.3.2 ist v absolut stetig und in $W^{1,1}_{loc}(I)$ mit schwacher Ableitung $v' = u' \in L^p(I)$. Setze $f = u - v \in L^1_{loc}(I)$ mit

$$\int_I f\ \varphi'\ dx = \int_I u\ \varphi'\ dx - \int_I v\ \varphi'\ dx = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Mit Lemma 7.3.1 folgt $f \equiv C$ f.ü., d.h. $u(x) = v(x) + C$ fast überall, wobei $C = u(x_0) - v(x_0) = u(x_0)$.

ii) Sei $u \in C(I)$ absolut stetig. Dann gilt nach Korollar III 5.3.1

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\ dt =: v(x)$$

mit der punktweise f.ü. definierten Ableitung $u' \in L^1(I)$. Nach Lemma 7.3.2 hat v (und damit u) die schwache Ableitung u'.

□

Satz 7.3.2. *Sei $1 < p \leq \infty$ und $u \in L^p(I)$. Es sind äquivalent:*
i) $u \in W^{1,p}(I)$,
ii) Es gibt ein C in $\mathbb{R}$ mit

$$|\int_I u\ \varphi'\ dx| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^q}, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty,\ \mathit{mit}\ q = \frac{p}{p-1},$$

iii) mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gilt für alle $I' \subset\subset I$ und $|h| < dist(I', \partial I)$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} \leq C \cdot |h|,$$

wobei $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

Bemerkung 7.3.2. *i) Der Beweis zeigt $C = \|\nabla u\|_{L^p}$ in ii), iii).*
ii) Die Funktion $u = \chi_{]0,1[}$ erfüllt ii) und iii), aber $u \notin W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$.
iii) Es gilt jedoch auch im Falle $p = 1$ die Aussage i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii). (Übung)
iv) Für $p = \infty$ liefert Satz 7.3.2 die Äquivalenz

$$u \in W^{1,\infty}(I) \Leftrightarrow u \text{ Lipschitz stetig.}$$

Beweis von Satz 7.3.2. „i) $\Rightarrow$ ii)“ Sei $u \in W^{1,p}(I)$, $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Dann gilt

$$|\int_I u\ \varphi'\ dx| = \left|\int_I u'\ \varphi\ dx\right| \leq \|u'\|_{L^p} \cdot \|\varphi\|_{L^q}.$$

„ii) $\Rightarrow$ i)“ Falls ii) gilt, so kann man

$$C_0^\infty(I) \ni \varphi \mapsto \int_I u\ \varphi'\ dx$$

stetig zu $l \in (L^q(I))^*$ erweitern. Da $1 < p$, also $q < \infty$, gibt es $g \in L^p(I)$ mit

$$l(\varphi) = \int_I g\ \varphi\ dx, \qquad \forall \varphi \in L^q(I);$$

insbesondere

$$\int_I u\ \varphi'\ dx = l(\varphi) = \int_I g\ \varphi\ dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$

d.h. $-g \in L^p(I)$ ist schwache Ableitung von u.

„i) $\Rightarrow$ iii)“ Sei $I' \subset\subset I$, $|h| < dist(I', \partial I)$. Nach Satz 7.3.1 gilt für alle $x \in I'$

$$\tau_h u(x) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)\ dt = h \cdot \int_0^1 u'(x+ht)\ dt,$$

also mit Minkowski

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} &= |h| \left\| \int_0^1 u'(\cdot + ht)\ dt \right\|_{L^p(I')} \\ &\leq |h| \cdot \int_0^1 \|u'(\cdot + ht)\|_{L^p(I')}\ dt \leq |h| \cdot \|u'\|_{L^p(I)}\,. \end{aligned}$$

„iii) $\Rightarrow$ ii)“ Sei $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Wähle $I' \subset\subset I$ mit *supp* $(\varphi) \subset I'$. Für $|h| < dist(I', \partial I)$ gilt

$$A := \int_I \underbrace{\big(u(x+h) - u(x)\big)}_{=\tau_h u - u \in L^p}\ \varphi(x)\ dx \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(I')} \cdot \|\varphi\|_{L^q(I')}$$

Andererseits gilt nach Substitution $y = x + h$

$$A = \int_I \big(u(y)\ \varphi(y-h) - u(y)\ \varphi(y)\big)\ dy = -\int_I u(y)\ \big(\varphi(y) - \varphi(y-h)\big)\ dy.$$

Nach Division durch $|h|$ und Grenzübergang $h \to 0$ folgt mit Annahme iii)

$$\int_I u\ \varphi'\ dx = \lim_{h\to 0} \Big|\int_I u(x)\ \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}\ dx\Big| \leq C\ \ \|\varphi\|_{L^q(I)}$$

mit einem von φ unabhängigen $C \in \mathbb{R}$. □

Satz 7.3.3. *Sei $I =]a,b[$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gibt es einen stetigen, linearen Fortsetzungsoperator $E : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ mit*

i) $(Eu)|_I = u$,

ii) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(I)}$,

iii) $\|(Eu)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)}$.

Bemerkung 7.3.3. *$C = C(I)$, $E = E(I)$ sind unabhängig von p.*

Beweis. a) Sei $I =]0,\infty[$. Für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$ setze

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x > 0 \\ u(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \text{sowie } g(x) = \begin{cases} u'(x), & x > 0 \\ -u'(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Dann sind v, $g \in L^p(\mathbb{R})$ mit

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}\,, \qquad \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \cdot \|u'\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}\,,$$

und offenbar gilt $v|_{\mathbb{R}_+} = u$.
Beh.1. *$g = v'$ als Distribution.*

Beweis. Nach Satz 7.3.1 gilt für fast alle $x > 0$

$$v(x) = u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\ dt = v(0) + \int_0^x g(s)\ ds,$$

sowie für $x < 0$

$$\begin{aligned} v(x) = u(-x) = u(0) + \int_0^{-x} u'(t)\ dt \\ \overset{(s=-t)}{=} u(0) + \int_0^x (-u'(-s))\ ds = v(0) + \int_0^x g(x)\ ds. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.3.1.ii) oder Lemma 7.3.2 folgt $g = v'$. □

b) Sei I beschränkt, OBdA $I =]0,1[$. Fixiere eine „Abschneidefunktion“ $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ und

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{4} \\ 0, & x > \frac{3}{4} \end{cases}, \qquad |\eta'| \leq 3.$$

Für $u \in W^{1,p}(I)$ setze $u_1 = u\eta$, $u_2 = u(1-\eta)$ mit $u = u_1 + u_2$. Offenbar gilt u_1, $u_2 \in L^p(I)$ mit

$$\|u_1\|_{L^p},\ \|u_2\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}.$$

Beh.2. *$u_1 \in W^{1,p}(I)$ mit $u_1' = u'\eta + u\eta' \in L^p(I)$ (da $u'\eta$, $u\eta' \in L^p$).*

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Beachte

$$(\eta\varphi)' = \eta'\varphi + \eta\varphi'.$$

Es folgt

$$\int_I \big(u_1\varphi' + (u'\eta + u\eta')\ \varphi\big)\ dx = \int_I \big(u \underbrace{(\eta\varphi' + \eta'\varphi)}_{=(\eta\varphi)'} + u'(\eta\varphi)\big)\ dx = 0.$$

Analog für u_2. □

Setze u_1 fort durch $u(x) = 0$ für $x \geq 1$ zu $u_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$, analog $u_2 \in W^{1,p}(]-\infty,1[)$ mit

$$\|u_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+)} + \|u_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_-)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Mit a) folgt die Behauptung.

□

Satz 7.3.4. *Sei $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit*

$$\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Bemerkung 7.3.4. *i) Insbesondere liegt für beschränktes I der Raum $C^\infty(\bar{I})$ dicht in $W^{1,p}(I)$, falls $1 \leq p < \infty$. (Bew: $C^\infty(\bar{I}) \supset \{u|_I; u \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$)*

ii) Für $I = \mathbb{R}$ liegt $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R})$, d.h.

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \|\cdot\|_{W^{1,p}} - clos(C_0^\infty(\mathbb{R})) =: W_0^{1,p}(\mathbb{R}),\ 1 \le p < \infty.$$

Zum Beweis von Satz 7.3.4: Es genügt, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ zu betrachten. (Sonst betrachte $\tilde{u} = Eu$ gemäss Satz 7.3.3.) Wir benutzen „Glättung“ von u durch Faltung mit einem „regularisierenden Kern“ („modifier“).

Repetition: Faltung (auf $\mathbb{R}^n$), vgl. Analysis III, 4.2.
Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ g(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\ g(x-z)\ dz \\ &= (g * f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

mit

$$\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\ \ \|g\|_{L^p}\,; \tag{7.3.2}$$

vgl. Korollar III 4.2.1. Falls $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)\Big)\ g(y)\ dy = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g\Big)(x),$$

und

$$= \Big(f * \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big)(x), \tag{7.3.3}$$

falls auch $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, g, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt $g * h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\ (g*h)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \underbrace{g(x-y)}_{\tilde{g}(y-x)}\ h(y)\ dy\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f * \tilde{g})\ h\ dy \tag{7.3.4}$$

mit $\tilde{g}(x) = g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Sei $0 \le \rho \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho\ dx = 1.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\rho_k(x) = k^n\ \rho(kx) \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{k}}(0))$$

mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(kx)\ d(kx) = 1.$$

Lemma 7.3.3. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.*
Dann gilt

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Beweis. **1. Variante:** Differentiationssatz von Lebesgue III.5.1.1 und Satz von Vitali III. 3.4.1.

2.Variante: Zu $\epsilon > 0$ wähle $f_0 \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - f_0\|_{L^p} < \epsilon$. Betrachte $f_k = \rho_k * f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$supp(f_k) \subset \bigcup_{y \in supp(f_0)} B_{\frac{1}{k}}(y) \subset B_{R_0}(0).$$

Beachte

$$\begin{aligned}
|(f_k - f_0)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} (f_0(x-y) - f_0(x))\ \rho_k(y)\ dy| \\
&\leq \sup_{|x-z|<\frac{1}{k}} |f_0(z) - f_0(x)| \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k\ dy}_{=1} \\
&\to 0 \qquad (k \to \infty) \ \text{ gleichmässig in } x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|f_k - f_0\|_{L^p} \leq (\mathcal{L}^n(B_{R_0}(0)))^{\frac{1}{p}} \cdot \|f_k - f_0\|_{L^\infty} \overset{(k\to\infty)}{\to} 0;$$

also

$$\begin{aligned}
\|\rho_k * f - f\|_{L^p} &\leq \|\rho_k * (f - f_0)\|_{L^p} + \|\rho_k * f_0 - f_0\|_{L^p} + \|f_0 - f\|_{L^p} \\
&\overset{(7.3.2)}{\leq} \|\rho_k\|_{L^1} \cdot \|f - f_0\|_{L^p} + \|f - f_0\|_{L^p} + o(1) \\
&\leq 2\epsilon + o(1)
\end{aligned}$$

mit $o(1) \to 0$ $(k \to \infty)$. □

Beweis von Satz 7.3.4. Zu $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ setze $v_k = \rho_k * u, k \in \mathbb{N}$, wobei $\rho_k(x) = k \cdot \rho(kx)$, $0 \leq \rho \in C_0^\infty(]-1,1[)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\ dx = 1$ wie oben.

Beh.1. *$v_k \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ mit $v_k' = \rho_k * u' \in L^p(\mathbb{R})$.*

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, und $\tilde{\rho}(x) = \rho(-x)$. Mit (7.3.4) folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} v_k\ \varphi'\ dx = \int_{\mathbb{R}} (\rho_k * u)\ \varphi'\ dx &= \int_{\mathbb{R}} u\ \underbrace{(\varphi' * \tilde{\rho_k})}_{=(\varphi * \tilde{\rho_k})'}\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} u\ (\varphi * \tilde{\rho_k})'\ dx = -\int_{\mathbb{R}} u'\ (\varphi * \tilde{\rho_k})\ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (\rho_k * u')\ \varphi\ dx.
\end{aligned}$$

□

Mit Lemma 7.3.1 folgt

$$\|v_k - u\|_{L^p} + \|v_k' - u'\|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

d.h.

$$\|v_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Schliesslich sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \eta \le 1$, mit

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$, und $u_k = \eta_k \cdot v_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_k' = \eta_k' \, v_k + \eta_k \, v_k'$. Schreibe

$$\begin{aligned} u_k - u &= \eta_k(v_k - u) + \eta_k u - u, \\ u_k' - u' &= \eta_k(v_k' - u') + \eta_k' v_k + \eta_k u' - u'. \end{aligned}$$

Da $\eta_k u \to u$, $\eta_k u' \to u'$ punktweise, folgt mit Satz über dominierte Konvergenz

$$\|\eta_k u - u\|_{L^p} + \|\eta_k u' - u'\|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

Mit $\|\eta_k'\|_{L^\infty} = k^{-1} \|\eta'\|_{L^\infty} \to 0$ folgt

$$\|\eta_k' v_k\|_{L^p} \le C k^{-1} \cdot \|v_k\|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

und

$$\begin{aligned} \|\eta_k(v_k - u)\|_{L^p} &\le \|v_k - u\|_{L^p} \to 0 \\ \|\eta(v_k' - u')\|_{L^p} &\le \|v_k' - u\|_{L^p} \to 0, \end{aligned}$$

da $\|v_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0$, also $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0 \qquad (k \to \infty)$. □

Satz 7.3.5 (Sobolev-Einbettung)**.** *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I) \text{ und } \|u\|_{L^\infty} \le C \cdot \|u\|_{W^{1,p}},$$

$\forall u \in W^{1,p}(I)$ mit $C = C(I)$, wobei $|I| = \mathcal{L}^1(I)$.

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I)$. OBdA sei $l := |I| \le 1$. (Sonst betrachte $I' \subset I$ mit $|I'| = 1$ und $\|u\|_{L^\infty}(I') \ge \frac{1}{2} \ \|u\|_{L^\infty(I)}$.) Für fast alle $x_0, x \in I$ gilt nach Satz 7.3.1

$$|u(x) - u(x_0)| \le \int_I |u'(t)| \, dt = \|u'\|_{L^1},$$

also nach Mittelung bzgl. $x_0 \in I$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I} |u(x)| &\le l^{-1} \int_I |u(x_0)| \, dx + \|u'\|_{L^1} \\ &\le (1 + l^{-1}) \ \|u\|_{W^{1,1}} \le (1 + l^{-1}) \ \|u\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.3.1. *Falls I unbeschränkt, $1 \le p < \infty$, so gilt für $u \in W^{1,p}(I)$ stets*

$$u(x) \to 0 \qquad (|x| \to \infty, \ x \in I).$$

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I)$. Da $p < \infty$, gibt es nach Satz 7.3.4 $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$, $(k \to \infty)$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u_k - u\|_{W^{1,p}(I)} < \epsilon$ für $k \geq k_0$. Mit Satz 7.3.5 folgt für $k \geq k_0$

$$(ess) \limsup_{|x|\to\infty,\ x \in I} |u(x)| \leq \underbrace{\limsup_{|x|\to\infty,\ x\in I} |u_k(x)|}_{=0} + \|u_k - u\|_{L^\infty(I)}$$
$$\leq \|u_k - u\|_{L^\infty(I)} \leq C \cdot \|u_k - u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \cdot \epsilon.$$

Mit $\epsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 7.3.2 (Produktregel)**.** *Seien $u, v \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt $uv \in W^{1,p}(I)$, und*

$$\|uv\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)} \cdot \|v\|_{W^{1,p}(I)}\,.$$

Beweis. Nach Satz 7.3.5 gilt $u, v \in L^\infty(I)$, also $uv \in L^p(I)$ mit

$$\|uv\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^p} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(I)} \cdot \|v\|_{W^{1,p}(I)}\,.$$

Analog $u'v + uv' \in L^p(I)$ mit

$$\|u'v + uv'\|_{L^p} \leq \|u'\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \cdot \|v'\|_{L^p} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}} \cdot \|v\|_{W^{1,p}}\,.$$

Beh.1. *$u'v + uv' \in L^p$ ist schwache Ableitung von uv.*

Beweis. i) Sei $p < \infty$. Wähle (u_k), (v_k) in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\|u_k|_I - u\|_{W^{1,p}} + \|v_k|_I - v\|_{W^{1,p}} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

Dann folgt

$$(u_k v_k)' = \underbrace{u_k'}_{\overset{L^p}{\to} u'} \underbrace{v_k}_{\overset{L^\infty}{\to} v} + u_k v_k' \overset{(k\to\infty)}{\to} u'v + uv' \qquad \text{in } L^p(I).$$

Nach Satz 7.2.1 ist $\lim_{k\to\infty} (u_k v_k)' = u'v + uv' \in L^p$ schwache Ableitung von $uv \in L^p(I)$.

ii) $p = \infty$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Wähle $I' \subset\subset I$ mit $supp(\varphi) \subset I'$. Wir können $u|_{I'}, v|_{I'}$ auffassen als $u|_{I'}$, $v|_{I'} \in W^{1,1}(I)$, da

$$W^{1,\infty}(I) \hookrightarrow W^{1,\infty}(I') \hookrightarrow W^{1,1}(I').$$

Gemäss i) ist $(uv' + u'v)|_{I'} \in L^1(I')$ schwache Ableitung von $(uv)|_{I'} \in L^1(I')$. Insbesondere gilt

$$\int_I (uv)\varphi'\ dx = -\int_I (uv' + u'v)\ \varphi\ dx.$$

$\square$

Die gewünschte Aussage folgt. $\square$

7.4 Lösung des Modellproblems auf I

7.4.1 Dirichlet-Problem

Sei $I =]a, b[$, $-\infty < a < b < \infty$. Zu $f \in C^0(\bar{I})$ suche $u \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' = f \qquad \text{in } I, \tag{7.4.1}$$

$$u(a) = 0 = u(b). \tag{7.4.2}$$

Gemäss Abschnitt 7.1 finden wir mit Satz 4.3.2 (Riesz) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(I)$ von (7.4.1), (7.4.2) im Sinne von

$$\int_I u'v' \, dx = \int_I fv \, dx, \qquad \forall v \in H_0^1(I). \tag{7.4.3}$$

Satz 7.4.1. *Das so bestimmte $u \in C^2(\bar{I})$, und u löst* (7.4.1), (7.4.2) *klassisch.*

Beweis. i) $u \in C^2(\bar{I})$. Da (7.4.3) insbesondere gilt für $v \in C_0^\infty(I)$, hat u' die schwache Ableitung

$$(u')' = -f \in C^0(\bar{I}) \hookrightarrow L^\infty(I),$$

d.h. $u' \in W^{1,\infty}(I)$. Nach Satz 7.3.1 gilt

$$u'(x) = u'(x_0) - \int_{x_0}^x f(t) \, dt \in C^1(\bar{I})$$

gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da $f \in C^0(\bar{I})$. Also folgt $u \in C^2(\bar{I})$, und u löst (7.4.1) klassisch.

ii) Da $H_0^1(I) = \|\cdot\|_{H^1} - clos(C_0^\infty(I))$ gibt es $(u_k) \subset C_0^\infty(I)$ mit

$$\|u_k - u\|_{L^\infty} \leq C \cdot \|u_k - u\|_{H^1} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Es folgt für beliebige $k \in \mathbb{N}$

$$|u(a)| \leq \underbrace{|u_k(a)|}_{=0} + \|u_k - u\|_{L^\infty} \leq C \cdot \|u_k - u\|_{H^1} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Für $k \to \infty$ folgt $u(a) = 0$. Analog $u(b) = 0$.

□

7.4.2 Neumann-Problem

Sei $f \in C^0(\bar{I})$. Gesucht ist $u \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' + u = f \qquad \text{in } I, \tag{7.4.4}$$

$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.5}$$

Bemerkung 7.4.1. *i) Für $u \in W^{1,p}(I)$ sind die Randwerte $u'(a)$, $u'(b)$ nicht definiert.*

ii) Falls $u \in C^2(\bar{I})$ klassische Lösung von (7.4.4), (7.4.5), so folgt für $v \in C^1(\bar{I})$ nach partieller Integration

$$\int_I \underbrace{(u'v' + uv)}_{(u,v)_{H^1}} \; dx = \int_I fv \; dx. \tag{7.4.6}$$

Definition 7.4.1. *$u \in H^1$ heisst* **schwache Lösung in der Klasse** H^1 *von (7.4.4), (7.4.5), falls (7.4.6) erfüllt ist für alle $v \in H^1(I)$.*

Satz 7.4.2. *Für jedes $f \in C^0(\bar{I})$ besitzt (7.4.4), (7.4.5) genau eine schwache Lösung $u \in H^1(I)$, und $u \in C^2(\bar{I})$ löst (7.4.4), (7.4.5) klassisch.*

Beweis. i) Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in H^1(I)$ folgt aus Satz 4.3.2 (Riesz).

Wie in Beweis von Satz 7.4.1 folgt, dass $u' \in L^2$ die schwache Ableitung $(u')' = u - f \in L^2$ besitzt; d.h. $u' \in H^1(I)$, und mit Satz 7.3.1 folgt

$$u'(x) = u'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (u - f)(t) \; dt \in C^1(\bar{I}),$$

da $u \in H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{I}),\ f \in C^0(\bar{I})$; d.h. $u \in C^2(\bar{I})$, und u erfüllt (7.4.4).

ii) Sei $v \in C^1(\bar{I})$ beliebig. Da u Lösung von (7.4.6), folgt nach Partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (u'v' + uv - fv) \; dx \\ &= \int_a^b \underbrace{(-u'' + u - f)}_{=0} v \; dx + u'(b) \; v(b) - u'(a) \; v(a). \end{aligned}$$

Da $v(a)$, bzw. $v(b)$ beliebig, folgt $u'(a) = 0 = u'(b)$, d.h. (7.4.5).

□

Bemerkung 7.4.2. *Somit erhalten wir (7.4.5) als natürliche Randbedingungäus (7.4.6) und der Wahl des Raumes der zulässigen Testfunktionen $v \in H^1(I)$.*

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } I =]a,b[\\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H_0^1(I) & \text{löst} \\ \int_I u'v' \; dx = \int_I fv \; dx, & \forall v \in H_0^1(I), \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{in } I \\ u'(a) = 0 = u'(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H^1(I) & \text{löst} \\ \int_I (u'v' + uv) \; dx = \int_I fv \; dx, & \forall v \in H^1(I). \end{cases}$$

7.4.3 Varianten: Neumann-Problem

Zu $f \in C^0(\bar{I})$ suche $u \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' = f \qquad \text{in } I, \tag{7.4.7}$$
$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.8}$$

Bemerkung 7.4.3. *i) Offenbar ist die Bedingung*

$$\int_I f \, dx = 0 \tag{7.4.9}$$

notwendig für die Existenz einer Lösung $u \in C^2(\bar{I})$ von (7.4.7), (7.4.8) (Bew: $\int_I \ldots \, dx$).

ii) Falls $u \in C^2(\bar{I})$ Lösung ist, so auch jede Funktion $u + c$, $c \in \mathbb{R}$. Komplementär zu (7.4.9) können wir daher Ansatzfunktionen u normieren durch

$$0 = \bar{u} = \frac{1}{|I|} \int_I u \, dx = 0.$$

Setze
$$X = \{u \in H^1(I);\ \bar{u} = 0\}.$$
X ist abgeschlossener linearer Unterraum von $H^1(I)$.

Lemma 7.4.1. *Für $u \in X$ gilt $\|u\|_{L^2} \leq C \cdot \|u'\|_{L^2}$ mit einer nur von $|I|$ abhängigen Konstanten C.*

Beweis. Für $x_0, x \in I$ gilt nach Satz 7.3.1

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \int_I |u'(t)| \, dt = \|u'\|_{L^1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |\frac{1}{|I|} \int_I (u(x) - u(x_0)) \, dx_0| \\ &\leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(x) - u(x_0)| \, dx_0 \leq \frac{1}{|I|} \|u'\|_{L^1}; \end{aligned}$$

Integration über I und die Höldersche Ungleichung liefern die Behauptung. □

Also ist X ein Hilbert-Raum mit dem zum H^1-Skalarprodukt äquivalenten Skalarprodukt

$$(u, v)_X = \int_I u'v' \, dx, \qquad \forall u, v \in X.$$

Definition 7.4.2. *$u \in H^1(I)$ heisst* **schwache Lösung von** (7.4.7)**,** (7.4.8) **der Klasse** H^1*, falls gilt*

$$\int_I u'v' \, dx = \int_I fv \, dx, \qquad \forall v \in H^1(I). \tag{7.4.10}$$

Bemerkung 7.4.4. *Falls f die notwendige Bedingung* (7.4.9) *efüllt, so ist* (7.4.10) *äquivalent zu*

$$\int_I u'v'\ dx = \int_I fv\ dx, \qquad \forall v \in X. \tag{7.4.11}$$

Mit dem Rieszschen Satz 4.3.2 folgt

Satz 7.4.3. *Falls f die Bedingung* (7.4.9) *erfüllt, so besitzt* (7.4.7), (7.4.8) *genau eine schwache Lösung $u \in X$, und $u \in C^2(\bar{I})$ efüllt* (7.4.7), (7.4.8) *klassisch.*

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit von $u \in X$ mit (7.4.11) folgt aus Satz 4.3.2. Wegen (7.4.9) erfüllt u auch (7.4.10). Regularität von u, etc. folgt wie in Satz 7.4.2. □

Alternativer Ansatz:
Für $\epsilon > 0$ suche $u_\epsilon \in C^2(\bar{I})$ mit

$$-u'' + \epsilon u = f \qquad \text{in } I, \tag{7.4.7ϵ}$$
$$u'(a) = 0 = u'(b). \tag{7.4.8ϵ}$$

Nach Satz 7.4.2 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ genau ein $u_\epsilon \in C^2(\bar{I})$ mit (7.4.7ϵ), (7.4.8).

Satz 7.4.4. *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz $u_\epsilon \overset{(\epsilon\downarrow 0)}{\to} u$ in $C^1(\bar{I})$, wobei u Lösung von* (7.4.7), (7.4.8), *ist die Bedingung* (7.4.9).

Beweis.

Beh.1. (7.4.9) *ist notwendig für die Konvergenz.*

Beweis. Integration von (7.4.7ϵ) ergibt wegen (7.4.8ϵ)

$$\epsilon\ \bar{u}_\epsilon = \epsilon\ \frac{1}{|I|}\int_I u_\epsilon\ dx = \frac{1}{|I|}\int_I f\ dx = \bar{f}. \tag{7.4.12}$$

Falls $\bar{f} \neq 0$, so folgt

$$|\bar{u}_\epsilon| \geq \frac{|\bar{f}|}{\epsilon} \to \infty \qquad (\epsilon \downarrow 0).$$

□

Beh.2. (7.4.9) *ist hinreichend für die Konvergenz.*

Beweis. Für $\bar{f} = 0$ ergibt (12), dass $\bar{u}_\epsilon = 0$; d.h. $u_\epsilon \in X$. Mit Lemma 7.4.1 folgt

$$\begin{aligned} C^{-1}\ \|u_\epsilon\|^2_{L^2} \leq \|u'_\epsilon\|^2_{L^2} &\leq \int_I (|u'_\epsilon|^2 + \epsilon\ u_\epsilon^2)\ dx \\ &\overset{P.I.}{=} \int_I \underbrace{(-u''_\epsilon + \epsilon\ u_\epsilon)}_{=f}\ u_\epsilon\ dx \\ &\leq \|f\|_{L^2} \cdot \|u_\epsilon\|_{L^2}\ , \end{aligned}$$

also $\|u_\epsilon\|_{L^2} \le C \cdot \|f\|_{L^2}$, $\|u'_\epsilon\|_{L^2} \le C \cdot \|f\|_{L^2}$, und mit Satz 7.3.5

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty} \le C \cdot \|u_\epsilon\|_{H^1} \le C \cdot \|f\|_{L^2}.$$

Mit (7.4.7ϵ) folgt

$$\|u''_\epsilon - u''_\delta\|_{L^\infty} \le \epsilon \ \|u_\epsilon\|_{L^\infty} + \delta \ \|u_\delta\|_{L^\infty} \overset{(\epsilon,\delta\downarrow 0)}{\to} 0,$$

also $u_\epsilon \to u$ in $C^2(\bar{I})$, und u löst (7.4.7), (7.4.8). □

Der Satz folgt. □

7.5 Der Laplace-Operator auf I

Sei $I =]a, b[$, $-\infty < a < b < \infty$, $A : D_A \subset L^2(I) \to L^2(I)$ mit $Au = -u''$ auf

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{I});\ \ u(a) = 0 = u(b)\}$$

wie in Abschnitt 7.1. Betrachte $\bar{A}$ mit

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\bar{I});\, \exists (u_k) \subset D_A,\ f \in L^2(I) :\ u_k \to u,\ -u''_k \to f \text{ in } L^2(I)\ \ (k \to \infty)\}.$$

Lemma 7.5.1. $D_{\bar{A}} = \{u \in H^2(I);\ u(a) = 0 = u(b)\} = H^2 \cap H^1_0(I)$.

Beweis. i) $H^2 \cap H^1_0(I) \subset D_{\overline{A}}$ erhält man mit Satz 7.3.4.
ii) Sei $u \in D_{\bar{A}}$ und dazu $(u_k) \subset D_A, f \in L^2(I)$ mit

$$u_k \to u \text{ in } L^2,\ -u''_k \to f \text{ in } L^2(I). \tag{7.5.1}$$

Es folgt mit $o(1) \to 0$ $(k, l \to \infty)$

$$\begin{aligned} C^{-1}\ \|u_k - u_l\|^2_{H^1} &\overset{\text{Poincaré}}{\le} \|(u_k - u_l)'\|^2_{L^2} \\ &= \int_I |(u_k - u_l)'|^2\, dx \overset{\text{P.I.}}{=} \int_I -(\underbrace{u_k}_{\to f} - \underbrace{u_l}_{\to f})''\ (u_k - u_l)\, dx \\ &= o(1) \cdot \|u_k - u_l\|_{L^2} \le o(1)\ \|u_k - u_l\|_{H^1} \end{aligned}$$

Da $u_k \in D_A \subset H^1_0(I)$, folgt somit $u_k \to u$ in $H^1_0(I)$ $(k \to \infty)$, und mit (7.5.1) folgt $u_k \to u$ in H^2 $(k \to \infty)$

□

Selbstadjungiertheit von $\bar{A}$ erhält man mit

Lemma 7.5.2. *Sei $v \in L^2(I)$ und für ein $C \in \mathbb{R}$ gelte*

$$|(v, \bar{A}\ u)_{L^2}| \le C \cdot \|u\|_{L^2}, \qquad \forall u \in D_{\bar{A}}. \tag{7.5.2}$$

Dann ist $v \in D_{\bar{A}}$.

Beweis. i) Zeige $v \in H^2(I)$. Mit (7.5.2) folgt die Existenz von $g = \left(\bar{A}\right)^* v \in L^2(I)$ mit

$$(v, \bar{A}\ u)_{L^2} = (g, u)_{L^2}, \qquad \forall u \in D_{\bar{A}}. \tag{7.5.3}$$

Da $C_0^\infty(\Omega) \subset D_A \subset D_{\bar{A}}$ gilt insbesondere

$$-\int_I v\ \varphi''\ dx = \int_I g\ \varphi\ dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \tag{7.5.4}$$

Setze

$$G(x) = \int_a^x g(t)\ dt \in H^1(I)$$

Mit (7.5.4) folgt

$$\int_I (v' + G)\ \varphi'\ dx = -\int_I v\ \varphi''\ dx - \int_I g\ \varphi\ dx = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \tag{7.5.5}$$

Fixiere $\psi \in C_0^\infty(I)$ mit $\int_I \psi\ dx = 1$. Setze

$$C = \int_I (G\psi - v\psi')\ dx = \int_I (v' + G)\ \psi\ dx$$

nach Definition der Distributions-Ableitung. Dann folgt mit (7.5.5) für beliebige $w \in C_0^\infty(I)$

$$\begin{aligned}
\int_I (v' + G - C)\ w\ dx &= \int_I \Big(-vw' + Gw - \int_I (G\psi - v\psi')\ dx \cdot w \Big)\ dx \\
&= \int_I \Bigg(\underbrace{\Big(-v\ \big(w' - \psi'\ \int_I w\ dx\big) \Big)}_{=\varphi''} + G\ \underbrace{\big(w - \psi\ \int_I w\ dx\big)}_{=\varphi'} \Bigg)\ dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei $w - \psi\ \int_I w\ dx = \varphi'$ für ein $\varphi \in C_0^\infty(I)$ analog Lemma 7.3.1 D.h. $v' = C - G \in H^1(I)$, und $v \in H^2(I)$ mit $v'' = -G' = -g$.

ii) Mit (7.5.3) folgt für $u \in D_A$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_I (vu'' + gu)\ dx = \int_I \underbrace{(v'' + g)}_{=0}\ u\ dx + (vu')|_a^b \\
&= u'(b)v(b) - u'(a)v(a).
\end{aligned}$$

Da $u'(a)$, $u'(b)$ beliebig, folgt $v(a) = 0 = v(b)$.

$\square$

=

Kapitel 8

Sobolev-Räume im $\mathbb{R}^n$

8.1 Erste Beispiele

Definition 8.1.1. *Eine Menge* $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ *hat* **verschwindende** $W^{1,p}$**-Kapazität**, *falls* $(\psi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *existiert mit* $0 \le \psi_k \le 1$ *und* $\psi_k \equiv 1$ *in einer Umgebung* U_k *von* K, $\psi_k \to 0$ *für fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\nabla \psi_k\|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty)$.

Notation: $cap_{W^{1,p}}(K) = 0$.

Beispiel 8.1.1. *Für* $n > 1$ *hat* $K = \{0\}$ *verschwindende* $W^{1,p}$*-Kapazität, falls* $p \le n$.

Beweis. Betrachte

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \frac{1}{e^{e^{k+1}}} = r_k, \\ \log\log\frac{1}{|x|} - k, & \text{sonst}, \\ 0, & |x| \ge \frac{1}{e^{e^k}} = R_k. \end{cases}$$

Wegen

$$|\nabla \psi_k(x)|^n = \begin{cases} |x|^{-n} \ |\log|x||^{-n}, & r_k < |x| < R_k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_k|^n \ dx \le C \cdot \int_0^{R_k} \frac{r^{n-1} \ dr}{r^n \ |\log r|^n} \to 0 \ \ (k \to \infty).$$

$$\left(\text{Für } n = 2: \ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \psi_k|^2 \ dx = 2\pi \int_{r_k}^{R_k} \frac{dr}{r \ \log^2 r} = \frac{1}{|\log r|}\bigg|_{r_k}^{R_k} \to 0.\right)$$

□

Bemerkung 8.1.1. *i) Hat* $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ *verschwindende* $W^{1,p}$*-Kapazität, so auch verschwindende* $W^{1,s}$*-Kapazität für alle* $1 \le s \le p$ *(Hölder).*

ii) falls K *verschwindende* $W^{1,p}$*-Kapazität hat, so folgt* $\mathcal{L}^n(K) = 0$.

Satz 8.1.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $u \in L^q(\Omega) \cap C^1(\Omega \backslash K)$ mit $|\nabla u| \in L^p(\Omega\backslash K)$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Sei s zu q konjugiert. Falls $cap_{W^{1,s}}(K) = 0$, dann ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit schwacher Ableitung $\nabla u(x)$ fast überall.*

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, und sei $(\psi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi_k \leq 1$, $\psi_k = 1$ nahe K, $\psi_k \to 0$ f.ü., $\|\nabla\psi_k\|_{L^p} \to 0 \ \ (k \to \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \nabla\varphi \, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u \underbrace{\nabla(\overbrace{\varphi(1-\psi_k)}^{\in C_0^\infty(\Omega\backslash K)})}_{\nabla\varphi\cdot(1-\psi_k)-\varphi\ \nabla\psi_k} dx \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \underbrace{\nabla u \ \varphi}_{\in L^p \hookrightarrow L^1} (1-\psi_k) \, dx \\
&= -\int_\Omega \nabla u \ \varphi \, dx
\end{aligned}$$

mit dominierter Konvergenz und da

$$\int_\Omega \underbrace{u \ \varphi}_{\in L^q} \ \underbrace{\nabla\psi_k}_{\in L^s} \, dx \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Also besitzt u die schwache Ableitung $\nabla u \in L^p$. □

Beispiel 8.1.2. *Sei $n > 1$.*

i) $u(x) = \underbrace{\log|x|}_{\in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n)),\ \forall q<\infty}$ *mit*

$$\nabla u(x) = \frac{x}{|x|^2} \in L^p(B_1(0;\mathbb{R}^n)),\ \forall p < n$$

liegt in $W^{1,p}(B_1(0,\mathbb{R}^n))$, $\forall p < n$, da $K = \{0\}$ nach Beispiel 8.1.1 verschwindende $W^{1,n}$-Kapazität hat und insbesondere $u \in L^{\frac{n}{n-1}}$, mit $\frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = 1$.

ii)

$$u(x) = \log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) \in \bigcap_{1\leq q<\infty} L^q(B_{\frac{1}{e}}(0))$$

mit

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x||\log|x||} \in L^n(B_{\frac{1}{e}}(0))$$

liegt in $W^{1,n}(B_{\frac{1}{e}}(0,\mathbb{R}^n))$.

iii) Sei $0 < \alpha < n$. Die Funktion

$$u(x) = \frac{x}{|x|^{n-\alpha}} \in W^{1,p}(B_1(0;\mathbb{R}^n))$$

für $1 \leq p < \frac{n}{n-\alpha}$.

Beweis. $u \in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n))$, $\forall q < \frac{n}{n-1-\alpha}$ $(|u| = \frac{1}{|x|^{n-1-\alpha}} \in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n)),\ \forall q < \frac{n}{n-1-\alpha})$.

$$|\nabla u(x)| \leq C \cdot \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \in L^p(B_1(0;\mathbb{R}^n)),\ \forall p < \frac{n}{n-\alpha}.$$

□

iv) Die Funktion

$$u(x) = \frac{x}{|x|^n} \in L^q(B_1(0;\mathbb{R}^n)), \quad \forall q < \frac{n}{n-1}$$

erfüllt $div(u(x)) = 0,\ \forall x \neq 0$, *aber im Distributionssinne gilt* $div(u) = c(u) \cdot \delta_{\{x=0\}}$ *für ein* $c(u) \neq 0$, *vgl. Analysis III.*

Folge: Die Menge $K = \{0\}$ hat für kein $p > n$ verschwindende $W^{1,p}$-Kapazität.

8.2 Approximation von Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Satz 8.2.1. *(Meyers-Serein (1964)) Sei* $1 \leq p < \infty$. *Dann liegt der Raum* $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *dicht in* $W^{1,p}(\Omega)$.

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$K := supp(u) = \bigcap_{A \text{ abg.};\ u(x)=0 \text{ für f.a. } x \notin A} A \subset\subset \Omega.$$

Sei $\rho \in C_0^\infty(B_1(0))$ ein „mollifier" wie in Abschnitt 7.3, $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$, und für $\epsilon > 0$ sei

$$0 \leq \rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\epsilon}) \in C_0^\infty(B_\epsilon(0)), \ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon\, dx = 1$$

Für $0 < \epsilon < dist(K, \partial\Omega)$ gilt dann $u_\epsilon = \rho_\epsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ und

$$u_\epsilon \to u, \qquad \nabla u_\epsilon = \rho_\epsilon * \nabla u \to \nabla u \text{ in } L^p$$

für $\epsilon \to 0$ gemäss Lemma 7.3.1. □

Für allgemeines $u \in W^{1,p}(\Omega)$ benötigen wir eine Zerlegung der Eins auf Ω.

Definition 8.2.1. *Eine offene Überdeckung* $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ *einer Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *heisst* **lokal endlich**, *falls zu jedem* $x_0 \in A$ *eine Umgebung* U *existiert mit*

$$\#\{\iota \in I; \Omega_\iota \cap U \neq \emptyset\} < \infty. \tag{8.2.1}$$

Beispiel 8.2.1. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Für* $k \in \mathbb{N}$ *setze*

$$\Omega_k = \{x \in \Omega;\ |x| < k,\ dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\},$$

sowie $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$, *und* $U_k = \Omega_k \setminus \Omega_{k-2}$. *Dann ist* $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *offene Überdeckung von* Ω. *Für* $x \in U_k$ *gilt*

$$k - 2 < |x| \leq k \text{ oder } \frac{1}{k-2} \geq dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k},$$

daher ist $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *lokal endlich.*

Bemerkung 8.2.1. *i) Für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}^n$ können wir (8.2.1) nicht erwarten. Z.B. gilt in Beispiel 8.2.1 für $x_0 \in \partial\Omega$ und eine beliebige Umgebung U_0 von x_0 stets $U_0 \cap U_k \neq \emptyset$ für $k \geq k_0$.*

ii) Nach allgemeinen Sätzen der mengentheoretischen Topologie besitzt eine offene Überdeckung $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ in einem metrischen Raum stets eine lokal endliche Verfeinerung; vgl. Kelly „General topology“, Korollar 5.35, p.160.

Definition 8.2.2. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von A. Eine Schar $(\varphi_\iota)_{\iota \in I} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ heisst* **Zerlegung der Eins auf** A **bzgl.** $\mathcal{F}$*, falls*

i) $0 \leq \varphi_\iota(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \iota \in I$.

ii) Die Mengen $\Omega_\iota = supp(\varphi_\iota)$ bilden eine lokal endliche Überdeckung von A, und für jedes $\iota \in I$ gibt es $U \in \mathcal{F}$ mit $\Omega_\iota \subset U$.

iii) $\sum_{\iota \in I} \varphi_\iota(x) = 1, \quad \forall x \in A$.

Beispiel 8.2.2. *Sei $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Überdeckung von Ω in Beispiel 8.2.1. Setze $\psi_k(x) = dist(x, \mathbb{R}^n \backslash U_k), \quad k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen ψ_k Lipschitz mit $\overset{\circ}{supp}(\psi_k) = U_k, \quad k \in \mathbb{N}$. Da (U_k) lokal endlich, ist*

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

für $x \in \Omega$ wohldefiniert und lokal Lipschitz. Setze $\varphi_k = \frac{\psi_k}{\psi}$. Glätte die ψ_k!

Beweis von Satz 8.2.1. (vollendet). Überdecke Ω mit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gemäss Beispiel 8.2.1, und wähle eine Zerlegung der Eins $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gemäss Beispiel 8.2.2 mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k \in C_0^\infty(U_k), k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = 1$ in Ω.

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zerlege

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

mit $u_k = u\varphi_k \in W^{1,p}(\Omega)$ und $supp(u_k) \subset \overline{U_k} \subset\subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Fixiere $\delta > 0$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $\epsilon_k > 0$ mit $\epsilon_k < dist(U_k, \partial\Omega)$ und

$$\|\rho_{\epsilon_k} * u_k - u_k\|_{W^{1,p}} < \delta \cdot 2^{-k}.$$

Setze $v_k := \rho_{\epsilon_k} * u_k \in C_0^\infty(\Omega)$, sowie

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} v_k \in C^\infty(\Omega). \tag{8.2.2}$$

Es folgt die Abschätzung

$$\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - u_k) \right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 8.2.2. *i) Im allgemeinen konvergiert die Darstellung* (8.2.2) *für* v *nicht gleichmässig für Punkte in der Nähe des Randes von* Ω. *Die Darstellung* (8.2.2) *liefert insbesondere kein* $v \in C_0^\infty(\Omega)$, *noch nicht einmal ein* $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

ii) In der Tat liegt für manche Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *der Raum* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *nicht dicht in* $W^{1,1}(\Omega)$.

Beispiel 8.2.3. *i) Sei* $S =]-1,0[\cup]0,1[$. *Betrachte* $u = \chi_{]0,1[}$. *Offenbar gilt* $u \in W^{1,1}(S)$ *mit* $u' = 0$.

Nimm an, es existiere $(u_k) \subset C^1(\bar{S})$ *auf* $\bar{S} = [-1,1]$ *mit* $\|u_k - u\|_{W^{1,1}} \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$. *Dann folgt*

$$\begin{aligned}\|u_k\|_{L^\infty} &\le \int_{-1}^{0} |u_k(x_0)|\; dx_0 + \int_S |u_k'|\; dt \\ &\le \|u_k - u\|_{W^{1,1}} \to 0 \quad (k \to \infty).\end{aligned}$$

Der Widerspruch zeigt, dass $C^\infty(\overline{S})$ *nicht dicht liegt in* $W^{1,1}(S)$.

ii) Sei analog $\Omega = (]-1,0[\times S) \cup (]0,1[\times]-1,1[)$. *Betrachte*

$$u(x,y) = \begin{cases} x, & x < 0, \text{ und } y > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Nimm wieder an, es existiere $(u_k) \subset C^1(\bar{\Omega})$ *mit* $\overline{\Omega} = [-1,1] \times [-1,1]$ *und* $\|u_k - u\|_{W^{1,1}} \to 0 \quad (k \to \infty)$. *Mit Fubini folgt*

$$\int_{-1}^{1} \|u_k(x,\cdot) - u(x,\cdot)\|_{W^{1,1}(S)} \; dx \le \|u_k - u\|_{W^{1,1}(\bar{\Omega})} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

d.h.

$$\|u_k(x,\cdot) - u(x,\cdot)\|_{W^{1,1}(S)} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

für fast alle x, *wobei* $u_k(x,\cdot) \in C^1(\bar{S})$. *Mit i) erhalten wir wieder einen Widerspruch, und* $C^1(\overline{\Omega})$ *liegt nicht dicht in* $W^{1,1}(\Omega)$.

Definition 8.2.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ist* **von der Klasse** C^1, *falls zu jedem* $x_0 \in \partial\Omega$ *eine Umgebung* U *sowie ein Diffeomorphismus* $\Psi \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ *auf* $V := \Psi(U)$ *existieren mit*

$$\Psi(x_0) = 0 \text{ und } \Psi(U \cap \Omega) = V \cap \{x = (x_1,...,x_n);\ x_n < 0\},$$

also auch $\Psi(U \cap \partial\Omega) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

Satz 8.2.2. *Sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen und von der Klasse* C^1. *Dann liegt der Raum* $C^\infty(\bar{\Omega})$ *dicht in* $W^{k,p}(\Omega)$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *und jedes* $1 \le p < \infty$.

Bemerkung 8.2.3. $\Omega \in C^1$ *genügt für jedes* k.

Beweis von Satz 8.2.2. Überdecke $\partial\Omega$ mit Umgebungen $U_1, ..., U_L$ wie in der Definition und wähle $U_0 \subset\subset \Omega$ offen mit $\Omega \subset \bigcup_{l=0}^{L} U_l$.

Sei (φ_l) eine Zerlegung der Eins auf $\overline{\Omega}$ bezüglich (U_l).

Gegeben: $u \in W^{k,p}(\Omega)$
Zerlege: $u = \sum_{l=0}^{L} u_l$ mit $u_l = u\varphi_l \in W^{k,p}(\Omega)$ für jedes l.

$l = 0$: Da $U_0 \subset\subset \Omega$, hat $u_0 = u\varphi_0$ Träger $K = supp(u_0) \subset\subset \Omega$. Für $\epsilon < dist(K, \partial\Omega)$ gilt dann

$$v_0^\epsilon = \rho_\epsilon * u \in C_0^\infty(\Omega), \text{ und } \|v_0^\epsilon - u_0\|_{W^{k,p}} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

analog zum Beweis von Satz 8.2.1.

$l \geq 1$: Es gilt $K = supp(u_l) \subset\subset U_l$. OBdA gelte (nach Drehung der Koordinaten und allenfalls Verkleinerung von U_l) $\nu(x) \cdot e_n \geq \frac{1}{2}$, für alle $x \in \partial\Omega \cap U_l$, wobei $\nu(x)$ die äussere Normale an Ω bezeichnet. Die Verschiebung $T_\epsilon : x \mapsto x - \epsilon\, e_n$ ist daher wohldefiniert mit

$$T_\epsilon(U_\delta(K)) \subset U_l \cap \Omega$$

für $2\delta < \epsilon < \epsilon_l$. Setze $v_l^\epsilon = u_l \circ T_\epsilon$.

Beh.1. *$v_l^\epsilon \in W^{k,p}(U_l^\delta)$ für alle $2\delta < \epsilon < \epsilon_l$ mit*

$$U_l^\delta = \bigcup_{x \in U_l \cap \Omega} B_\delta(x) \text{ und } \|v_l^\epsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l \cap \Omega)} \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0.$$

Beweis. Es gilt $v_l^\epsilon = u_l \circ T_\epsilon$, $(\partial^\alpha u_l) \circ T_\epsilon \in L^p(U_l^\delta)$ für $2\delta < \epsilon < \epsilon_l$. Dazu schätzen wir die L^p-Norm wie folgt ab

$$\begin{aligned}\|v_l^\epsilon\|_{L^p(U_l^\epsilon)} &= \int_{U_l^\delta} \underbrace{|u_l|^p}_{\Rightarrow supp(u_l) = K \subset\subset U_l} \circ T_\epsilon \; dx \\ &\overset{\text{(Subst.)}}{=} \int_{T_\epsilon(\underbrace{K}_{\subset U_l})} |u_l|^p \; dx \leq \|u_l\|_{L^p}^p .\end{aligned}$$

Analog finden wir eine Abschätzung der Norm für $(\partial^\alpha u_l) \circ T_\epsilon$.

Als nächstes zeigen wir $(\partial^\alpha u_l) \circ T_\epsilon = \partial^\alpha v_l^\epsilon \in L^p$, $\forall |\alpha| \leq k$, $0 < \epsilon < \epsilon_l$.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, $|\alpha| \leq k$. Für $0 < \epsilon < \epsilon_l$ gilt

$$\int_\Omega (\partial^\alpha u_l) \circ T_\epsilon \varphi \; dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int_\Omega \partial^\alpha u_l (\varphi \circ T_\epsilon^{-1}) \; dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_l \underbrace{\partial^\alpha(\varphi \circ T_\epsilon^{-1})}_{=(\partial^\alpha \varphi) \circ T_\epsilon^{-1}} \; dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \underbrace{u_l \circ T_\epsilon}_{= v_l^\epsilon} \partial^\alpha \varphi \; dx.$$

$\square$

Beh.2. $\|u_l \circ T_\epsilon - u_l\|_{L^p}$, $\|(\partial^\alpha u_l) \circ T_\epsilon - \partial^\alpha u_l\|_{L^p} \to 0 \quad (\epsilon \to 0)$.

Beweis. Für $f \in C^0(\bar{\Omega})$ gilt $\|f \circ T_\epsilon - f\|_{L^p} \to 0 \quad (\epsilon \to 0)$. Da u_l und jedes $\partial^\alpha u_l$ durch Funktionen f_{l_k}, $f_{\alpha_{l_k}} \in C^0(\bar{\Omega})$ auf U_l in $L^p(U_l)$ approximiert werden können, folgt die Behauptung. □

Da v_l^ϵ in U_l^δ definiert ist, können wir glätten! Setze

$$v_l^{\delta,\epsilon} = \rho_\delta * v_l^\epsilon \in C^\infty(U_l).$$

Wie in Lemma 7.3.1 folgt

$$\left\| v_l^{\delta,\epsilon} - v_l^\epsilon \right\|_{L^p(U_l)} \to 0 \quad (\delta \to 0),$$

und für $\partial^\alpha v_l^{\delta,\epsilon} = \rho_\delta * \partial^\alpha v_l^\epsilon$

$$\left\| \partial^\alpha v_l^{\delta,\epsilon} - \partial^\alpha v_l^\epsilon \right\|_{L^p(U_l)} \to 0 \quad (\delta \to 0);$$

also

$$\left\| v_l^{\delta,\epsilon} - v_l^\epsilon \right\|_{W^{k,p}(U_l)} \to 0 \quad (\delta \to 0).$$

Für $\gamma > 0$ gibt es also $2\delta < \epsilon < \epsilon_l$ mit

$$\left\| v_l^{\delta,\epsilon} - u_l \right\|_{W^{k,p}(U_l)} \leq \underbrace{\left\| v_l^{\delta,\epsilon} - v_l^\epsilon \right\|_{W^{k,p}(U_l)}}_{<\gamma} + \underbrace{\|v_l^\epsilon - u_l\|_{W^{k,p}(U_l)}}_{<\gamma} < 2\gamma.$$

□

8.3 Weitere Eigenschaften von $W^{1,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Satz 8.3.1. *Sei $1 < p \leq \infty, u \in L^p(\Omega)$. Es sind äquivalent:*
i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$
ii) $\exists C \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*:*

$$\left|\int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx\right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^q}, \qquad 1 \leq i \leq n, \qquad \textit{wobei } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

iii) $\exists C \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega \quad \forall |h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$*:*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq C \cdot |h|,$$

wobei $\tau_h u(x) = u(x+h), \; x \in \Omega'$.

Beweis. $iii) \Rightarrow ii) \overset{(p\geq 1)}{\Rightarrow} i)$ wie in Satz 7.3.2.

$i) \Rightarrow iii)$: Sei $u \in C^1(\Omega)$, und sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Für $|h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$, $x \in \Omega'$ gilt

$$\tau_h u(x) - u(x) = u(x+h) - u(x) = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th)\, dt.$$

Es folgt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq |h| \int_0^1 \|\nabla u(\cdot + th)\|_{L^p(\Omega')}\, dt \leq |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (8.3.1)$$

$p < \infty$: Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k) \subset C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ für $k \to \infty$, und (8.3.1) gilt für jedes u_k. Mit $k \to \infty$ folgt (8.3.1) für u.

$p = \infty$: Zu $\Omega' \subset\subset \Omega$ wähle Ω'' mit $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Da $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega'')$ für jedes $p < \infty$, folgt mit (8.3.1) für $|h| < dist(\Omega', \partial\Omega'')$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega'')} \overset{\text{Hölder}}{\leq} |h| \cdot \mathcal{L}^n(\Omega'')^{\frac{1}{p}} \cdot \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Für $p \to \infty$ erhalten wir

$$\|\tau_h u - u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^\infty},$$

wie gewünscht. □

Korollar 8.3.1. *Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

i) $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$

ii) u besitzt einen lokal Lipschitz-stetigen Repräsentanten $\tilde{u} = u$, und es gibt $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$|u(x) - u(y)| \leq C \cdot dist_\Omega(x,y), \qquad \forall x, y \in \Omega, \quad (8.3.2)$$

wobei $dist_\Omega(x,y) = \inf\{L(\gamma);\ \gamma \in C^1([0,1],\Omega),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}$.

Bemerkung 8.3.1. *Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so gilt $dist_\Omega(x,y) = |x-y|$; d.h. $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ genau dann, wenn u (gleichmässig) Lipschitz stetig ist.*

Beweis des Korollars. $i) \Rightarrow ii)$**:** Seien $x, y \in \Omega$, dazu $\gamma \in C^1([0,1],\Omega)$ mit $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$. Sei $2\delta = dist(\gamma([0,1]), \partial\Omega) > 0$.

Wähle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ mit $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \delta$. Mit $\Omega' = U_\delta(\gamma([0,1])) \subset\subset \Omega,\ h = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ folgt

$$\begin{aligned} |u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| &= |\tau_h u(\gamma(t_{i-1})) - u(\gamma(t_{i-1}))| \\ &\overset{i)}{\leq} C \cdot |h_i| = C \cdot |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Nach Summieren über i folgt

$$|u(y) - u(x)| = |\sum_{i=1}^{N} u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| \leq \sum_{i=1}^{N} |u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))|$$
$$\leq C \cdot \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq C \cdot L(\gamma).$$

Mit Übergang zum Infimum bzgl. γ folgt ii).

ii) $\Rightarrow$ *i)* : Sei u lokal Lipschitz mit (8.3.2). Für $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ gilt für alle $x \in B_r(x_0)$ und $0 < |h| < r$

$$|u(x+h) - u(x)| \leq C \cdot |h| = C \cdot dist_\Omega(x, x+h),$$

also

$$\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|} \leq C.$$

Insbesondere gilt die gleichmässige Abschätzung

$$|\partial_i^h u(x)| = |\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}| \leq C \text{ für } 0 < h < r, \quad \forall x \in B_r(x_0), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Da $L^\infty(B_r(x_0)) \cong (L^1(B_r(x_0)))^*$, $L^1(B_r(x_0))$ separabel, gibt es nach Satz 5.3.1 von Banach Alaoglu eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge

$$\partial_i^{h_k} u \overset{w^*}{\to} g_i, \quad 1 \leq i \leq n \text{ für geeignetes } h_k \downarrow 0 \quad (k \to \infty),$$

wobei $g_i \in L^\infty(B_1(x_0))$, $\|g_i\|_{L^\infty} \leq C_1$, $1 \leq i \leq n$.

Beh.1. $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Für $0 < h < dist(supp(\varphi), \partial\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \partial_i^h u\varphi \, dx = \int_\Omega \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} \varphi(x) \, dx$$
$$\overset{(y=x+he_i)}{=} \int_\Omega u(y) \frac{\varphi(u - he_i) - \varphi(y)}{h} \, dy$$
$$= \int_\Omega u \partial_i^{-h} \varphi \, dx$$

Mit $h \to 0$ erhalten wir

$$\int_\Omega g_i \varphi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx,$$

d.h. g_i ist schwache Ableitung von u in Richtung e_i, $1 \leq i \leq n$. □

Satz 8.3.2. *(Kettenregel) Sei $G \in C^1(\mathbb{R})$ mit $G(0) = 0$, $|G'(s)| \leq L$, und sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit*

$$\nabla(G \circ u) = \underbrace{(G' \circ u) \cdot \nabla u}_{=:g} \in L^p(\Omega).$$

Im Unterschied zum Fall $n = 1$ kann man auf die globale Annahme $|G'(s)| \leq L$ nicht verzichten.

Beispiel 8.3.1. $u(x) = |x|^{-\frac{1}{2}} \in W^{1,2}(\underbrace{B_1(0)}_{\subset \mathbb{R}^4})$.

Aber $u^2(x) = |x|^{-1} \notin W^{1,2}$, $|\nabla(u^2)| \cong |x|^{-2} \notin L^2$.

Beweis von Satz 8.3.2. Setze $v = G \circ u$. Dann gilt

$$|v(x)| = \left|G(u(x)) - \underbrace{G(0)}_{=0}\right| \leq L\ |u(x)| \in L^p(\Omega),$$

analog

$$g(x) = |G'(u(x))| \cdot |\nabla u(x)| \leq L \cdot |\nabla u(x)| \in L^p(\Omega).$$

Die Behauptung des Satzes folgt somit aus

Beh.1. $g = \nabla v$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Da $supp(\varphi) \subset\subset \Omega$ gibt es $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $supp(\varphi) \subset \Omega'$. Fasse $u|_{\Omega'}$ auf als $u \in W^{1,1}(\Omega')$.

Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k) \subset C^1 \cap W^{1,1}(\Omega')$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,1}(\Omega')$. Nach der üblichen Kettenregel gilt

$$\int_\Omega (G(u_k)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = -\int_\Omega (G'(u_k)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi\ dx, \qquad 1 \leq i \leq n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt

$$\Big| \int_\Omega \underbrace{(G(u_k) - G(u))}_{|\cdot| \leq L\ |u_k - u|} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{|\cdot| \leq C}\ dx \Big| \leq C \cdot \|u_k - u\|_{L^1(\Omega)} \overset{(k\to\infty)}{\to} 0.$$

Analog

$$\begin{aligned}
&|\int_\Omega \Big(G'(u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - G'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\varphi\ dx| \\
&\leq |\int_\Omega G'(u_k)\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\varphi\ dx| + |\int_\Omega (G'(u_k) - G'(u))\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\ dx| \\
&\leq \underbrace{L \cdot C \cdot \int_\Omega |\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}|\ dx}_{\leq C \cdot \|u_k - u\|_{W^{1,1}} \to 0 \quad (k\to\infty)} + \underbrace{C \cdot \int_\Omega \underbrace{|G'(u_k) - G'(u)|}_{|\cdot| \leq 2L,\ \to 0 \text{ f.ü.}} \underbrace{|\frac{\partial u}{\partial x_i}|}_{\in L^1}\ dx}_{\to 0 \text{ (dom. Konvergenz)}} \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_\Omega \underbrace{G(u)}_{=v} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = -\int_\Omega \underbrace{(G'(u))\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{=g_i} \varphi\ dx.$$

□

Satz 8.3.3. *(Substitutionsregel) Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen, $H \in C^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$ Diffeomorphismus mit $H(\Omega') = \Omega$ und $|dH|$, $|dH^{-1}| \le C_0 < \infty$. Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt dann $v := u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$, und*

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = \frac{\partial(u \circ H)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ H) \frac{\partial H_j}{\partial y_j} =: g_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Beweis. Wir zeigen $v, g_i \in L^p(\Omega')$, $1 \le i \le n$.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |v|^p \, dy = \int_{\Omega'} |u \circ H|^p \, dy &\overset{(x=H(y))}{=} \int_{\Omega} |u|^p \underbrace{|det(dH^{-1})|}_{\le C} \, dx \\ &\le C \cdot \|u\|^p_{L^p(\Omega)} ,\end{aligned}$$

analog

$$\int_{\Omega'} |g_i|^p \, dy \le C \cdot \int_{\Omega'} |\nabla u \circ H|^p \, dy \le C \cdot \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} , \quad 1 \le i \le n.$$

Beh.1. $g_i = \frac{\partial v}{\partial y_i}$, $\quad 1 \le i \le n$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. Wähle $\Omega_0' \subset\subset \Omega'$ mit $supp(\varphi) \subset \Omega_0'$, und setze $\Omega_0 = H(\Omega_0') \subset\subset \Omega$.

Da $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega_0)$, gibt es nach Satz 8.2.1 $(u_k) \subset C^1 \cap W^{1,1}(\Omega_0)$ mit $\|u_k - u\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \to 0 \ \ (k \to \infty)$. Nach der klassischen Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} (u_k \circ H) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy &= -\int_{\Omega'} \frac{\partial(u_k \circ H)}{\partial y_i} \varphi \, dy \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega'} (\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \circ H) \frac{\partial H_j}{\partial y_i} \varphi \, dy.\end{aligned}$$

Schätze ab

$$\begin{aligned}&|\int_{\Omega'} \Big((u_k \circ H) - (u \circ H)\Big) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy| \le C \cdot \int_{\Omega_0'} |(u_k - u) \circ H| \, dy \\ &\overset{(x=H(y))}{\le} C \cdot \int_{\Omega_0} |u_k - u| \, dx \le C \cdot |u_k - u|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \to 0 \ \ (k \to \infty).\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}&|\int_{\Omega'} \Big((\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}) \circ H\Big) \frac{\partial H_j}{\partial y_i} \varphi \, dy| \le C \cdot \int_{\Omega_0'} |(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}) \circ H| \, dy \\ &\overset{x=H(y)}{\le} C \cdot \int_{\Omega_0} |\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}| \, dx \le C \cdot \|u_k - u\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \to 0 \ \ (k \to \infty).\end{aligned}$$

$\square$

8.4 Fortsetzung von $W^{1,p}$-Funktionen, Spursatz

Betrachte zunächst den Zylinder

$$Q = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ |x'| < 1,\ |x_n| < 1\}$$

mit

$$Q_+ = \{x = (x', x_n) \in Q;\ x_n > 0\}$$

und

$$Q_0 = \{x = (x', x_n) \in Q;\ x_n = 0\}.$$

Lemma 8.4.1. *Sei $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Setze*

$$u^*(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann gilt $u^* \in W^{1,p}(Q)$, und $\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}$.

Beweis. Setze $g_i = (\frac{\partial u}{\partial x_i})^*,\ 1 \leq i \leq n-1$, bzw.

$$g_n(x', x_n) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n), & x_n > 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann gilt $u^*,\ g_i \in L^p(Q)$ mit

$$\|u^*\|^p_{L^p(Q)} = 2 \cdot \|u\|^p_{L^p(Q_+)}\,, \quad \text{für } p < \infty,$$

bzw.

$$\|u^*\|_{L^\infty(Q)} = \|u\|_{L^\infty(Q_+)}\,, \quad \text{falls } p = \infty,$$

d.h.

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} = 2^{\frac{1}{p}} \cdot \|u\|_{L^p(Q_+)} \leq 2 \cdot \|u\|_{L^p(Q)}\,.$$

Analog

$$\|g_i\|_{L^p(\Omega)} \leq 2 \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q_+)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Beh.1. $g_i = \frac{\partial u^*}{\partial x_i},\quad 1 \leq i \leq n.$

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Es gilt für $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx &= \int_{Q_+} u(x', x_n)\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_n)\Big)\, dx, \\ &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx, \quad \text{wobei } \psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n), \end{aligned}$$

bzw. für $i = n$:

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, dx = \int_{Q_+} u(x', x_n) \quad \underbrace{\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', -x_n)\Big)}_{= \frac{\partial \rho}{\partial x_n},\ \text{wo}\ \rho(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)} \quad dx$$

Sei $1 \leq i \leq n-1$. Wähle $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(t) = \eta(kt)$. Dann gilt $\psi_k := \eta_k(x_n)\psi \in C_0^\infty(Q_+)$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_k\, dx.$$

Beachte

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\eta_k \overset{(k\to\infty)}{\to} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \text{ f.ü.},\ \psi_k = \psi \cdot \eta_k \to \psi \text{ f.ü.}$$

Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\int_Q u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx &= \int_{Q_+} u\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = \lim_{k\to\infty}\int_{Q_+} u\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\, dx = \lim_{k\to\infty} -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi_k\, dx \\ &= -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\, dx = -\int_Q (\frac{\partial u}{\partial x_i})^*\varphi\, dx = -\int_Q g_i\varphi\, dx.\end{aligned}$$

Sei $i = n$. Beachte $\rho(x', 0) = 0$, $\rho \in C^1(\bar{Q_+})$, also

$$|\rho(x', x_n)| \leq C \cdot |x_n|. \tag{8.4.1}$$

Sei $\rho_k = \eta_k(x_n)\rho \in C_0^\infty(Q_+)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{Q_+} u\frac{\partial \rho_k}{\partial x_n}\, dx &= -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_n}\rho_k\, dx \overset{(k\to\infty)}{\to} -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot \underbrace{\rho}_{=\varphi(\cdot,x_n)-\varphi(\cdot,-x_n)}\, dx \\ &= -\int_Q g_n\varphi\, dx\end{aligned}$$

Schätze ab

$$\begin{aligned}|\int_{Q_+} u(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} - \frac{\partial \rho}{\partial x_n})\, dx| &\leq \int_{Q_+} |u|\cdot \underbrace{\frac{\partial \eta_k}{\partial t}(x_n)}_{\leq Ck}\cdot|\rho|\, dx + |\int_{Q_+} u(1-\eta_k)\frac{\partial \rho}{\partial x_n}\, dx| \\ &=: I_k + II_k.\end{aligned}$$

Wegen $\eta_k \overset{(k\to\infty)}{\to}\to 1$ f.ü. folgt $II_k \to 0\ \ (k\to\infty)$. Mit Definition von η_k und (8.4.1) folgt $|\frac{\partial \eta_k}{\partial t}\rho| \leq C$, und absolute Stetigkeit von $\int |u|\, dx$ ergibt

$$I_k \leq C\cdot \int_{\{x=(x',x_n);\ 0<x_n<\frac{2}{k}\}} |u|\, dx \overset{(k\to\infty)}{\to} 0.$$

Es folgt

$$-\int_Q g_n\varphi\, dx = \int_{Q_+} u\frac{\partial \rho}{\partial x_n}\, dx = \int_Q u^*\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, dx.$$

$\square$

Betrachte nun ein beliebiges offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega = \Gamma$.

Satz 8.4.1. *Sei Ω von der Klasse C^1 mit kompaktem Rand Γ. Dann gibt es einen stetigen, linearen Fortsetzungsoperator $E: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit* *i)* $(Eu)|_\Omega = u$,

ii) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(\Omega)}$,

iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

wobei $C = C(\Omega)$ *unabhängig von* p.

Beweis. Da Ω von der KLasse C^1, Γ kompakt, existieren Umgebungen $U_1, \dots U_L$ mit $\Gamma \subset \bigcup\limits_{l=1}^{L} U_l$ und C^1-Diffeomorphismen $H_l : Q \to U_l$ mit

$$H_l(Q_+) = U_l \cap \Omega,\ H_l(Q_0) = U_l \cap \Gamma, \qquad 1 \leq l \leq L. \tag{8.4.2}$$

Wähle $U_0 \subset \Omega$ offen mit $dist(U_0, \Gamma) > 0$ und mit $\bar{\Omega} \subset \bigcup\limits_{l=1}^{L} U_l$.
Weiter sei $(\varphi_l)_{0 \leq l \leq L}$ eine Zerlegung der Eins auf Ω bzgl. $(U_l)_{0 \leq l \leq L}$, mit

$$0 \leq \varphi_l \leq 1,\ supp(\varphi_l) \subset U_l,\ \sum_{l=0}^{L} \varphi_l = 1 \text{ in } \Omega.$$

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zerlege $u = \sum\limits_{l=0}^{L} u_l$, wobei $u_l = \varphi_l u$.

Beh.1. $u_0 = \varphi_0 \cdot u \in W^{1,p}(\Omega)$ *lässt sich durch*

$$v_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in \Omega \\ 0, & s \notin \Omega \end{cases}$$

fortsetzen zu $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und $\|v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Setze

$$g(x) = \begin{cases} (\nabla\varphi_0 u + \varphi_0 \nabla u)(x), & x \in \Omega, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Beachte $(\varphi \cdot \varphi_0) \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_0 \nabla\varphi \ dx = \int_\Omega u\varphi_0 \nabla\varphi \ dx &= \int_\Omega u\nabla(\varphi_0 \cdot \varphi) \ dx - \int_\Omega u \nabla\varphi_0 \varphi \ dx \\ &= -\int_\Omega \nabla u(\varphi_0 \cdot \varphi) \ dx - \int_\Omega u\nabla\varphi_0\varphi \ dx \\ &= -\int_\Omega g\varphi \ dx = -\int_{\mathbb{R}^n} g\varphi \ dx. \end{aligned}$$

Weiter gilt $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Beh.2. *Für $1 \le l \le L$ gibt es $v_l =: Eu_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften i)-iii) des Satzes.*

Beweis. Setze
$$v_l(x) = \begin{cases} \big((u_l \circ H_l)^* \circ H_l^{-1}\big)(x), & x \in U_l, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Analog zu Behauptung 1 gilt $v_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, da $supp(\varphi_l) \subset\subset U_l$, $supp(v_l) \subset\subset U_l$. Weiter folgt mit Satz 8.3.3
$$\begin{aligned}\|v_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|(u_l \circ H_l)^* \circ H_l^{-1}\right\|_{L^p(U_l)} &\overset{\text{(Subst.)}}{\le} C \cdot \|(u_l \circ H_l)^*\|_{L^p(Q)} \\ &\le C \cdot \|u_l \circ H_l\|_{L^p(Q_+)} \le C \cdot \|u_l\|_{L^p(U_l \cap \Omega)} \le C \cdot \|u\|_{L^p(\Omega)} .\end{aligned}$$
Analog zeigt man
$$\|\nabla v_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} , \qquad 1 \le l \le L.$$
□

Mit der Linearität der verwendeten Zerlegung, und mit den Behauptungen 1 und 2 folgt der Satz. □

Korollar 8.4.1. *Falls Ω von der Klasse C^1, $1 \le p < \infty$, so existiert zu jedem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine Folge $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u_k|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \ \ (k \to \infty)$.*

Bemerkung: $\partial\Omega$ muss nicht kompakt sein.

Beweis. Sei $\delta > 0$ vorgegeben

Beh.1. *$\exists \tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $supp(\tilde{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $\|\tilde{u} - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta$.*

Beweis. Sei $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $0 \le \eta \le 1$ und $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k}) \in C_0^\infty(B_{2k}(0))$ mit $\eta_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 1$, f.ü. Mit dominierter Konvergenz folgt
$$\|\eta_k u - u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(1-\eta_k)|^p \, dx \to 0 \ \ (k \to \infty).$$
Weiter gilt für $\nabla(\eta_k \cdot u) = u\nabla\eta_k + \eta_k \nabla u$ mit
$$\Big\|u \cdot \underbrace{|\nabla\eta_k|}_{\le \frac{C}{k}}\Big\|_{L^p} \le \frac{C}{k} \cdot \|u\|_{L^p} \to 0 \ \ (k \to \infty)$$
und
$$\|\eta_k \nabla u - \nabla u\|_{L^p} \to 0 \ \ (k \to \infty)$$
ebenfalls
$$\|\nabla(\eta_k u) - \nabla u\|_{L^p} \to 0 \ \ (k \to \infty),$$
also
$$\|\eta_k u - u\|_{W^{1,p}} \to 0 \ \ (k \to \infty).$$
Für ein $k \ge k_0(\delta)$ setze $\tilde{u} = \eta_k u$. □

Da $\Gamma \cap supp(\tilde{u})$ kompakt, liefert das Argument wie Beweis von Satz 8.4.1 eine Fortsetzung $\tilde{v} = E\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit i)-iii) aus Satz 8.4.1; insbesondere $\tilde{v}|_\Omega = \tilde{u}$ und $supp(\tilde{v}) \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Glättung durch Faltung liefert $\tilde{v}_\epsilon = \rho_\epsilon * \tilde{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\tilde{v}_\epsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \ \ (\epsilon \to 0)$ gemäss Satz 8.2.1. Wähle $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ mit $\|\tilde{v}_\epsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$. Es folgt

$$\|\tilde{v}_\epsilon|_\Omega - u\|_{W^{1,p}} \leq \underbrace{\|\tilde{v}_\epsilon - \tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}_{<\delta} + \underbrace{\|\tilde{v}|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}}_{=\|\tilde{u}-u\|_{W^{1,p}(\Omega)}<\delta} < 2\delta.$$

$\square$

Wann kann man für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sinnvoll von der „Spur“ $u|_{\partial\Omega}$ sprechen?

Lemma 8.4.2. *Sei $u \in W^{1,p}(Q_+), 1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $u|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$ wohldefiniert, und der „Spuroperator“*

$$W^{1,p}(Q_+) \ni u \mapsto u|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$$

ist linear und stetig.

Beweis. i) Sei $u \in C^1(Q)$. Für $x' \in Q_0$ gilt

$$u(x', 0) = u(x', x_n) - \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)\ ds$$

Es folgt nach Mittelung bzgl. x_n

$$|u(x', 0)| \leq \int_0^1 |u(x', x_n)|\ dx_n + \int_0^1 |\nabla u(x', s)|\ ds.$$

Für $1 \leq p < \infty$ folgt mit der Minkowski- Ungleichung

$$\begin{aligned}\|u(x',0)\|_{L^p(Q_0)} &\leq \int_0^1 \|u(\cdot, x_n)\|_{L^p(Q_0)}\ dx_n + \int_0^1 \|\nabla u(\cdot, x_n)\|_{L^p(Q_0)}\ dx_n \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|u\|_{L^p(Q_+)} + \|\nabla u\|_{L^p(Q_+)} = \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.\end{aligned}$$

ii) Sei $u \in W^{1,p}(Q),\ 1 \leq p < \infty$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $u_k \in W^{1,p} \cap C^1(Q)$ mit $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \to 0 \ \ (k \to \infty)$. Mit i) folgt

$$\|u_k|_{Q_0} - u_l|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \leq \|u_k - u_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} \overset{(k,l\to\infty)}{\to} 0.$$

Da $L^p(Q_0)$ vollständig ist, existiert $u|_{Q_0} := \lim\limits_{k\to\infty} u_k|_{Q_0} \in L^p(Q_0)$, und

$$\begin{aligned}\|u|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} &= \lim_{k\to\infty} \|u_k|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{W^{1,p}(Q_+)} = \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.\end{aligned}$$

iii) Sei $u \in W^{1,p}(Q_+),\ 1 \leq p < \infty$. Betrachte $u^* \in W^{1,p}(Q)$ gemäss Lemma 8.4.1 und benutze ii)!

iv) Sei $u \in W^{1,\infty}(Q_+)$. Da $Q_+ \subset\subset \mathbb{R}^n$, gilt $u \in W^{1,p}(Q_+)$, $\forall p < \infty$, und

$$\|u|_{Q_0}\|_{L^p(Q_0)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(Q_+)} .$$

Mit $p \to \infty$ folgt die Behauptung.

□

Für ein Ω der Klasse C^1 mit kompaktem Rand $\partial\Omega = \Gamma$ kann man den „Spurraum“ $L^p(\Gamma)$ mittels lokaler „Kanten“ $H : Q \to \mathbb{R}^n$ mit $H(Q_+) = \Omega \cap U$, $H(Q_0) = \Gamma \cap U$ erklären. Die durch verschiedene Überdeckungen von Γ definierten Normen auf $L^p(\Gamma)$ sind äquivalent.

Satz 8.4.2 (Spursatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, von der Klasse C^1, und sei der Rand $\partial\Omega$ kompakt. Dann ist der Spuroperator*

$$W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto u|_\Gamma \in L^p(\Gamma)$$

für alle $1 \leq p \leq \infty$ wohldefiniert und stetig; d.h.

$$\|u|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Beweis. Übung □

Bemerkung 8.4.1. *i) Der Spuroperator ist nicht surjektiv (Für $p = \infty$ ist dies offensichtlich). Daher definiert man für $1 \leq p \leq \infty$ als Spurraum*

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = \{u|_\Gamma ; u \in W^{1,p}(\Omega)\}.$$

ii) Für $\Omega \in C^1$ mit kompaktem Rand Γ folgt

$$H_0^1(\Omega) \subset \{u \in H^1(\Omega);\ u|_\Gamma = 0 \text{ f.ü. bzgl. } \mathcal{H}^{n-1}\}$$

D.h. die schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Dirichlet Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

erfüllt die Randbedingung $u = 0$ fast überall.

Betrachte nun auch Randdaten $u_0|_\Gamma$, $u_0 \in H^1(\Omega)$.

Satz 8.4.3. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Dann gilt*

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \{u_0 \in H^1(\Omega);\ \Delta u_0 = 0\}$$

und für $u = u_0 + u_1 \in H^1(\Omega)$ mit $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta u_0 = 0$ gilt

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 .$$

D.h. zu jedem $u \in H^1(\Omega)$ gibt es eine eindeutige harmonische Fortsetzung u_0 von $u|_\Gamma$, und u_0 hat minimale Dirichlet-Energie

$$E(u_0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2\ dx = \min_{v \in H^1(\Omega),\ v|_\Gamma = u|_\Gamma} E(v).$$

Beweis. Zu $u \in H^1(\Omega)$ sei $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Problems

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega \overbrace{\nabla u}^{\in L^2} \nabla\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{8.4.3}$$

gemäss Riesz, Satz 4.3.2. Setze $u_0 = u - u_1$. Dann gilt wegen (8.4.4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overbrace{(-\Delta u_0)}^{\text{Distr.-Abl.}} \varphi \, dx &= \int_\Omega \overbrace{\nabla u_0}^{\in L^2} \nabla\varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega \nabla u_1 \nabla\varphi \, dx = 0,\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; d.h. $\Delta u_0 = 0$. Schliesslich

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla(u_0 + u_1)\|_{L^2}^2 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + 2 \int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1 \, dx.$$

Da $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, existiert $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_k \to u_1$ in $H_0^1(\Omega)$, also

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_1 \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi_k \, dx \overset{(8.4.3)}{=} 0. \tag{8.4.4}$$

Mit (8.4.4) folgt auch, dass $u = 0$ für $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$; d.h. die Zerlegung von $H^1(\Omega)$ ist direkt. □

Korollar 8.4.2. $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ u\big|_\Gamma = 0$ *fast überall*$\}$.

8.5 Sobolev-Einbettung, $p < n$

Betrachte zunächst $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Satz 8.5.1 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.** *Sei* $1 \le p < n$ *und sei* $p^* > p$ *gegeben durch* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$*; d.h.* $p^* = \frac{np}{n-p}$*. Dann gilt* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$*, und*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$*, wo* $C = C(n,p)$*.*

Bemerkung: p^* heisst Sobolev-Exponent.

Bemerkung 8.5.1. *Bei Skalierung* $u \mapsto u_R(x) = u(Rx)$ *gilt*

$$\begin{aligned}\|\nabla u_R\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^p \, dx = R^{p-n} \|\nabla u\|_{L^p}^p, \\ \|u_R\|_{L^q}^q &= R^{-n} \|u\|_{L^q}^q.\end{aligned}$$

Falls es eine Beziehung $\|u\|_{L^q} \le C \cdot \|\nabla u\|_{L^p}$ *gibt, so auch*

$$R^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q} = \|u_R\|_{L^q} \le C \cdot \|\nabla u_R\|_{L^p} = C \cdot R^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p},$$

für alle $R > 0$, also

$$R^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-1)} \leq C(n), \quad \forall R > 0, \quad \text{d.h. } \frac{1}{p}-\frac{1}{n}=\frac{1}{q}.$$

p^* ist somit der einzige mögliche Exponent.

Beweis von Satz 8.5.1. i) Betrachte zunächst $p = 1$ und $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für festes $i \in \{1,\dots,n\}$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ schätze ab

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= |u(x_1,\dots,x_n) - \lim_{s\to-\infty} u(x_1,\dots,x_{i-1},s,x_{i+1},\dots,x_n)| \\
&= |\int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},s,x_{i+1},\dots,x_n)\, ds| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1,\dots,x_{i-1},s,x_{i+1},\dots,x_n)|\, ds =: f_i(x_i'),
\end{aligned}$$

wobei $x_i' = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $1 \leq i \leq n$. Es folgt

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}}. \tag{8.5.1}$$

Die gewünschte Ungleichung folgt aus

Beh.1. $\prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$\left\| \prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}} \right\|_{L^1} \leq \prod_{i=1}^n \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_i(y))\, dy \Big)^{\frac{1}{n-1}} \leq C \cdot \|\nabla u\|_{L^1}^{\frac{n}{n-1}}.$$

Beweis. (Induktion nach n)
$n = 2$: Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{i=1}^2 f_i(x_i')\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2) \cdot f_2(x_1)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \prod_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} f_i(x)\, dx = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

$n \to n+1$: Für festes x_{n+1} folgt mit Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n+1} \big(f_i(x_i')\big)^{\frac{1}{n}}\, dx &\overset{(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1)}{\leq} \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}}\, dx \Big)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\overset{\text{Ind.-Vor.}}{\leq} \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(y, x_{n+1})\, dy \right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Mit Hölder folgt erneut

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i(y, x_{n+1})\, dy \right)^{\frac{1}{n}} dx_{n+1} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}},$$

da $1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-mal}$. Also

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big(\prod_{i=1}^{n+1} f_i(x_i')\Big)^{\frac{1}{n}}\ dx_1 \ldots dx_{n+1} \le \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|^{\frac{1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|\nabla u\|^{\frac{n+1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

$\square$

Es folgt für alle $n \ge 2$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{8.5.2}$$

ii) Sei $1 < p < n$, und sei zunächst weiter $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Betrachte $v = u^t$ für ein noch zu bestimmendes $t \ge 1$. Sei $q = \frac{p}{p-1}$ zu p konjugiert. Mit (8.5.2) folgt

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= t \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\nabla u|}_{\in L^p} \underbrace{|u|^{t-1}}_{\in L^q}\ dx \\ &\le t \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ \|u\|^{t-1}_{L^{(t-1)q}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

Wähle t so, dass

$$\frac{tn}{n-1} = (t-1)q = \frac{(t-1)p}{p-1},$$

d.h.

$$t\Big(\frac{n}{n-1} - \frac{p}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1} = 0$$

oder

$$t = \frac{p(n-1)}{p(n-1) - n(p-1)} = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

und

$$\frac{tn}{n-1} = \frac{pn}{n-p} = p^*,\ \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Abschätzung (8.5.3) liefert

$$\|u\|_{L^{p^*}} \le t\ \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{p(n-1)}{n-p}\ \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

iii) Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 8.2.1 gibt es $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - u_k\|_{W^{1,p}} \to 0$ $(k \to \infty)$. Mit (8.5.2), bzw. (8.5.3) folgt

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}}(\mathbb{R}^n) \le C\ \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0\ (k, l \to \infty),$$

also $u_k \overset{(k\to\infty)}{\to} u$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, und $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\ \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

$\square$

Bemerkung 8.5.2. *Für $p = 1$ gibt es eine enge Beziehung zwischen Satz 8.5.1 und der isoperimetrischen Ungleichung*

$$(\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n)\ \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \tag{8.5.4}$$

für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ der Klasse C^1.

Sei $0 \leq u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit nur endlich vielen kritischen Punkten in $supp(u)$. Nach lokaler Substitution $\Phi(x', x_n) = (x', u(x))$ (in geeigneten Koordinaten, so dass $\frac{\partial u}{\partial x_n} \neq 0$) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\ dx = \int_0^\infty \Big(\int_{\{x; u(x)=t\}} \partial\mathcal{H}^{n-1} \Big)\ dt. \tag{8.5.5}$$

Setze $\Omega(t) = \{x; u(x) > t\}$, $t \geq 0$. Dann

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{\Omega(t)}(x)\ dt,$$

und mit der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} &\leq \int_0^\infty \left\|\chi_{\Omega(t)}\right\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}\ dt = \int_0^\infty \left(\mathcal{L}^1(\Omega(t))\right)^{\frac{n-1}{n}}\ dt \\ &\overset{(8.5.4)}{\leq} C(n) \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t))\ dt \overset{(8.5.5)}{\leq} C(n)\ \|\nabla u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Der Grenzfall $p = n$: Nach Beispiel 8.1.2.ii) gilt

$$\log\log(\frac{1}{|x|}) \in W^{1,n}(B_{\frac{1}{2}}(0)), \quad n \geq 2.$$

D.h. $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Bemerkung 8.5.1 zeigt, dass keine Ungleichung der Art

$$\|u\|_{L^q} \leq C\ \|\nabla u\|_{L^n}$$

für ein $q < \infty$ bestehen kann.

Satz 8.5.2. *$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ für $n \leq p < \infty$, und*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\, \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mit (8.5.3) folgt

$$\|u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}} \leq t \int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{|\nabla u|}^{\in L^n}\ \underbrace{|u|^{t-1}}_{\in L^{\frac{n}{n-1}}}\ dx \leq t\ \|\nabla u\|_{L^n}\ \|u\|^{t-1}_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}}.$$

Für $t = n$ folgt

$$\begin{aligned} \|u\|^n_{L^{\frac{n^2}{n-1}}} &\leq n\ \|\nabla u\|_{L^n} \|u\|^{n-1}_{L^n} \overset{\text{Young}}{\leq} \|\nabla u\|^n_{L^n} + (n+1)\ \|u\|^n_{L^n} \\ &\leq C\ \|u\|^n_{W^{1,n}}. \end{aligned}$$

Iteriere mit $t = n+1,\, n+2,\, \ldots$ Es folgt $\|u\|_{L^{p_k}} \le C_k \,\|u\|_{W^{1,n}}$ für eine Folge von Exponenten $p_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Interpolation liefert die Behauptung für jedes $q \ge n$, wobei $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1-\alpha}{p_k}$ mit $\alpha = \alpha_k \in [0,1]$ für ein $p_k \ge q$. Also

$$\|u\|_{L^q} \le \|u\|_{L^n}^{\alpha} \;\|u\|_{L^{p_k}}^{1-\alpha} \le C\;\|u\|_{W^{1,n}}\,.$$

□

Satz 8.5.3. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $1 \le p < n$ mit Sobolev-Exponent p^*, wo $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Dann gilt $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \le q \le p^*$, und die Einbettung ist kompakt für $q < p^*$.*

Bemerkung 8.5.3. *Wegen Skalierungsinvarianz nach Bemerkung 8.5.1 können wir für $q = p^*$ keine Kompaktheit erwarten. Sei z.B. $\Omega = B_1(0)$, $u \in C_0^\infty(B_1(0))$. Für $R \to \infty$ betrachte $u_R(x) = R^{\frac{n-p}{p}}\; u(Rx) \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{R}}(0))$ mit*

$$\|\nabla u_R\|_{L^p}^p = \underbrace{R^{n-p+p-n}}_{=1}\;\|\nabla u\|_{L^p}^p\,,\;\; u_R \xrightarrow{w} 0 \textit{ in } W^{1,p}(B_1(0)) \quad (R \to \infty).$$

Beweis von Satz 8.5.3. i) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nach Satz 8.4.1 gibt es $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $v|_\Omega = u$ und mit Satz 8.5.1 folgt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\;\|\nabla v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\;\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, folgt $u \in L^q(\Omega)$, $1 \le q \le p^*$ und

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C(n,p,q,\Omega)\;\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

ii) Sei $\mathcal{F} \subset W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. Wähle $\tilde\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\bar\Omega \subset \tilde\Omega$. Nach Satz 8.3.1 gilt

$$\sup_{v=Eu,\;u\in\mathcal{F}} \Big\|\underbrace{\tau_h v}_{=v(\cdot+h)} - v\Big\|_{L^p(\Omega)} \le C \cdot \underbrace{\sup_{v=Eu,\;u\in\mathcal{F}} \|\nabla v\|_{L^p(\tilde\Omega)}}_{\le C' < \infty} \cdot |h|$$

für alle $|h| < dist(\Omega, \partial\tilde\Omega)$. Mit dem Satz von Fréchet-Kolmogorov (Satz 6.3.2) folgt relative Kompaktheit von $\mathcal{F}$ in $L^p(\Omega)$.

Sei nun $1 \le q < p^*$ beliebig, $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. OBdA gelte $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$. Für $q \le p$ schätze ab (da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$)

$$\|u_k - u\|_{L^q} \le C\;\|u_k - u\|_{L^p} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Für $p < q < p^*$ wähle $0 < \alpha < 1$ mit $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$ und schätze ab mit Hölder

$$\|u_k - u\|_{L^q} \le \underbrace{\|u_k - u\|_{L^p}^{\alpha}}_{\to 0 (k\to\infty)}\;\underbrace{\|u_k - u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha}}_{\le C} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□

Korollar 8.5.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Dann gilt $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \le q < \infty$, und die Einbettung ist kompakt für jedes q.*

Beweis. $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $\forall p < n$. □

8.6 Sobolev-Einbettung, $p > n$

8.6.1 Hölder-Räume:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Definition 8.6.1. *u ist* **Hölder stetig** *mit Exponent α, falls*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\ |x - y|^\alpha, \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Der Ausdruck

$$[u]_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x \neq y x, y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

heisst Hölder-(Halb-) Norm. Setze

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) := \{u \in C^0(\bar{\Omega}); u \textit{ ist Hölder stetig mit Exponent } \alpha\}.$$

Bemerkung 8.6.1. *Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, so ist*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}}$$

eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Beispiel 8.6.1. *i) $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, genau dann, wenn u Lipschitz stetig ist.*

ii) Sei $\Omega =]0, 1[$; dann ist $u(x) = x^\alpha \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

iii) Für $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ gilt $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$, wo $C^{0,0}(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$.

Satz 8.6.1. *$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ist vollständig, $0 < \alpha \leq 1$.*

Beweis. Sei $(u_k) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ eine Cauchy-Folge. Dann ist (u_k) auch Cauchy-Folge in $C^0(\bar{\Omega})$, und es existiert $u \in C^0(\bar{\Omega})$ mit

$$\|u_k - u\|_{C^0} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Beh.1. $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Beweis. Für $x \neq y \in \Omega$ schätze ab

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{k \to \infty} |u_k(x) - u_k(y)| \leq \underbrace{\sup_k [u_k]_{C^{0,\alpha}}}_{=C<\infty} |x - y|^\alpha.$$

□

Beh.2. $u_k \to u \quad (k \to \infty)$ *in* $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Beweis. Für $x \neq y \in \Omega$ schätze ab

$$\begin{aligned} \frac{|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \lim_{l \to \infty} \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \overline{\lim_{l \to \infty}} [u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}} \to 0 \quad (k \to \infty) \end{aligned}$$

gleichmässig bzgl. $x \neq y \in \Omega$. Nach Übergang zum Supremum bzgl. $x \neq y \in \Omega$ folgt die Behauptung. □

Satz 8.6.2. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann ist für $0 \le \beta < \alpha \le 1$ die Einbettung*

$$C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar\Omega)$$

kompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{F} \subset C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ beschränkt. Dann ist $\mathcal{F} \subset C^0(\bar\Omega)$ beschränkt.

Beh.1. *$\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.*

Beweis. Für $x \neq y$ schätze ab

$$|u(x) - u(y)| \le \sup_{v\in\mathcal{F}} [v]_{C^{0,\alpha}} |x-y|^\alpha, \qquad \forall u \in \mathcal{F}.$$

□

Mit Satz 6.3.1 (Arzéla-Ascoli) folgt, $\mathcal{F}$ ist relativ kompakt in $C^0(\bar\Omega)$.

Beh.2. *$\mathcal{F} \subset C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ ist relativ kompakt.*

Beweis. Sei $(u_k) \subset \mathcal{F}$. OBdA $u_k \to u (k \to \infty)$ in $C^0(\bar\Omega)$. Zu $\delta > 0$ wähle $k_0 = k_0(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u_k - u_l\|_{C^0} < \delta^\alpha, \qquad \forall k, l \ge k_0.$$

Für $x \neq y \in \Omega$, $k, l \ge k_0(\delta)$ schätze ab

$$\frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x-y|^\beta} \le \begin{cases} 2\ \|u_k - u_l\|_{C^0}\ \delta^{-\beta} \le 2\delta^{\alpha-\beta}, & \text{falls } |x-y| \ge \delta \\ [u_k - u_l]_{C^{0,\alpha}}\ |x-y|^{\alpha-\beta} \le C\ \delta^{\alpha-\beta}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $\delta \to 0$ folgt, dass (u_k) eine Cauchy-Folge in $C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ ist. Da $C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ nach Satz 8.6.1 vollständig ist, folgt $u \in C^{0,\beta}(\bar\Omega)$ und

$$\begin{aligned}\frac{|(u_k - u)(x) - (u_k - u)(y)|}{|x-y|^\beta} &= \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(y)|}{|x-y|^\beta} \\ &\le \overline{\lim_{l\to\infty}} [u_k - u_l]_{C^{0,\beta}} \to 0 \qquad (k \to \infty)\end{aligned}$$

gleichmässig in $x \neq y \in \Omega$, d.h.

$$[u_k - u]_{C^{0,\beta}} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

□

Bemerkung 8.6.2. *Für $0 < \alpha \le 1$ liegt $C^\infty(\bar\Omega)$ nicht dicht in $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.*

Beweis. Betrachte z.B. $\Omega =]0,1[$, $u(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Nimm an $\exists (u_k) \subset C^1([0,1])$ mit

$$\|u_k - u\|_{C^{0,\alpha}} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Beachte, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $0 < x < 1$ gilt

$$|u_k(x) - u_k(0)| \le \underbrace{\sup|u_k'|}_{=C_k<\infty} \cdot |x|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
[u_k - u]_{C^{0,\alpha}} &\ge \sup_{0<x<1} \frac{|(u_k-u)(x) - (u_k-u)(0)|}{|x|^\alpha} \\
&= \sup_{0<x<1} \Big| \underbrace{\frac{u_k(x) - u_k(0)}{|x|^\alpha}}_{\le C_k\ |x|^{1-\alpha} \to 0 \qquad (x\to 0)} - 1 \Big| \ge 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme. ☐

Wir können nun den Sobolev-Einbettungssatz auf $\mathbb{R}^n$ formulieren.

Satz 8.6.3. *Sei $p > n$. Dann gilt $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, und mit einer von u unabhängigen Konstanten gilt*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le C\ \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Zum Beweis benützen wir eine äquivalente Integral-Norm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

8.6.2 Morrey-Companato Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ setze

$$\Omega_r(x_0) = B_r(x_0) \cap \Omega.$$

Definition 8.6.2. Ω *heisst* **vom Typ** A *für ein $A > 0$, falls für alle $x_0 \in \Omega$, $0 < r < \min\{1, diam(\Omega)\}$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0)) \ge A\ r^n.$$

Beispiel 8.6.2. *Jedes $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 ist vom Typ A. Für Ω vom Typ A, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r < r_0(\Omega)$ setze*

$$u_{x_0,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} u\ dx =: \fint_{\Omega_r(x_0)} u\ dx.$$

Definition 8.6.3. *Für $1 \le p < \infty$, $\lambda > 0$ setze*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega); [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x_0\in\Omega 0<r<r_0} \Big(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p\ dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}.$$

Satz 8.6.4. $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ *ist vollständig bzgl. der Norm*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \|u\|_{L^p} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Beweis. Übung. ☐

Satz 8.6.5 (Campanato)**.** *Sei* Ω *von Typ* A *für ein* $A > 0$*, und seien* $1 \leq p < \infty$*,* $\lambda > n$*,* $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$*. Dann gilt* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \overset{stetig}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *und*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \ \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}, \qquad \forall u \in \mathcal{L}^{p,\lambda},$$

mit einer von u *unabhängigen Konstanten* C*.*

Satz 8.6.3 lässt sich auf Satz 8.6.5 zurückführen mit

Satz 8.6.6 (Poincaré)**.** *Sei* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leq p < \infty$*. Dann gilt für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $r > 0$

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx \leq C \ r^p \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \ dx.$$

Beweis von Satz 8.6.3. Mit Satz 8.6.5 folgt

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p,p}(R^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n), \qquad \alpha = \frac{p-n}{p} = 1 - \frac{n}{p}.$$

□

Beweis von Satz 8.6.6. Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. OBdA $x_0 = 0$, $B_r(0) = B_r$. Schätze ab

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u(x) - u_{x_0,r}|^p \ dx &= \int_{B_r} \Big|\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r)} \int_{B_r} (u(x) - u(y)) \ dy\Big|^p \ dx \\
&= C \ r^{-np} \int_{B_r} \left| \int_{B_r} \underbrace{1}_{\in L^{\frac{p}{p-1}}} \underbrace{(u(x) - u(y))}_{\in L^p} \ dy \right|^p \ dx \\
&\overset{\text{(Hölder)}}{\leq} C \ \underbrace{r^{-np+n(p-1)}}_{=r^{-n}} \int_{B_r} \int_{B_r} |u(x) - u(y)|^p \ dy \ dx.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)|^p &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(y-x)) \ dt\Big|^p \\
&\leq |x - y|^p \left(\int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)| \ dt \right)^p \\
&\leq \underbrace{|x - y|^p}_{\leq 2r} \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p \ dt
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u(x) - u_{x_0,r}|^p \ dx &\leq C \ r^{p-n} \int_{B_r} \int_{B_r} \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p \ dt \ dx \ dy \\
&\overset{\text{Symm. } x,y}{\leq} C \ r^{p-n} \int_0^{1/2} \int_{B_r} \int_{B_r} |\nabla u(ty + (1-t)x)|^p \ dx \ dy \ dt \\
&\overset{(z = ty + (1-t)x)}{\leq} C \ r^{p-n} \int_0^{1/2} \int_{B_r} \int_{B_{(1-t)r}(ty)} |\nabla u(z)|^p \ dz \ dy \ dt \\
&\leq C \ r^p \int_{B_r} |\nabla u(z)|^p \ dz.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 8.6.5. Sei $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

i) Konstruktion eines geeigneten Repräsentanten.
Zu $x_0 \in \Omega$, $0 < r < r_0(\Omega) = min\{1, diam(\Omega)\}$ setze $r_i = 2^{-i}\ r$ und betrachte $(u_{x_0,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$.
Beh.1. $(u_{x_0,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *ist Cauchy-Folge.*

Beweis. Schätze ab

$$\begin{aligned}|u_{x_0,r_{i+1}} - u_{x_0,r_i}| &\le \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_{r_{i+1}}(x_0))} \int_{\Omega_{r_{i+1}}(x_0)} |u(x) - u_{x_0,r_i}|\ dx \\ &\le C\ r_{i+1}^{-n} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} \underbrace{1}_{\in L^{\frac{p}{p-1}}}\ \underbrace{|u(x) - u_{x_0,r_i}|}_{\in L^p}\ dx \\ &\overset{\text{(Hölder)}}{\le} C\ r_i^{-n+n\cdot\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u - u_{x_0,r_i}|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_{r_i}(x_0))} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u - u_{x_0,r_i}|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\ r_i^{\frac{\lambda-n}{p}} \left(r_i^{-\lambda} \int_{\Omega_{r_i}(x_0)} |u - u_{x_0,r_i}|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\ r_i^{\alpha}\ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}\end{aligned} \tag{8.6.1}$$

Also

$$\begin{aligned}|u_{x_0,r_{i+k}} - u_{x_0,r_i}| &\le \sum_{j=1}^{k} |u_{x_0,r_{i+j}} - u_{x_0,r_{i+j-1}}| \le C\ \sum_{j=1}^{k} r_{i+j}^{\alpha}\ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \\ &\le C r_i^{\alpha} [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \to 0 \qquad (i \to \infty,\ k = k_i \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

□

Folge: Für alle $x_0 \in \Omega$ existiert $\bar{u}(x_0) = \lim_{i\to\infty} u_{x_0,r_i}$, und

$$|\bar{u}(x_0) - u_{x_0,r_i}| \le C\ r_i^{\alpha}\ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}. \tag{8.6.2}$$

Wegen Absolutstetigkeit des Integrals ist für festes $r > 0$ die Funktion $x_0 \mapsto u_{x_0,r}$ stetig. Gemäss (8.6.2) konvergiert $(u_{x_0,r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen $\bar{u}$; also ist $\bar{u}$ stetig. Schliesslich gilt mit dem Differentiationssatz von Lebesgue

$$\bar{u}(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} u\ dx = u(x_0)$$

fast überall. D.h. $\bar{u}$ ist Repräsentant von u. OBdA $\bar{u} \equiv u$ (überall).

ii) Wir zeigen: $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, und

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} \le C\ \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Zunächst folgt mit (8.6.2) für $r = r_0$

$$\begin{aligned}\sup_{x_0}|u(x_0)| &\leq \sup_{x_0}|u_{x_0,r}| + \sup_{x_0}|u(x_0) - u_{x_0,r}| \\ &\leq C \ \|u\|_{L^p} + C \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \leq C \ \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} .\end{aligned}$$

Beh.2. *$u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, und für $x_0 \neq y_0 \in \Omega$ mit $0 < |x_0 - y_0| = r \leq \frac{r_0}{2}$ gilt*

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq C \ r^\alpha \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Beweis. Schätze ab mit (8.6.2)

$$\begin{aligned}|u(x_0) - u(y_0)| &\leq |u(x_0) - u_{x_0,2r}| + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| + |u_{y_0,r} - u(y_0)| \\ &\leq C \ r^\alpha \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}|.\end{aligned}$$

Weiter folgt wie in (8.6.1)

$$\begin{aligned}|u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(y_0))} \int_{\Omega_r(y_0)} |u - u_{x_0,2r}| \ dx \\ &\leq C \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_{2r}(y_0))} \int_{\Omega_{2r}(y_0)} |u - u_{x_0,2r}| \ dx \\ &\overset{\text{(Hölder)}}{\leq} C \Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_{2r}(x_0))} \int_{\Omega_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}|^p \ dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{\text{(wie in Beh.1)}}{\leq} C \ r^\alpha \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}\end{aligned}$$

□

Es folgt

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \leq C \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

□

Satz 8.6.7. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ vom Typ A für ein $A > 0$, und seien $1 \leq p < \infty$, $\lambda > n$, $\alpha = \frac{\lambda - n}{p} \leq 1$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \cong C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Beweis. i) $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ folgt mit Satz 8.6.5.

ii) Da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, gilt

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Weiter gilt für $x_0 \in \Omega$, $0 < r \leq r_0$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx &\leq \int_{\Omega_r(x_0)} \Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega_r(x_0))} \int_{\Omega_r(x_0)} \underbrace{|u(x) - u(y)|^p}_{\leq C \ r^{\alpha p} \ [u]^p_{C^{0,\alpha}}} \ dy \Big) \ dx \\ &\leq C \ \underbrace{r^{\alpha p + n}}_{= r^\lambda} \ [u]^p_{C^{0,\alpha}}.\end{aligned}$$

D.h.

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0,\ 0<r\le r_0} \Big(r^{-\lambda} \int_{\Omega_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le C\ [u]_{C^{0,\alpha}}.$$

□

Satz 8.6.8. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $n < p < \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$$

für $0 \le \alpha \le \alpha^* = 1 - \frac{n}{p}$, und die Einbettung ist kompakt für $0 \le \alpha < \alpha^*$.

Beweis.

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{E,\ \text{Satz } 8.4.1}{\longrightarrow} W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{Satz } 8.6.3}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha^*}(\mathbb{R}^n)$$
$$\hookrightarrow C^{0,\alpha^*}(\bar\Omega) \overset{(\alpha<\alpha^*,\ \text{Satz } 8.6.2,\ \text{kompakt})}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha}(\bar\Omega).$$

□

Anwendung: Variante der Poincaré-Ungleichung

Satz 8.6.9. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, von der Klasse C^1, und sei $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $C = C(n, p, \Omega)$ mit*

$$\int_\Omega |u - \bar u_\Omega|^p \ dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei

$$\bar u_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u \ dx.$$

Beweis. (indirekt) Nimm an, es gibt $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$1 = \int_\Omega |u_k - \bar u_{k,\Omega}|^p \ dx \ge k \int_\Omega |\nabla u_k|^p \ dx,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Folge $v_k := u_k - \bar u_{k,\Omega} \in W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\nabla v_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0 \text{ in } L^p(\Omega).$$

Nach Satz 8.5.3 ist $(v_k) \subset L^p(\Omega)$ relativ kompakt, also existiert ein $v \in L^p(\Omega)$ mit $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$, $k \in \Lambda$. Weiter folgt $v \in W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega |v|^p \ dx = 1,\ \ \bar v_\Omega = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} \bar v_{k,\Omega} = 0,$$
$$\nabla v = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} \nabla v_k = 0.$$

Falls $n > p$, so folgt mit Satz 8.5.3, dass $v \in L^{p^*}(\Omega)$, wo $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Mit

$$\nabla v = 0 \in \bigcap_{1\le q\le\infty} L^q(\Omega),$$

folgt $v \in W^{1,q}$ für ein $q > n$. Mit Satz 8.6.8 folgt $v \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, d.h. $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ist lokal Lipschitz. Mit Korollar 8.3.1 folgt nun jedoch $v \equiv$ const. $= \bar v_\Omega = 0$, und wir erhalten den gewünschten Widerspruch. □

Korollar 8.6.1. *(Dirichlet Growth-Theorem, Morrey) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $1 \le p < \infty$. Sei weiter $u \in W^{1,p}(\Omega)$, und es gelte*

$$\int_{\Omega_r(x)} |\nabla u|^p \ dx \le M^p \ r^{n-p+p\alpha} \tag{8.6.3}$$

mit $0 < \alpha \le 1$, $M \ge 0$, gleichmässig in $x_0 \in \Omega$, $0 < r \le r_0$. Dann gilt $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, und $[u]_{C^{0,\alpha}} \le C \cdot M$.

Beweis. OBdA $\Omega = \mathbb{R}^n$. (Die nach Satz 8.4.1 konstruierte Fortsetzung $v = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt offenbar ebenfalls (8.6.3).) Mit Satz 8.6.6 (Poincaré) folgt

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx \le C \ r^p \ \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \ dx \le C \ M^p \ r^{n+p\alpha};$$

d.h. $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ für $\lambda = n + p\alpha$ und

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x_0, 0<r<r_0} \Big(r^{-\lambda} \int_{B_r(x_0)} |u - u_{x_0,r}|^p \ dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le C \cdot M.$$

Da $\lambda > n$ folgt mit Satz 8.6.5, dass $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ und

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \le C \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \le C \cdot M.$$

□

8.6.3 Schwache und klassische Differenzierbarkeit

Satz 8.6.10. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, und sei $n < p < \infty$. Dann existiert $C = C(n, p, \Omega)$, so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alle $y_0 \in B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ gilt*

$$|u(x_0) - u(y_0)| \le C \ (r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \ dx)^{\frac{1}{p}}. \tag{8.6.4}$$

Beweis. Nach Satz 8.6.8 gilt $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$, insbesondere ist jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ stetig, und für alle $x_0 \in \Omega$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$ gilt

$$u(x_0) = \lim_{i \to \infty} u_{x_0, r_i},$$

wobei $r_i = 2^{-i} \ r, i \in \mathbb{N}_0$.

Für $y_0 \in B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ schätze ab

$$|u(x_0) - u(y_0)| \le |u(x_0) - u_{x_0,2r}| + |u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| + |u_{y_0,r} - u(y_0)|$$

und weiter

$$|u(x_0) - u_{x_0,2r}| = \lim_{i \to \infty} |u_{x_0,r_i} - u_{x_0,2r}| \le \sum_{i=0}^{\infty} |u_{x_0,r_i} - u_{x_0.r_{i-1}}|$$

Mit (8.6.1) und Satz 8.6.6 folgt

$$
\begin{aligned}
|u_{x_0,r_i} - u_{x_0,r_{i-1}}| &\le C \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{r_{i-1}}(x_0))} \int_{B_{r_{i-1}}(x_0)} |u - u_{x_0,r_{i-1}}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \left(r_{i-1}^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{r_{i-1}}(x_0))} \int_{B_{r_{i-1}}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \left(2^{(1-i)(p-n)} r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}};
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
|u(x_0) - u_{x_0,2r}| &\le C \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{2^{\frac{(1-i)(p-n)}{p}}}_{=C\ 2^{-\frac{p-n}{p}}} \left(r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \left(r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Analog

$$
\begin{aligned}
|u(y_0) - u_{y_0,r}| &\le C \left(r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(y_0))} \int_{B_r(y_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \left(r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Schliesslich gilt

$$
\begin{aligned}
|u_{x_0,2r} - u_{y_0,r}| &\le \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(y_0))} \int_{B_r(y_0)} |u - u_{x_0,2r}| \, dx \\
&\le C \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |u - u_{x_0,2r}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \left(r^p \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

□

Satz 8.6.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ für ein $p > n$. Dann ist (der stetige Repräsentant von) u in fast allen $x \in \Omega$ klassisch differenzierbar und das klassisch definierte Differential repräsentiert die schwache Ableitung von u.*

Beweis. OBdA $p < \infty$. Sei $x_0 \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkt der schwachen Ableitung $\nabla u \in L^p(\Omega)$. D.h.

$$
\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u(x_0) - \nabla u(x)|^p \, dx \to 0 \qquad (r \to 0). \tag{8.6.5}
$$

Sei $\overline{B_{2r_0}(x_0)} \subset \Omega$, $C_0 = C_0(n, p, B_{2r_0}(x_0))$ die Konstante aus Satz 8.6.10. Betrachte die Funktion

$$
v(y) = u(y) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y - x_0).
$$

Für $r < r_0, y_0 \in B_r(x_0)$ mit $|y_0 - x_0| > \frac{r}{2}$ liefert Satz 8.6.10

$$\frac{|u(y_0) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y_0 - x_0)|}{|x_0 - y_0|} \leq \frac{2\ |v(y_0) - \overbrace{v(x_0)}^{=0}\,|}{r}$$
$$\leq 2\ C_0 \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x_0))} \int_{B_{2r}(x_0)} \underbrace{|\nabla v|^p}_{=|\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|} dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \qquad (r \to 0)$$

nach (8.6.5). Also ist u im Punkt x_0 klassisch differenzierbar mit Ableitung $\nabla u(x_0)$. □

=

Kapitel 9

Regularität schwacher Lösungen

9.1 Klassische Regularität via Sobolev

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{9.1.1}$$
$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.1.2}$$

Wir erwarten $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Wie zeigt man dies?

Erinnerung: $n = 1$. Sei $\Omega = I =]a, b[\subset\subset \mathbb{R}$, $u \in H_0^1(I)$ schwache Lösung von (9.1.1),(9.1.2). Dann ist wegen (9.1.1) $u \in H^2(I)$ mit $u'' = \Delta u = -f \in L^2(I)$, und $u \in H^3(I)$ mit $u''' = -f' \in L^2(I)$. Mit Satz 7.3.1 folgt $u \in C^2(\bar{I})$ und dann $u \in C^\infty(\bar{I})$.

Analog für $n > 1$; jedoch benötigt man i. Allg. mehr schwache Ableitungen. Gemäss Definition von $W^{k,p}(\Omega)$ gilt iterativ für $k = 2, 3, ...$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega),\ \ \nabla u \in W^{k-1,p}(\Omega)\},\ 1 \leq p \leq \infty,$$

und

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}),\ \ \nabla^k u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Satz 9.1.1 (Sobolev)**.** *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, $k \in \mathbb{N}$, und sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt*

i) $kp < n \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q \leq q_0$ mit $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, und die Einbettung ist kompakt für $q < q_0$.

ii) $kp = n \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$, und diese Einbettungen sind kompakt.

iii) Falls $kp > n$ mit $k - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$, so gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $l = [k - \frac{n}{p}] \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = k - l - \frac{n}{p}$, und die Einbettung ist kompakt für $\alpha < \alpha_0$.

iv) Falls $kp > n$ mit $k - \frac{n}{p} = l + 1 \in \mathbb{N}$, so gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $1 \leq \alpha < 1$, und diese Einbettungen sind kompakt.

Beweis. i) Mit Satz 8.5.3 folgt

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-2,p_2}(\Omega) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L^{p_k}$$

mit

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}, \ldots, \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

ii) klar.

iii) Sei $l = [k - \frac{n}{p}]$. Mit i) folgt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l+1,q}(\Omega)$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-l-1}{n}$. Da

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n} = \frac{1}{np}\ (n - (k-l)\ p) < 0,$$

gilt $q > n$. Also folgt $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_0}(\Omega)$ und damit

$$W^{l+1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha_0}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$$

für $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = 1 - \frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{p} + \frac{k-l-1}{n} \cdot n = (k-l) - \frac{n}{p}$.

iv) klar.

□

Bemerkung 9.1.1. *Im Fall $p = 1$ kann man mit Methoden wie in Abschnitt 8.5 die Aussage von Satz 9.1.1 verbessern. Z.B. erhält man auf diesem Weg, dass $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Korollar 9.1.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, $u \in H_0^1(\Omega)$ und zusätzlich $u \in H^k(\Omega)$ mit $k > \frac{n}{2} + 2$, dann ist $u \in C^2(\bar{\Omega})$.*

Beweis. Mit $k > \frac{n}{2} + 2$, $l = 2 = p$ folgt $(k-l)\ p > n$. Die Behauptung folgt aus Satz 9.1.1.iii). □

Formal erhält man H^2-Abschätzungen wie folgt. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Mit

$$\begin{aligned} |\Delta u|^2 &= \sum_{i,j} \big(\partial_i(\partial_i u \partial_j^2 u) - \partial_i u\ \partial_j^2\ \partial_i\ u\big) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j} \big(\partial_i(\partial_i u \partial_j^2 u) - \partial_j(\partial_i u \partial_i \partial_j u)\big)}_{\text{Divergenzterm}} + \underbrace{\sum_{i,j} |\partial_i \partial_j u|^2}_{=|\nabla^2 u|^2} \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

und dem Divergenzsatz von Gauss erhält man

$$\int_\Omega |\Delta u|^2\ dx = \int_\Omega |\nabla^2 u|^2\ dx, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Analog kann man die 4. Ableitungen abschätzen

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla^4 u|^2\ dx &= \int_\Omega |\nabla^2(\nabla^2 u)|^2\ dx = \int_\Omega |\Delta(\nabla^2 u)|^2\ dx \\ &= \int_\Omega |\nabla^2 \Delta u|^2\ dx \\ &= \int_\Omega |\Delta^2 u|^2\ dx \overset{(9.1.1)}{=} \int_\Omega |\Delta f|^2\ dx), \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Satz 9.1.2. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse $C^{k+2}, f \in H^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von* (9.1.1), (9.1.2). *Dann gilt $u \in H_0^{k+2}(\Omega)$, und*

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C\ \ \|f\|_{H^k} \tag{9.1.4}$$

mit $C = C(\Omega, k, n)$.

9.2 Innere Regularität

Satz 9.2.1. *Sei $f \in H^k(\Omega)$ für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von* (9.1.1), (9.1.2). *Dann gilt $u \in H_{loc}^{k+2}(\Omega)$, und für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C\ (\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}), \tag{9.2.1}$$

wobei $C = C(\Omega', \Omega, k, u)$.

Beweis. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wähle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ auf Ω'. Für $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}-\Delta v &= (-\Delta u)\varphi - 2\nabla u \nabla\varphi - u\Delta\varphi \\ &= f\varphi - 2\nabla u\nabla\varphi - u\Delta\varphi =: g \in L^2(\Omega)\end{aligned} \tag{9.2.2}$$

mit

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^2} + C\ \ \|\nabla u\|_{L^2} + C\ \ \|u\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} + C\ \ \|u\|_{H^1}.\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

Mit (9.1.3) folgt (9.2.1) für $k = 0$, falls wir wissen, dass $v \in H^2$.

Frage: Genügt die „a-priori“ Abschätzung (9.1.3) bereits für den Beweis von Satz 9.2.1? Betrachte dazu

Beispiel 9.2.1. *Sei $\Omega = B_{1/e}(0) \subset \mathbb{R}^2$, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von*

$$-\Delta u = |\nabla u|^2 \qquad \text{in } \Omega, \tag{9.2.4}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.2.5}$$

Lemma 9.2.1. *(Ladyzhenskaya, Gagliardo-Nirenberg) Sei $v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$. Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^4\varphi^2\ dx \leq 8\ \int_{supp(\varphi)} |v|^2\ dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2\varphi^2 + |v|^2|\nabla\varphi|^2\right)\ dx.$$

Beweis. OBdA $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Für $x = (x_1, x_2)$ gilt dann

$$(v^2\varphi)(x_1, x_2) = |\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(v^2\varphi)(s, x_2)\ dx| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2\varphi)|(s, x_2)\ ds.$$

Analog

$$|(v^2\varphi)(x_1, x_2)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2\varphi)|(x_1, t)\ dt.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |v|^4 \varphi^2\ dx \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{\le} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2\varphi)|(s, x_2)\ ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(v^2\varphi)|(x_1, t)\ dt\right) dx_1\ dx_2 \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(v^2\varphi)|\ dx\Big)^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}^2}\Big(2\ |\nabla v|\ |v|\ |\varphi| + |v|^2\ |\nabla\varphi|\Big)\ dx\right)^2 \\
&\le \left(\Big(\int_{supp(\varphi)} |v|^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^2} 4\ |\nabla v|^2\varphi^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{R^2} |v|^2\ |\nabla\varphi|^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&\le 8 \int_{supp(\varphi)} |v|^2\ dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2\varphi^2 + |v|^2|\nabla\varphi|^2)\ dx
\end{aligned}$$

$\square$

Falls $u \in H^2_{loc} \cap H^1_0(\Omega)$ schwache Lösung von (9.2.4), (9.2.5), so folgt analog zu (9.2.2) für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Gleichung

$$-\Delta(u\varphi) = |\nabla u|^2\varphi - 2\nabla u \cdot \nabla\varphi - u\ \Delta\varphi =: g.$$

Da nach Annahme $v = \nabla u \in H^1_{loc}$, erhalten wir $g \in L^2$ mit

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2} &\le \left\||\nabla u|^2\varphi\right\|_{L^2} + C(\varphi)\ \|u\|_{H^1} \\
&\le C_0\ \|\nabla u\|_{L^2(supp(\varphi))}\ \left\|\nabla^2(u\varphi)\right\|_{L^2} + C(\varphi)\ \|u\|_{H^1}
\end{aligned}$$

gemäss Lemma 9.2.1. Mit (9.2.3) folgt

$$\left\|\nabla^2(u\varphi)\right\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2} \le C_0\ \|\nabla u\|_{L^2(supp(\varphi))}\ \left\|\nabla^2(u\varphi)\right\|_{L^2} + C(\varphi)\ \|u\|_{H^1}.$$

Wähle $0 < r$, so dass

$$C_0\ \sup_{x_0}\Big(\int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u|^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ auf $B_r(x_0)$, wo $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, folgt

$$\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(B_r(x_0))} \le \left\|\nabla^2(u\varphi)\right\|_{L^2} \le C(\varphi)\ \|u\|_{H^1},$$

d.h. die gewünschte H^2_{loc}-a-priori Abschätzung. Jedoch ist die Funktion

$$u(x) = \log\log\frac{1}{|x|} \in H^1_0(B_{\frac{1}{e}}(0;\mathbb{R}^2))$$

unbeschränkte schwache Lösung von (9.2.4), (9.2.5). Da $H^2_{loc} \hookrightarrow L^\infty_{loc}$ nach Satz 8.6.8, gilt $u \notin H^2_{loc}$.

Verifikation von (9.2.4) für $u(x) = \log\log\left(\frac{1}{|x|}\right)$. Die Funktion $v = e^u = \log\left(\frac{1}{|x|}\right)$ löst

$$0 = \Delta v = e^u(\Delta u + |\nabla u|^2) \qquad \text{auf } \Omega\backslash\{0\}.$$

Weiter hat nach Beispiel 8.1.1 die Menge $K = \{0\}$ verschwindende H^1-Kapazität; d.h. es gibt $(\psi_k) \subset C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ mit $0 \le \psi_k \le 1$, $\psi_k \equiv 1$ in einer Umbegung von 0, und $\psi_k \to 0$ f.ü., $\|\nabla\psi_k\|_{L^2} \to 0$ $(k \to \infty)$. Für $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u\ \nabla\varphi\ dx &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \nabla u\ \nabla(\varphi(1-\psi_k))\ dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega (-\Delta u)\ \varphi(1-\psi_k)\ dx \stackrel{(9.2.4)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u|^2\varphi(1-\psi_k)\ dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2\ \varphi\ dx.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund von Beispiel 9.2.1 müssen wir unterscheiden zwischen „a-priori“ Abschätzungen für „glatte“ Lösungen und „a-posteriori“ Regularität!

Ersetze Differentialoperatoren durch Differenzen! D.h. betrachte

$$D_h u = \frac{\tau_h u - u}{|h|}, \qquad 0 < |h| << 1. \text{ (Nirenberg)}$$

Beweis von Satz 9.2.1. (vollendet) Wie gezeigt, ist $v = u\varphi \in H^1_0(\Omega) \subset H^1_0(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von (9.2.2), d.h.

$$\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\ dx = \int_\Omega gw\ dx, \qquad \forall w \in H^1_0(\mathbb{R}^n). \tag{9.2.6}$$

Wähle $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ und setze $w = D_{-h}D_h v \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$. Offenbar gilt

$$\nabla D_h u = D_h \nabla u, \qquad \forall u \in H^1_0,$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \psi D_{-h}\rho\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\overbrace{\tau_{-h}\rho}^{=\rho(x-h)} - \rho}{|h|}\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau_h\psi - \psi}{|h|}\rho\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} D_h\psi\cdot\rho\ dx, \quad \forall \psi,\rho \in H^1_0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v\cdot\nabla w\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v\cdot D_{-h}(D_h\ \nabla v)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D_h\ \nabla v|^2\ dx.$$

(9.2.6) ergibt nun

$$\begin{aligned} \|D_h\nabla v\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\;dx = \int_\Omega gw\;dx \\ &\overset{\text{(Hölder)}}{\leq} \|g\|_{L^2}\|w\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}\|D_{-h}D_h v\|_{L^2}\,. \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

Analog zu Satz 8.3.1 gilt nun

Beh.1. *Für $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$, $h \neq 0$ gilt $\|D_h u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$.*

Beweis. Schätze ab (für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)

$$\frac{\tau_h u - u}{|h|}(x) = \int_0^1 \frac{h\cdot\nabla u(x+th)}{|h|}\;dt \leq \int_0^1 |\nabla u(x+th)|\;dt.$$

Mit Minkowski folgt

$$\|D_h u\|_{L^2} \leq \int_0^1 \|\nabla u(\cdot+th)\|_{L^2}\;dt \leq \|\nabla u\|_{L^2}\,.$$

$\square$

Wir erhalten

$$\|D_{-h}D_h v\|_{L^2} \leq \|\nabla D_h v\|_{L^2} = \|D_h\nabla v\|_{L^2}\,.$$

Mit (9.2.7) folgt

$$\|D_h\nabla v\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}\,, \qquad \forall h\neq 0.$$

Aus Satz 8.3.1 folgt nun $\nabla v \in H^1$, d.h. $v \in H^2$, und

$$\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} \leq \left\|\nabla^2 v\right\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \leq C\;(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}).$$

Dies ist (9.2.1) für $k=0$.

Der Fall $k\in\mathbb{N}$ folgt mit Induktion nach Differenzieren der Gleichung (9.1.1).

$k\mapsto k+1$: Sei $u \in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$, $f\in H^{k+1}(\Omega)$. Fixiere $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ mit $0\leq\varphi\leq 1$, und

$$v = u\varphi \in H^{k+2}\cap H_0^1(\Omega)$$

erfüllt (9.2.2). Setze

$$v^{(k+1)} = \frac{\partial^{k+1}v}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_2}}$$

für irgendwelche $k_i\geq 0$ mit $\sum\limits_{i=1}^n k_i = k+1$. Gemäss (9.2.2) ist dann $v^{(k+1)}\in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta v^{(k+1)} &= g^{(k+1)} \\ &= \underbrace{(f\varphi)^{(k+1)}}_{\|\cdot\|_{L^2}\leq C\|f\|_{H^{k+1}}} - \underbrace{2(\nabla u\cdot\nabla\varphi)^{(k+1)} - (u\Delta\varphi)^{(k+1)}}_{\|\cdot\|_{L^2}\leq C\|u\|_{H^{k+2}(supp(\varphi))}} \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Mit dem Satz für $k=0$ folgt $v^{(k+1)} \in H^2$ mit

$$\left\|\nabla^2 v^{(k+1)}\right\|_{L^2} \leq \left\|g^{(k+1)}\right\|_{L^2} \leq C\big(\|f\|_{H^{k+1}(supp\varphi)} + \|u\|_{H^{k+2}(supp\varphi)}\big)$$
$$\overset{\text{(Ind.Ann.)}}{\leq} C\ (\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^1}).$$

D.h. $v \in H^{k+3}(\Omega),\ u \in H^{k+3}_{loc}(\Omega)$, und

$$\|u\|_{H^{k+3}(\Omega')} \leq \|v\|_{H^{k+3}} \leq C\ (\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^1})$$

auf $\Omega' = \{x;\ \varphi(x) = 1\}$. □

9.3 Randregularität

Betrachte zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n);\ x_n > 0\}$. Sei $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \tag{9.3.1}$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+, \tag{9.3.2}$$

mit $supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Definiere $\bar{u} \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\bar{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0, \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Lemma 9.3.1. *$\bar{u} \in H^1_0(\mathbb{R}^n)$ ist schwache Lösung von*

$$-\Delta \bar{u} = \bar{f} \quad \textit{in } \mathbb{R}^n \tag{9.3.3}$$

mit $supp(\bar{u}) \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Beweis von (9.3.3). Sei $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Es gilt (mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\bar{u}\nabla\varphi\ dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n_+} \Big((\partial_i u \cdot \partial_i\varphi)(x', x_n) - \partial_i u(x', x_n)\partial_i\varphi(x', -x_n)\Big)\ dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n_+} (\partial_n u \partial_n \varphi)(x', x_n) + \partial_n u(x', x_n)\partial_n\varphi(x', -x_n)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla\big(\varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)\big)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla \psi\ dx, \end{aligned}$$

mit $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$. Beachte $\psi \in C^\infty \cap H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. Mit (9.3.1),(9.3.2) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \nabla\psi\ dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f\psi\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}\varphi\ dx.$$

□

Mit Satz 9.2.1 folgt $\bar{u} \in H^2$, und

$$\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \left\|\nabla^2 \bar{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|\bar{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2\ \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{9.3.4}$$

Zwar ist $\bar{f}$ auch für glatte f i. Allg. nicht regulär, und Satz 9.2.1 versagt für $k > 0$. Jedoch gilt

Satz 9.3.1. *Sei $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ schwache Lösung von* (9.3.1), (9.3.2) *mit $f \in H^k(\mathbb{R}^n_+)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $u \in H^{k+2}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ und*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega' \cap \mathbb{R}^n_+)} \leq C\ \left(\|f\|_{H^k} + \|u\|_{H^1}\right)$$

mit $C = C(\Omega', n)$.

Beweis. Für $k = 0$ benutze Lemma 9.3.1 und (9.3.4).

$k = 1$: Betrachte tangentiale Ableitung $u_i = \partial_i u$, $1 \leq i \leq n-1$. Da $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$, gilt $u_i \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, und

$$\begin{aligned} -\Delta u_i &= \partial_i f \quad \in L^2(\mathbb{R}^n_+), \\ u_i &= 0 \qquad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

Mit (9.3.4) folgt $u_i \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$, und

$$\|\partial_i \partial_j \partial_k u\|_{L^2} \leq \|u_i\|_{H^2} \leq C\ \left(\|f\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}\right),\ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j, k \leq n.$$

Mit der Gleichung (9.3.1) kann man den noch fehlenden Term abschätzen

$$\left\|\partial_n^2 u_n\right\|_{L^2} \leq \underbrace{\|\Delta u_n\|_{L^2}}_{=\partial_n f} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\|\partial_i^2 u_n\right\|_{L^2} \leq C(\ \|f\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}).$$

$k \mapsto k+1$*:* Nimm an, $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^n_+)$. Betrachte beliebige tangentiale Ableitungen

$$u^{(k+1)} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}}} \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$$

mit

$$-\Delta u^{(k+1)} = f^{(k+1)} \in L^2.$$

Mit Lemma 9.3.1 folgt $u^{(k+1)} \in H^2$ und

$$\left\|\nabla^2 u^{(k+1)}\right\|_{L^2} \leq C \left\|f^{(k+1)}\right\|_{L^2}.$$

Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multi-Index mit

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i, \quad \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wie für $k = 1$ folgt unter Benützung von (9.3.1) für $l = k+3, k+2, \ldots$ iterativ

$$\begin{aligned} M_l := \sup_{|\alpha| = k+3,\ \alpha_n \leq l} \|\partial^\alpha u\| &\leq M_{l-1} + C \left\|f^{(k+1)}\right\|_{L^2} \leq \ldots \\ &\leq M_2 + C \left\|f^{(k+1)}\right\|_{L^2} \leq C \left\|f^{(k+1)}\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Für den allgemeinen Fall betrachte $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^{k+2}, $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2) mit $f \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Zu $x_0 \in \partial\Omega$ wähle Umgebung U von x_0, mit zugehörigem Diffeomorphismus $H \in C^{k+2}(Q, \mathbb{R}^n)$ von Q auf U, so dass

$$H(Q_+) = U \cap \Omega,\ H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$$

und $|dH|$, $|dH^{-1}| \leq C$. Fixiere $\varphi \in C_0^\infty(U)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ in der Umgebung von x_0 und betrachte $v = u\varphi \in H_0^1(\Omega)$ mit $supp(v) \subset\subset U$.

Setze $w = v \circ H \in H_0^1(Q_+)$.

Frage:

i) Welche Gleichung erfüllt w?

ii) Sind die Techniken zum Beweis von Satz 9.3.1 auf w anwendbar?

Man erhält die Gleichung für w auf variationellem Weg. Zunächst gilt für $v \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta v =: g \quad \text{in } \Omega \tag{9.3.5}$$

die Charakterisierung

Lemma 9.3.2. *Die eindeutige schwache Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ von* (9.3.5) *erfüllt*

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \ dx - \int_\Omega gv \ dx \leq E(w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis. Sei $w \in H_0^1(\Omega)$. schreibe $w = v + \varphi$, mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Entwickle $E(w)$! Es gilt

$$E(w) = E(v+\varphi) = E(v) + \int_\Omega (\nabla v \nabla\varphi - g\varphi) \ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \ dx. \tag{9.3.6}$$

Falls v die Gleichung (9.3.5) löst, folgt

$$E(w) = E(v+\varphi) = E(v) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \ dx \geq E(v)$$

und „=“ genau dann, wenn $w = v$. □

Lemma 9.3.3. *Falls $v \in H_0^1(\Omega)$ die Energie E unter allen $w \in H_0^1(\Omega)$ minimiert, so ist v schwache Lösung von* (9.3.5).

Beweis. Ersetzt man in (9.3.6) die Funktion φ durch $\epsilon\varphi$, so erhält man

$$0 = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} E(v+\epsilon\varphi) = \int_\Omega (\nabla v \nabla\varphi - g\varphi) dx.$$

□

Wir ziehen nun die „Energie“ E mittels H zurück. Zur Vereinheitlichung der Notation schreiben wir u anstelle von v.

Zu $u \in H_0^1(\Omega \cap U)$ mit $supp(u) \subset\subset U$ setze $\tilde{u} = u \circ H \in H_0^1(Q_+)$ mit $supp(\tilde{u}) \subset\subset Q$. Sei weiter $\Phi = H^{-1} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $u = \tilde{u} \circ \Phi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap U} \frac{\partial \tilde{u} \circ \Phi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \tilde{u} \circ \Phi}{\partial x^i}\, dx - \int_{\Omega \cap U} g \tilde{u} \circ \Phi\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap U} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^k} \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^l} \frac{\partial \Phi^l}{\partial x^i}\, dx - \int_{\Omega \cap U} g \tilde{u} \circ \Phi\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{Q_+} a^{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^j} \overbrace{|det(dH)|}^{\sqrt{|h|}}\, dy - \int_{Q_+} \overbrace{(g \circ H)}^{=:\tilde{g}} \tilde{u}\, \overbrace{|det(dH)|}^{\sqrt{|h|}}\, dy \end{aligned}$$

mit

$$a^{ij} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^k} = \big(d\Phi (d\Phi)^t\big)^{ij}, \quad h_{ij} = \frac{\partial H^m}{\partial y^i} \frac{\partial H^m}{\partial y^j} = \big((dH)^t dH\big)_{ij},$$

und

$$|det(dH)| = \sqrt{det\big((dH)^t dH\big)} = \sqrt{det(h_{ij})} =: \sqrt{|h|}.$$

Beachte

$$d\Phi \underbrace{(d\Phi)^t \cdot dH^t}_{id} dH = id;$$

d.h.

$$a^{ij} h_{jk} = \delta^i_k, \qquad (a^{ij}) = (h_{ij})^{-1} =: (h^{ij}).$$

Bemerkung 9.3.1. *i) Deute*

$$D_h(\tilde{u}) := \frac{1}{2} \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^j} \sqrt{|h|}\, dy$$

als Dirichlet-Integral von $\tilde{u}$ bzgl. der Riemannschen Metrik $h = (h_{ij})$ auf Q_+!

ii) Das Dirichlet-Integral ist eine geometrische Grösse. Falls (M, g), (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und falls $S \subset\subset M$, $\tilde{S} \subset\subset N$, $H \in C^1$ Diffeomorphismus von einer Umgebung von $\tilde{S}$ nach M mit $H(\tilde{S}) = S$ und $H^*g = h$, wo

$$\big(H^*g\big)(p)\big(X, Y\big) = g\big(H(p)\big)\big(dH(p)X, dH(p)Y\big), \ \forall X, Y \in T_pN,$$

dann gilt

$$D_g(u; S) = D_{H^*g}(u \circ H; \tilde{S}) = D_h(\tilde{u}; \tilde{S}).$$

Sei nun wieder $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $supp(v) \subset\subset U$ Lösung von (9.3.5). Setze $\tilde{g} = g \circ H,\ w = v \circ H$, und definiere

$$\tilde{E}(w) = \frac{1}{2} \int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial w}{\partial y^j} \sqrt{|h|}\, dy - \int_{Q_+} \tilde{g} w \sqrt{|h|}\, dy.$$

Lemma 9.3.4. *Sei $v \in H_0^1(\Omega \cap U)$ mit $supp(v) \subset\subset U$, und sei $w = v \circ H \in H_0^1(Q_+)$. Es sind äquivalent:*

i) v ist schwache Lösung von (9.3.5),

ii)

$$E(v) \le E(v+\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega \cap U); \tag{9.3.7}$$

iii)

$$\tilde{E}(w) \le \tilde{E}(w+\psi), \quad \forall \psi \in H_0^1(Q_+); \tag{9.3.8}$$

iv) w ist schwache Lösung der Gleichung

$$-\frac{1}{|h|}\frac{\partial}{\partial x^i}\big(h^{ij}\sqrt{|h|}\frac{\partial w}{\partial y^j}\big) = \tilde{g} \text{ in } Q_+. \tag{9.3.9}$$

Beweis. $i) \Leftrightarrow ii)$: Siehe Lemma 9.3.2 und Lemma 9.3.3.

$ii) \Leftrightarrow iii)$: Zu $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U)$ ist $\psi = \varphi \circ H \in H_0^1(Q_+)$, und umgekehrt. Weiter gilt

$$E(v) = \tilde{E}(w), \ E(v+\varphi) = \tilde{E}(w+\psi).$$

$iii) \Leftrightarrow iv)$: Sei $\psi \in H_0^1(Q_+)$. Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ entwickle

$$\begin{aligned}\tilde{E}(w+\epsilon\psi) = \tilde{E}(w) &+ \epsilon\int_{Q_+}\Big(h^{ij}\frac{\partial \psi}{\partial y^i}\frac{\partial w}{\partial y^j} - \tilde{g}\psi\Big)\sqrt{|h|}\ dy \\ &+ \epsilon^2\frac{1}{2}\int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial \psi}{\partial y^i}\frac{\partial \psi}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\ dy\end{aligned}$$

D.h. (9.3.8) gilt genau dann, wenn

$$\int_{Q_+}\Big(h^{ij}\frac{\partial \psi}{\partial y^i}\frac{\partial w}{\partial y^j} - \tilde{g}w\Big)\sqrt{|h|}\ dy = 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(Q_+). \tag{9.3.10}$$

Dies ist die schwache Form von (9.3.8). □

Lemma 9.3.5. *Sei $w \in H_0^1(Q_+)$ mit $supp(w) \subset\subset Q$ schwache Lösung von* (9.3.8), *wobei $(h_{ij}) \in C^{k+1}(\bar{Q}_+)$ mit*

$$\lambda|\xi|^2 \le h^{ij}(y)\xi^i\xi^j \le \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{9.3.11}$$

mit Konstanten $0 < \lambda \le \Lambda$, gleichmässig in Q_+, und sei $\tilde{g} \in H^k(Q_+)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $w \in H^{k+2}(Q_+)$, und

$$\|w\|_{H^{k+2}} \le C \ \|\tilde{g}\|_{H^k},$$

wobei $C = C(\lambda, \Lambda, h, \dots)$ unabhängig von $\tilde{g}$ und w.

Bemerkung 9.3.2. *i) Eine Matrix (h_{ij}) mit* (9.3.11) *heisst* **gleichmässig elliptisch**.

ii) Die Annahmen im Lemma sind erfüllt, falls Ω von der Klasse C^{k+2}.

Beweis. Einsetzen von $\psi = w \in H_0^1(Q_+)$ in (9.3.10) ergibt

$$\begin{aligned}\lambda\int_{Q_+}|\nabla w|^2\sqrt{|h|}\ dy &\le \int_{Q_+} h^{ij}\frac{\partial w}{\partial y^i}\frac{\partial w}{\partial y^j}\sqrt{|h|}\ dy \\ &= \int_{Q_+}\tilde{g}w\sqrt{|h|}\ dy \le C\cdot\|\tilde{g}\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2}\end{aligned}$$

mit (9.3.9) und Poincaré. Es folgt

$$\|w\|_{H^1} \le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2} . \tag{9.3.12}$$

k=0: Fixiere $1 \le i \le n-1$. Für $h \ne 0$ setze

$$\partial_i^h w = D_{he_i} w = \frac{\tau_{he_i} w - w}{|h|}.$$

Dann ist $\psi = \partial_i^{-h} \partial_i^h w \in H_0^1(Q_+)$ zulässige Testfunktion in (9.3.10), und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{Q_+} h^{ij} \frac{\partial w}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^j} \sqrt{|h|}\ dy &= \int_{Q_+} \tilde{g} \psi \sqrt{|h|}\ dy \\ &\le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2} \left\|\partial_i^{-h} \partial_i^h w\right\|_{L^2} \le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2} \left\|\nabla \partial_i^h w\right\|_{L^2} .\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}&\int_{Q_+} h^{kl} \frac{\partial w}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial y^l} \big(\partial_i^{-h} \partial_i^h w\big) \sqrt{|h|}\ dy \overset{\text{(Subst.)}}{=} \int_{Q_+} \partial_i^h \big(h^{kl} \sqrt{|h|} \frac{\partial w}{\partial y^k}\big) \frac{\partial}{\partial y^l} (\partial_i^h w)\ dy \\ &\ge \int_{Q_+} h^{kl} \frac{\partial}{\partial y^k} \big(\partial_i^h w\big) \frac{\partial}{\partial y^l} \big(\partial_i^h w\big) \sqrt{|h|}\ dy - C \ \left\|h^{ij}\right\|_{C^1} \int_{Q_+} |\nabla w| |\nabla \partial_i^h w|\ dy \\ &\ge C_0 \lambda \left\|\nabla \partial_i^h w\right\|_{L^2}^2 - C \ \|\nabla w\|_{L^2} \left\|\nabla \partial_i^h w\right\|_{L^2} .\end{aligned}$$

Mit (9.3.12) folgt

$$\left\|\nabla \partial_i^h w\right\|_{L^2} \le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2} , \text{ gleichmässig in } h \ne 0.$$

Wie in Satz 8.3.1 folgt $\frac{\partial w}{\partial x^i} \in H_0^1(Q_+)$ mit

$$\left\|\nabla \frac{\partial w}{\partial x^i}\right\|_{L^2} \le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2} , \quad 1 \le i \le n-1.$$

Mit (9.3.8) kann man auch den fehlenden Term

$$\left\|\nabla \frac{\partial w}{\partial x^n}\right\|_{L^2} \le C \ \|\tilde{g}\|_{L^2}$$

abschätzen. Der Induktionsschritt $k \mapsto k+1$ verläuft vollkommen analog zu Satz 9.3.1. □

Beweis von Satz 9.1.2. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (9.1.1), (9.1.2) auf $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei $\Omega \in C^{k+2}$, $f \in H^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Überdecke $\partial\Omega$ mit Umgebungen $U_1, \dots, U_L$, für die ein C^{k+2}-Diffeomorphismus H_l: $Q \to U_l$ existiert, mit

$$H_l(Q_+) = U_l \cap \Omega;\ H_l(Q_0) = U_l \cap \partial\Omega, |dH_l|,\ |dH_l^{-1}| \le C,\ 1 \le l \le L.$$

Schliesslich wähle $U_0 \subset\subset \Omega$ so, dass $\Omega \subset \bigcup_{l=0}^{L} U_l$ und wähle eine der Überdeckung $(U_l)_{0\le l\le L}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varphi_l)_{0\le l\le L}$ auf Ω, mit $0 \le \varphi_l \in C_0^\infty(U_l)$ und

$$\sum_{l=0}^{L} \varphi_l \equiv 1 \text{ in } \Omega.$$

Setze $u_l = u\varphi_l \in H_0^1(U_l \cap \Omega)$ mit

$$-\Delta u_l = f\varphi_l - 2\nabla u \nabla \varphi_l - u\Delta\varphi_l =: g_l \tag{9.3.13}$$

und

$$supp(u_l) \subset\subset U_l \tag{9.3.14}$$

für $0 \le l \le L$, und setze

$$w_l = u_l \circ H_l,\ \tilde{g}_l = g_l \circ H_l, \quad l = 1, \dots, L.$$

$k = 0$: Da $g_l \in L^2(U_l)$ nach Voraussetzung, folgt mit Satz 9.2.1 und Lemma 9.3.5 wegen (9.3.13), dass $u_l \in H^2(U_l)$ mit

$$\|u_l\|_{H^2(U_l)} \le C\ (\|g_l\|_{L^2(U_l)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Weiter liefert Einsetzen von $\varphi = u \in H_0^1(\Omega)$ in die schwache Form von (9.1.1), (9.1.2) zusammen mit der Poincaré - Ungleichung die Abschätzung

$$C^{-1} \|u\|_{H^1}^2 \le \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx = \int_\Omega fu\ dx \le \|f\|_{L^2}^2 \cdot \|u\|_{L^2}^2\,,$$

also

$$\|u\|_{H^1} \le C\ \ \|f\|_{L^2}$$

und

$$\|u\|_{H^2} \le \sum_{l=0}^{L} \|u_l\|_{H^2} \le C \cdot \|f\|_{L^2}\,.$$

$k \mapsto k+1$: Sei $f \in H^{k+1}(\Omega)$ und nimm an, $u \in H^{k+2} \cap H_0^1(\Omega)$ erfüllt (9.1.3). Mit (9.3.13) erhalten wir

$$g_l \in H^{k+1}(U_l), 0 \le l \le L,$$

also auch

$$\tilde{g}_l = g_l \circ H \in H^{k+1}(Q_+), 1 \le l \le L$$

und

$$h_l = dH_l^T dH_l \in C^{k+2}(\bar{Q}_+).$$

Satz 9.2.1 und Lemma 9.3.5 liefern nun

$$u_0 \in H^{k+3}, u_l = w_l \circ H_l^{-1} \in H^{k+3}, 1 \le l \le L,$$

und

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{H^{k+3}(U_0)} &\leq C\ (\|g_0\|_{H^{k+1}} + \|u_0\|_{H^1}) \\ &\leq C\ (\|f\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^{k+2}(\Omega)}) \overset{\text{Ind.Vor.}}{\leq} C \cdot \|f\|_{H^{k+1}}\,,\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}\|u_l\|_{H^{k+3}} &\leq C\ \ \|w_l\|_{H^{k+3}} \leq C\,\|\tilde{g}_l\|_{H^{k+1}} \\ &\leq C\,\|g_l\|_{H^{k+1}} \leq C\ (\|f\|_{H^{k+1}} + \|u\|_{H^{k+3}}) \overset{\text{Ind.Vor.}}{\leq} C\ \ \|f\|_{H^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

Es folgt $u \in H^{k+3}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{H^{k+3}} \leq \sum_{l=0}^{L} \|v_l\|_{H^{k+3}} \leq C\,\|f\|_{H^{k+1}}\,.$$

□

9.4 Erste Anwendungen

Wir können nun endlich den noch ausstehenden Beweis von Lemma 7.1.1 erbringen.

Zur Erinnerung: Betrachte $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $A = -\Delta :\ D_A \subset L^2 \to L^2$, wo

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{\Omega});\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

mit Abschluss $\bar{A} :\ D_{\bar{A}} \subset L^2 \to L^2$, wobei

$$D_{\bar{A}} = \{u \in L^2(\Omega);\ \exists u_k \in D_A : u_k \overset{L^2}{\to} u,\ -\Delta u_k \overset{L^2}{\to} f =: \bar{A}u\ \ (k \to \infty)\}.$$

Lemma 9.4.1. *Falls $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2 ist, so gilt $D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.*

Beweis. Es gilt $D_A \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, vgl. Korollar 8.4.2. Falls $(u_k) \subset D_A$ mit $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $f_k = -\Delta u_k \to f$ in $L^2(\Omega)$, so folgt mit Satz 9.1.2

$$\|u_k - u_l\|_{H^2} \leq C\ \ \|f_k - f_l\|_{L^2}\,;$$

also $u_k \to u$ in $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

Sei Schliesslich $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ beliebig. Wähle $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to -\Delta u$ in $L^2(\Omega)$ für $k \to \infty$, dazu $u_k \in H_0^1(\Omega)$ mit $-\Delta u_k = f_k$, $k \in \mathbb{N}$. Mit Satz 9.1.2 folgt $u_k \in D_A$, und $u_k \to u$ in $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. □

Lemma 9.4.2. *(= Lemma 7.1.1) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2 und sei $v \in L^2(\Omega)$ mit*

$$|(v, \bar{A}u)_{L^2}| \leq C\ \ \|u\|_{L^2}\,,\quad \forall u \in D_{\bar{A}}.$$

Dann gilt $v \in D_{\overline{\bar{A}}}$.

Beweis. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset D_A$ gilt

$$|\int_\Omega v\Delta\varphi \; dx| = |(v, \bar{A}\varphi)_{L^2}| \leq C \, \|\varphi\|_{L^2} \, ,$$

also existiert $f \in L^2(\Omega)$ mit

$$-\int_\Omega v\Delta\varphi \; dx = \int_\Omega f\varphi \; dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

D.h. $-\Delta v = f \in L^2(\Omega)$.

Sei $v_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta v_0 = f \text{ in } \Omega, v_0 = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

gemäss Satz 9.1.2. Es folgt

$$\int_\Omega (v_0 - v)\Delta\varphi \; dx = \int_\Omega (f + \Delta v_0)\varphi \; dx = 0 \tag{9.4.1}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, also auch für alle $u \in D_{\bar{A}}$.

Sei $u \in D_{\bar{A}} = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= v - v_0 && \in L^2(\Omega) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann ergibt (9.4.1) die Identität $\|v - v_0\|_{L^2} = 0$, d.h. $v = v_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) = D_{\bar{A}}$. □

Mit Lemma 9.4.2 ist der Definitionsbereich des zu $\bar{A}$ adjungierten Operators mit $D_{\bar{A}}$ identisch, $\bar{A}$ also selbstadjungiert.

Die Kompaktheit der Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gemäss Satz 8.5.3 bzw. 8.6.8 zusammen mit Satz 9.1.2 und dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren (Satz 6.7.2) liefert nun

Satz 9.4.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2. Dann gibt es eine L^2-orthonormale Hilbert-Basis $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators mit*

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_i &= \lambda_i\varphi_i && \textit{in } \Omega \\ \varphi_i &= 0 && \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Eigenwerten $0 < \lambda_i \to \infty \quad (i \to \infty)$.

Beweis. Der Operator $K: \; L^2 \to H^2 \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2$ mit $Kf = u$: die Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \;\; u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

ist linear, stetig nach Satz 9.1.2 und kompakt wegen Satz 8.5.3 oder 8.6.8.

Mit $\bar{A} = -\Delta$ ist auch K selbstadjungiert. Da K stetig ist, genügt es hierfür, die Symmetrie zu zeigen: Seien $f, g \in L^2(\Omega)$ mit $u = Kf$, $v = Kg$. Dann gilt

$$(Kf, g)_{L^2} = \int_\Omega u(-\Delta v)\ dx = \int_\Omega (-\Delta u)v\ dx = (f, Kg)_{L^2}.$$

Da $ker(K) = \{0\}$, liefert Satz 6.7.2 eine Schar von L^2-orthonormalen Eigenvektoren $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$L^2(\Omega) = \overline{span\{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}}$$

und zugehörige Eigenwerte $\mu_i \to 0$ mit

$$K\varphi_i = \mu_i\varphi_i,\ \mu_i \neq 0. \tag{9.4.2}$$

Wegen der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.1 gilt zudem

$$\begin{aligned} 0 < \|\nabla\varphi_i\|^2_{L^2} &= \int_\Omega \underbrace{-\Delta\varphi_i}_{=f_i} \underbrace{\varphi_i}_{=Kf_i}\ dx = \mu_i^{-1}\int_\Omega (\underbrace{-\Delta K\varphi_i}_{=\varphi_i})\varphi_i\ dx \\ &= \mu_i^{-1} \underbrace{\|\varphi_i\|^2_{L^2}}_{=\|Kf_i\|^2_{L^2}=\mu_i^2\|f_i\|^2_{L^2}} = \mu_i\,\|f_i\|^2_{L^2}\,, \end{aligned} \tag{9.4.3}$$

also $\mu_i > 0,\ i \in \mathbb{N}$.

Schliesslich folgt mit (9.4.2) auch die Identität

$$\varphi_i = -\Delta K\varphi_i = \mu_i(-\Delta\varphi_i);$$

d.h.

$$-\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \text{ in } \Omega$$

mit $0 < \lambda_i = \mu_i^{-1} \to \infty \ \ (k \to \infty)$. Wegen

$$\varphi_i = \lambda_i K\varphi_i \in D_{\bar{A}} = H^2 \cap H^1_0(\Omega)$$

gilt auch die Randbedingung

$$\varphi_i = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

□

Bemerkung 9.4.1. *Mit dem Courant-Fischer Minimaxprinzip und* (9.4.3) *erhalten wir zudem die Charakterisierungen*

$$\mu_i = \sup_{dim(V)=i,\ V\subset L^2(\Omega)} \inf_{0\neq f\in V} \frac{(Kf, f)_{L^2}}{\|f\|^2_{L^2}},\ i \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\lambda_i = \inf_{dimV=i,\ V\subset H^1_0(\Omega)} \sup_{0\neq u\in V} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}},\quad i \in \mathbb{N},$$

vergleiche Bemerkung 6.7.3.

9.5 Variable Koeffizienten

Satz 9.5.1. *Sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *von der Klasse* $C^{k+2}, a_{ij} = a_{ji} \in C^{k+1}(\bar{\Omega}),\ 1 \leq i,j \leq n$ *mit*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi^i\xi^j \leq \Lambda|\xi|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{9.5.1}$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda$. *Dann besitzt für jedes* $f \in H^k(\Omega)$ *das RWP*

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = f \qquad in\ \Omega \tag{9.5.2}$$

$$u = 0 \qquad auf\ \partial\Omega \tag{9.5.3}$$

genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, *und* $u \in H^{k+2}(\Omega)$ *mit*

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C\ \ \|f\|_{H^k}.$$

Beweis. Definiere

$$(u,v)_a := \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\ dx,\ \ \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Wegen (9.5.1) gilt

$$\lambda\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (u,v)_a \leq \Lambda\ \ \|\nabla u\|_{L^2}^2,\ \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Mit der Poincaré-Ungleichung, Lemma 7.1.2, folgt, dass $(\cdot,\cdot)_a$ ein zum Standardskalarprodukt äquivalentes SP auf $H_0^1(\Omega)$ definiert. Mit Satz 4.3.2 (Riesz) folgt die Existenz genau einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (9.5.2),(9.5.3) im Sinne

$$(u,v)_a = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\ dx = \int_\Omega fv\ dx,\ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Für die höhere Regularität verwenden wir Lemma 9.3.5.

Definiere die „Metrik“ (g_{ij}) mit $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$, wo $g^{ij} = a_{ij}$. Dann geht (9.5.2) über in

$$-\Delta_g u := -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = \underbrace{f}_{\in L^2} - \underbrace{g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\log\sqrt{|g|}\big)}_{\in C^{k+1}}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_j}}_{\in L^2}.$$

Lemma 9.3.5 liefert nun sowohl innere als auch Randregularität, da der Laplace-Beltrami-Operator $-\Delta_g$ unter einem Diffeomorphismus $H \in C^{k+2}(Q;\mathbb{R}^n)$ übergeht in $-\Delta_h$ mit $h = H^*g \in C^{k+1}$, wo

$$h(p)\big(X,Y\big) = g\big(H(p)\big)\Big(dH(p)X, dH(p)Y\Big).$$

□

9.6 L^p-Theorie

Für $1 < p < \infty$ gelten Sätze analog zu Satz 9.5.1, Satz 9.2.1, etc. D.h. für $f \in W^{k,p}(\Omega)$,etc, gilt $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ (mit Abschätzungen). Hierfür benötigt man harmonische Analysis, insbesondere die Calderòn-Zygmund Ungleichung.

Kapitel 10

Schauder-Theorie

10.1 Motivation

Betrachte des RWP

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_i} f_i \qquad \text{in } \Omega, \tag{10.1.1}$$

$$u = u_0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \tag{10.1.2}$$

wo $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = a_{ji}$ gleichmässig elliptisch mit

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{10.1.3}$$

gleichmässig in $x \in \Omega$, wo $0 < \lambda < \Lambda$.

Bemerkung 10.1.1. *i) Später werden wir die allgemeine Form* (10.3.1) *betrachten.*

ii) Zu $f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ mit (10.1.3) *gibt es genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von* (10.1.1), (10.1.2).

Beweis. OBdA $u_0 = 0$ (Betrachte sonst $\tilde{u} = u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{f}_i = f_i - a_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$). $(\cdot,\cdot)_a$ definiert ein äquivalentes Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$. Die Behauptung folgt mit Satz 4.3.2. □

iii) Für klassische Regularität $u \in C^2(\bar{\Omega})$ benütigen wir gemäss Korollar 9.1.1 $u \in H^{k+2}(\Omega)$ mit $k > \frac{n}{2}$; nach Satz 9.5.1 also $f_i \in H^{k+1}$ mit $k > \frac{1}{2}$, etc.

Kann man diese Anforderungen abschwächen?

10.2 Campanato-Abschätzungen

Sei $v \in H^1$ schwache Lösung von

$$A^{(0)}v = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big) = 0 \qquad \text{in } B_R(0) \subset \mathbb{R}^n, \tag{10.2.1}$$

wobei $a_{ij}^{(0)} = a_{ji}^{(0)}$ konstant, elliptisch (mit (10.1.3)). Für $0 < r < R$ setze

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{0,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} v(x)\, dx.$$

Satz 10.2.1. *Für $v \in H^1(B_R(0))$ mit (10.2.1) gilt*

i)

$$\int_{B_r(0)} |v|^2\, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R(0)} |v|^2\, dx, \qquad 0 < r \le R; \tag{10.2.2}$$

ii)

$$\int_{B_r(0)} |v - \bar{v}_r|^2\, dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} |v - \bar{v}_R|^2\, dx, \quad 0 < r \le R. \tag{10.2.3}$$

Beweis. i) Sei zunächst $A^{(0)} = -\Delta$. OBdA sei $R = 1$. Betrachte sonst $\tilde{v}(x) = v(Rx),\ x \in B_1(0)$. Es genügt, $r \le \frac{1}{4}$ zu betrachten (wähle $C \ge 4^n$). Mit Satz 9.2.1 und 9.1.1 (Sobolev) erhalten wir für $k > \frac{n}{2} - 2$

$$\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{4}}(0))} \le C\ \|v\|_{H^{k+2}(B_{\frac{1}{4}}(0))} \le C\Big(\overbrace{\|\Delta v\|_{H^k(B_{\frac{1}{2}}(0))}}^{=0} + \|v\|_{H^1(B_{\frac{1}{2}}(0))}\Big).$$

Wähle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Dann

$$\begin{aligned} 0 = \int_{B_1(0)} (-\Delta v) v\varphi^2\, dx &= \int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2\, dx + 2\int_{B_1(0)} \underbrace{\nabla v\varphi}_{a} \cdot \underbrace{v\nabla\varphi}_{b}\, dx \\ &\ge \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |\nabla v|^2\varphi^2\, dx - 2\int_{B_1(0)} |v|^2 |\nabla\varphi|^2\, dx, \end{aligned}$$

da

$$2|ab| \le \frac{a^2}{2} + 2b^2.$$

Damit erhalten wir

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(B_{\frac{1}{2}}(0))} \le \int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \varphi^2\, dx \le C\int_{B_1(0)} |v|^2\, dx. \tag{10.2.4}$$

Es folgt

$$\int_{B_r(0)} |v|^2\, dx \le Cr^n\, \|v\|^2_{L^\infty(B_{\frac{1}{4}}(0))} \le Cr^n\, \|v\|^2_{H^1(B_{\frac{1}{2}}(0))} \le Cr^n \int_{B_1(0)} |v|^2\, dx,$$

wie gewünscht.
Betrachte $w = v - \bar{v}_1$. Mit Poincaré (Lemma 7.1.2) folgt

$$\int_{B_r(0)} |v - \bar{v}_r|^2\, dx = \int_{B_r(0)} |w - \bar{w}_r|^2\, dx \le C\ r^2 \int_{B_r(0)} |\nabla w|^2\, dx.$$

Da mit w auch die Komponenten von ∇w harmonisch sind, folgt mit (10.2.2) (für $R = \frac{1}{2}$) und (10.2.4)

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 &\leq Cr^n \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} |\nabla w|^2 \ dx \leq Cr^n \int_{B_1(0)} |w|^2 \ dx \\ &= Cr^n \int_{B_1(0)} |v - \bar{v}_1|^2 \ dx\end{aligned}$$

also (10.2.3).

ii) Sei $a_{ij}^{(0)} = a_{ji}^{(0)}$ elliptisch. Nach einer Rotation R gilt $a_{ij}^{(0)} = \lambda_i \delta_{ij}$ mit $0 < \lambda \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \Lambda$. Nach einer Streckung S der Koordinaten-Achsen gilt dann $\lambda_i = 1$. Sei $T = RS : \ R^n \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $w = v \circ T$ harmonisch auf $T^{-1}\big(B_R(0)\big)$.

Sei $0 < \delta \leq 1$ maximal mit

$$B_\delta(0) \subset T(B_1(0)) \subset B_{\frac{1}{\delta}}(0).$$

Dann folgt auch

$$B_{\delta r}(0) \subset T^{-1}\big(B_r(0)\big) \subset B_{\frac{r}{\delta}}(0), \quad 0 < r < 1.$$

Mit (10.2.2) für $A^{(0)} = -\Delta$ erhalten wir für $0 < r < \frac{\delta^2}{4}$:

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)} |v|^2 \ dx &\leq C \int_{B_{\frac{r}{\delta}}(0)} |w|^2 \ dx \\ &\leq Cr^n \delta^{-2n} \int_{B_\delta} |w|^2 \ dx \leq C(\delta) r^n \int_{B_1(0)} |v|^2 \ dx.\end{aligned}$$

Für (10.2.3) erfolgt die Abschätzung analog.

□

Eine analoge Aussage gilt für Lösungen $v \in H^1(B_R^+(0))$ von (10.2.1) auf $B_R^+(0) = \{(x', x_n) \in B_R(0); \ x_n > 0\}$ mit

$$v = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_R(0). \tag{10.2.5}$$

Satz 10.2.2. *Sei $v \in H^1(B_R^+(0))$ Lösung von (10.2.1),(10.2.5), $0 < r < R$. Dann gilt*

i)

$$\int_{B_r^+(0)} |v|^2 \ dx \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} |v|^2 \ dx. \tag{10.2.6}$$

ii)

$$\int_{B_r^+(0)} |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 \ dx \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} |\frac{\partial v}{\partial x_i}| \ dx, \ 1 \leq i \leq n-1,$$

iii)

$$\int_{B_r^+(0)} |\frac{\partial v}{\partial x_n}|^2 \ dx \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n} \int_{B_R^+(0)} |\frac{\partial v}{\partial x_n}|^2 \ dx,$$

iv)

$$\int_{B_r^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_n} - \overline{\Big(\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big)}_r\Big|^2 \; dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} \Big|\frac{\partial v}{\partial x_n} - \overline{\Big(\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big)}_R\Big|^2 \; dx.$$

Bemerkung 10.2.1. *Setzen wir v fort auf $B_R(0)$ mittels*

$$v(x', x_n) = -v(x', -x_n), \; x_n < 0,$$

mit

$$\overline{\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)}_r = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx = 0, \; 1 \le i \le n-1,$$

so können wir ii) und iv) zusammenfassen zu

v)

$$\int_{B_r(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_r|^2 \; dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_R|^2 \; dx.$$

Im Allgemeinen ist das so ergänzte v keine Lösung von $A^{(0)}v = 0$ in $B_R(0)$.

Beweis von Satz 10.2.2. i) Sei zunächst $A^{(0)} = -\Delta$. Setze v fort zu $v \in H^1(B_R(0))$ mit $v(x', x_n) = -v(x', -x_n)$. Dann ist v schwach harmonisch mit

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(0))} \int_{B_r(0)} v \; dx = 0.$$

Die Behauptung folgt mit Satz 10.2.1.
Für allgemeine $A^{(0)}$ wähle lineare Tranformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $w = v \circ T$ harmonisch auf $T^{-1}(B_R^+(0)) =: \Omega$. Wähle $R_0 > 0$ maximal mit $B_{R_0}(0) \subset T^{-1}(B_R(0))$. Für $0 < r < R_0$ folgt die Behauptung mit i). Für $R_0 < r < R$ ist die Behauptung wahr für genügend grosses C.

ii) Die Abschätzung (10.2.6) gilt auch für tangentiale Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n-1$.

iii) Zur Abschätzung von $\frac{\partial v}{\partial x_n}$ betrachte wieder $w = v \circ T$ mit $\Delta w = 0$ in $T^{-1}(B_R^+(0))$. Setze w antisymmetrisch fort auf $B_{\delta R}(0) \subset T^{-1}(B_R(0))$ und benutze Satz 10.2.1. Dies ergibt

$$\int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 \; dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R(0)} |\nabla w|^2 \; dx,$$

sowie

$$\int_{B_r(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_r|^2 \; dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_R|^2 \; dx.$$

Es folgt

$$\int_{B_r^+(0)} |\nabla v|^2 \; dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^+(0)} |\nabla v|^2 \; dx.$$

iv) Zum Beweis der noch fehlenden Abschätzung benutzen wir die folgende Minimaleigenschaft des Mittelwerts.

Behauptung: Sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für $x_0 \in \Omega,\ 0 < r < 1$

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 \ dx = \min_{a\in\mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x_0)} |f-a|^2 \ dx.$$

Beweis. Sei

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - a_0|^2 \ dx = \min_{a\in\mathbb{R}} \int_{\Omega_r(x_0)} |f-a|^2 \ dx.$$

Die Behauptung folgt mit

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{da}\Big|_{a=a_0} \int_{\Omega_r(x_0)} |f-a|^2 \ dx = \int_{\Omega_r(x_0)} (a_0 - f) \ dx.$$

□

Somit erhalten wir für $0 < r < \delta^2 R$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^+(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_r|^2 \ dx &= \min_{a\in\mathbb{R}^n} \int_{B_r^+(0)} |\nabla v - a|^2 \ dx \\
&\le C \min_{a\in\mathbb{R}^n} \int_{B_{\frac{r}{\delta}}(0)} |\nabla w - a|^2 \ dx = C \int_{B_{\frac{r}{\delta}}(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_{\frac{r}{\delta}}|^2 \ dx \\
&\le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_{\delta R}(0)} |\nabla w - (\overline{\nabla w})_R|^2 \ dx \\
&= C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \min_{a\in\mathbb{R}^n} \int_{B_{\delta R}(0)} |\nabla w - a|^2 \ dx \\
&\le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R^+(0)} |\nabla v - (\overline{\nabla v})_R|^2 \ dx.
\end{aligned}$$

□

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis zu (10.2.2),(10.2.3),(10.2.6) analoger Abschätzungen für Lösungen $u \in H^1$ von

$$A^{(0)}u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h. \tag{10.2.7}$$

Lemma 10.2.1. *Sei $h \in L^2(B_R^{(+)}(0)),\ w \in H_0^1(B_R^{(+)}(0))$. Dann gilt für jedes $\delta > 0$*

$$\Big|\int_{B_R^{(+)}(0)} hw \ dx\Big| \le \delta \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2 \ dx + C\delta^{-1}R^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |h|^2 \ dx.$$

Beweis. Schätze ab mit Young ($2|ab| \le \epsilon a^2 + \epsilon^{-1}b^2,\ \epsilon = \delta R^{-2}$)

$$\Big|\int_{B_R^{(+)}(0)} hw \ dx\Big| \le \|h\|_{L^2}\,\|w\|_{L^2} \le \delta R^{-2}\,\|w\|_{L^2}^2 + \delta^{-1}R^2\,\|h\|_{L^2}^2$$

und weiter mit Poincaré (Lemma 7.1.2)

$$\|w\|_{L^2}^2 = \int_{B_R^{(+)}(0)} |w|^2\ dx \le CR^2 \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\ dx.$$

□

Mit der Konvention aus Bemerkung 10.2.1 erhalten wir nun

Lemma 10.2.2. *Sei $u \in H^1(B_R(0))$, bzw. sei $u \in H^1(B_R^+(0))$ mit (10.2.5) Lösung von (10.2.7) auf $B_R^{(+)}(0)$, wobei $f = (f_i),\ h \in L^2(B_R^{(+)}(0))$. Dann gelten für $0 < r < R$ die Ungleichungen*

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\ dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R(0)} |\nabla u|^2\ dx + C\int_{B_R(0)} |f - \bar f_R|^2\ dx + CR^2 \int_{B_R(0)} |h|^2\ dx$$

sowie

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2\ dx \le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R(0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2\ dx + C\int_{B_R(0)} |f - \bar f_R|^2\ dx + CR^2 \int_{B_R(0)} |h|^2\ dx.$$

Beweis. Zerlege $u = v + w$, wobei $A^{(0)}v = 0$ und $w \in H_0^1(B_R^{(+)}(0))$. Mit Satz 10.2.1 und 10.2.2 folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla u|^2\ dx &\le 2\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla v|^2\ dx + 2\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\ dx \\ &\le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla v|^2\ dx + 2\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\ dx \\ &\le C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n \int_{B_R^{(+)}(0)} |\nabla u|^2\ dx + C\int_{B_r^{(+)}(0)} |\nabla w|^2\ dx.\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit

$$\begin{aligned}\int_{B_R^{(+)}(0)} A^0 ww\ dx &= \int_{B_R^{(+)}(0)} \bigg(-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big)\bigg) w\ dx \\ &= \int_{B_R^{(+)}(0)} a_{ij}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\ dx \ge \lambda\,\|\nabla w\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

und Lemma 10.2.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\lambda\,\|\nabla w\|_{L^2}^2 &\le \int_{B_R^{(+)}(0)} \underbrace{A^{(0)}w}_{=A^{(0)}u}\, w\ dx = \int_{B_R^{(+)}(0)} (h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}) w\ dx \\ &\le \frac{\lambda}{4}\,\|\nabla w\|_{L^2}^2 + CR^2\,\|h\|_{L^2}^2 + \int_{B_R^{(+)}(0)} (f_i - (\bar f_i)_R)\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx \\ &\le \frac{\lambda}{2}\,\|\nabla w\|_{L^2}^2 + C\int_{B_R^{(+)}(0)} |f - \bar f_R|^2\ dx + CR^2\,\|h\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Mit (10.2.3) folgt die 2. Behauptung analog. □

Wie unterscheiden sich die gewonnenen Abschätzungen für

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 \, dx, \text{ bzw. } \int_{B_r(0)} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2 \, dx?$$

Definition 10.2.1 (Morrey)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \le \nu \le n$. Setze*

$$L^{2,\nu}(\Omega) = \Big\{ f \in L^2(\Omega);\ [f]^2_{L^{2,\nu}} = \sup_{x_0\in\Omega,\ 0<r<1} \Big(r^{-\nu} \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 \, dx \Big) < \infty \Big\}$$

mit Norm

$$\|f\|_{L^{2,\nu}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + [f]_{L^{2,\nu}(\Omega)}.$$

Bemerkung 10.2.2. *i)*

$$L^{2,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

ii)

$$L^{2,\nu}(\Omega) = \{0\}, \quad \forall \nu > n.$$

Lemma 10.2.3. *Sei Ω vom Typ A für ein $A > 0$, und $0 \le \nu < n$. Dann gilt*

$$L^{2,\nu}(\Omega) \cong \mathcal{L}^{2,\nu}.$$

Beweis. i) Seien $f \in L^{2,\nu}(\Omega),\ x_0 \in \Omega,\ 0 < r < 1$. Mit der Minimaleigenschaft des Mittels folgt

$$\int_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 \, dx \le \int_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 \, dx \le r^\nu \|f\|^2_{L^{2,\nu}}$$

also

$$[f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}} \le \|f\|_{L^{2,\nu}}\,.$$

ii) Sei $f \in \mathcal{L}^{2,\nu}(\Omega),\ x_0 \in \Omega,\ 0 < r < 1$. Schätze ab

$$\fint_{\Omega_r(x_0)} |f|^2 \, dx \le 2 \fint_{\Omega_r(x_0)} |f - \bar{f}_{r,x_0}|^2 \, dx + 2|\bar{f}_{r,x_0}|^2.$$

Setze $r_i = 2^i r,\ i \in \mathbb{N}_0$. Dann (mit $i_0 :\ 2 > 2^{i_0} r \ge 1$)

$$|\bar{f}_{r,x_0}| \le \sum_{i=1}^{i_0} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| + |\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|$$

und

$$\begin{aligned} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| &\le \Big(C \fint_{\Omega_{r_{i-1}}(x_0)} |f - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C r_{i-1}^{\frac{\nu-n}{2}} [f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{i_0} |\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}| \le C \sum_{i=1}^{i_0} r_i^{\frac{\nu-n}{2}} [f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}$$

und damit für $\nu < n$

$$r^{n-\nu}\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|\bar{f}_{r_i,x_0} - \bar{f}_{r_{i-1},x_0}|\Big)^2 \leq C\Bigg(\overbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{r_i}{r}}_{=2^i}\Big)^{\frac{\nu-n}{2}}}^{<\infty}\Bigg)^2 = C[f]_{\mathcal{L}^{2,\nu}}.$$

Zusammen mit der Abschätzung

$$|\bar{f}_{r_{i_0},x_0}|^2 \leq C\int_\Omega |f|^2\ dx$$

folgt

$$\begin{aligned} r^{-\nu}\int_{\Omega_r(x_0)}|f|^2\ dx &\leq 2r^{-\nu}\int_{\Omega_r(x_0)}|f-\bar{f}_{r,x_0}|^2\ dx + C[f]^2_{\mathcal{L}^{2,\nu}} + C\int_\Omega |f|^2\ dx \\ &\leq C[f]^2_{\mathcal{L}^{2,\nu}} + C\,\|f\|^2_{L^2} \leq C\,\|f\|^2_{\mathcal{L}^{2,\nu}}\,. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.2.3. *Für $\nu = n$ gilt die Aussage nicht, da einerseits $L^{2,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, andererseits aber wegen Beispiel 8.1.2 ii)*

$$\mathcal{L}^{2,n}(\Omega) \supset W^{1,n}(\Omega) \ni \log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) \notin L^\infty(\Omega).$$

Lemma 10.2.4. *Sei $\phi :]0,R_0] \to \mathbb{R}_+$ monoton wachsend mit*

$$\phi(r) \leq A\left(\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha + \epsilon\right)\phi(R) + BR^\beta,\ \ 0 < r < R \leq R_0, \tag{10.2.8}$$

wobei $0 < \beta < \alpha,\ \ A, B \in \mathbb{R}$. Dann existieren $\epsilon_0 = \epsilon_0(A,\alpha,\beta) > 0$ und $C = C(A,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$, so dass für $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ folgt

$$\phi(r) \leq C\left(\left(\frac{r}{R}\right)^\beta \phi(R) + Br^\beta\right),\ \ 0 < r < R \leq R_0.$$

Beweis. OBdA sei $A \geq 1$. Wähle Zahlen γ, $\tau > 0$ mit $\beta < \gamma < \alpha,\ \ 0 < \tau < 1$ und

$$2A\tau^\alpha = \tau^\gamma.$$

Nimm an, dass $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 := \tau^\alpha$. Für $0 < R \leq R_0, r = \tau R$ ergibt (10.2.8) die Abschätzung

$$\phi(\tau R) \leq 2A\tau^\alpha\phi(R) + BR^\beta = \tau^\gamma\phi(R) + BR^\beta.$$

Iteration für $k \in \mathbb{N}$ ergibt

$$\begin{aligned}
\phi(\tau^{k+1}R) &\leq \tau^{\gamma}\phi(\tau^k R) + B(\tau^k R)^{\beta} \\
&\leq \tau^{2\gamma}\phi(\tau^{k-1}R) + \tau^{\gamma}B(\tau^{k-1}R)^{\beta} + B(\tau^k R)^{\beta} \\
&\dots \\
&\leq \tau^{(k+1)\gamma}\phi(R) + B\sum_{l=0}^{k}\tau^{l\gamma}\tau^{(k-l)\beta}R^{\beta} \\
&= \underbrace{\tau^{(k+1)\gamma}}_{\leq \tau^{(k+1)\beta}}\phi(R) + B\underbrace{\sum_{l=0}^{k}(\tau^{\gamma-\beta})^l}_{\leq C<\infty}(\tau^k R)^{\beta}.
\end{aligned}$$

Zu $0 < r < \tau^2 R$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^{k+2}R < r \leq \tau^{k+1}R$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\phi(r) &\overset{\text{(Monotonie)}}{\leq} \phi(\tau^{k+1}R) \leq \tau^{-\beta}\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta}\phi(R) + BC\tau^{-2\beta}(\underbrace{\tau^{k+2}R}_{\leq r^{\beta}})^{\beta} \\
&\leq C\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta}\phi(R) + Br^{\beta}\right).
\end{aligned}$$

□

Satz 10.2.3. *Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, bzw. $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ mit $u = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$, Lösung von (10.2.7) mit supp$(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\mathbb{R}^n_{(+)})$, $h \in L^{2,\nu}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ mit $0 < \mu = \nu + 2 < n + 2$. Dann gilt*

$$\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\mathbb{R}^n_{(+)}),$$

und

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\mu}} \leq C(\|u\|_{H^1} + [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}).$$

Beweis. Zu zeigen ist für $x_0 \in \mathbb{R}^n_{(+)}$, $0 < r < 1$ die Abschätzung

$$r^{-\mu}\int_{B_r(x_0)(\cap\mathbb{R}^n_+)}|\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2\,dx \leq C(\|u\|^2_{H^1} + [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|_{L^{2,\nu}}). \quad (10.2.9)$$

Im Fall $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ genügt es, die Fälle $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n_+$ und $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ zu betrachten.
Setze

$$\phi(r) = \int_{B_r(x_0)}|\nabla u - (\overline{\nabla u})_r|^2\,dx,$$

wobei wir wie in Lemma 10.2.2 im Falle $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, die Funktion u anti-symmetrisch ergänzen. Für $0 \leq r < R \leq 1$ gilt wegen Minimaleigenschaft des Mittels

$$\phi(r) \leq \int_{B_r(x_0)}|\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2\,dx \leq \phi(R).$$

Weiter ergibt Lemma 10.2.2

$$\begin{aligned}\phi(r) &\leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2}\phi(R) + C\int_{B_R^{(+)}(x_0)} |f-\bar{f}_R|^2\ dx + CR^2\int_{B_R^{(+)}(x_0)} |h|^2\ dx \\ &\leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2}\phi(R) + CR^\mu [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + CR^{2+\nu}\,\|h\|^2_{L^{2,\nu}}\,.\end{aligned}$$

Mit Lemma 10.2.4 folgt für $\mu < n+2$ und $0 < r < R = 1$

$$\phi(r) \leq Cr^\mu\phi(1) + Cr^\mu\Big([f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}} + \|h\|^2_{L^{2,\nu}}\Big).$$

Nach Division durch r^μ folgt (10.2.9). □

10.3 A-priori Abschätzungen in Hölder-Normen

Betrachte

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + c\cdot u = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h. \tag{10.3.1}$$

mit $a_{ij} = a_{ji}$ gleichmässig elliptisch und weiteren, zu spezifizierenden Regularitätsannahmen.

Lemma 10.3.1. *i) Sei $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, mit supp(u) $\subset\subset \mathbb{R}^n$ Lösung von (10.3.1), wobei $a_{ij}, f_i \in C^\alpha$, $c, h \in C^0$. Dann existiert $C, \delta > 0$, nur abhängig von $a_{ij}(0) =: a_{ij}^{(0)}$, so dass*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{C^0}\big),$$

falls

$$\sup_{x\in supp(u)} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)| < \delta.$$

ii) Analog, falls $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ Lösung von (10.3.1) mit $u \equiv 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ und supp(u) $\subset\subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Schreibe (10.3.1) äquivalent als

$$\begin{aligned}A^{(0)}u &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) \\ &= (A^{(0)}u - Au) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h \\ &= \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big((a_{ij}^{(0)} - a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}}_{-\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f}_i} + \underbrace{h - cu}_{=:\tilde{h}}\end{aligned} \tag{10.3.2}$$

Setze $\mu = n + 2\alpha$. Dann $C^\alpha \cong \mathcal{L}^{2,\mu}$, und

$$\tilde{f}_i := f_i + (a_{ij}^{(0)} - a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C^\alpha \cong \mathcal{L}^{2,\mu}$$

bzw.

$$\tilde{h} := h - cu \in C^0 \overset{(\text{auf } supp(u))}{\hookrightarrow} L^\infty \hookrightarrow L^{2,\nu}$$

mit $\nu = \mu - 2 = n - 2 + 2\alpha < n$. Mit Satz 10.2.3 folgt

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{C^\alpha} &\le C\,\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\mu}} \le C\big(\|u\|_{H^1} + \|\tilde{f}\|_{C^\alpha} + \|\tilde{h}\|_{L^{2,\nu}}\big)\\ &\le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{L^\infty}\big) + C_1\delta\,\|\nabla u\|_{C^\alpha} + C\,\|u\|_{C^1}\,.\end{aligned}$$

Für $\delta < \frac{C_1}{2}$ folgt

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}} \le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^\alpha} + \|h\|_{L^\infty}\big) + C\,\|u\|_{C^1}.$$

Wende Lemma 10.3.2 an mit $X = C^{1,\alpha}(\Omega),\ Y = C^1(\overline{\Omega}),\ Z = H^1(\Omega)$, wobei $supp(u) \subset \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$! $\square$

Lemma 10.3.2 (Ehrling, Gagliardo, Nirenberg)**.** *Seien X, Y, Z Banachräume mit stetigen Einbettungen $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, wobei $X \hookrightarrow Y$ kompakt. Dann existiert zu $\epsilon > 0$ eine Konstante $C(\epsilon)$ mit*

$$\|x\|_Y \le \epsilon\,\|x\|_X + C(\epsilon)\,\|x\|_Z\,, \quad \forall x \in X.$$

Beweis. (indirekt) Nehme an, es existieren $(x_k) \subset X,\ \epsilon > 0$ mit

$$1 = \|x_k\|_Y \ge \epsilon\,\|x_k\|_X + k\,\|x_k\|_Z\,, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_k) \subset X$ beschränkt. Da $X \hookrightarrow Y$ kompakt, gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N},\ y \in Y$ mit $x_k \to y$ in $Y\ \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Da $Y \hookrightarrow Z$, gilt auch $x_k \to y$ in $Z\ \ (k \to \infty, k \in \Lambda)$. Jedoch gilt

$$\|y\|_Z = \lim_{k\to\infty k\in\Lambda} \underbrace{\|x_k\|_Z}_{\le \frac{1}{k}} = 0;\ \text{d.h. } y = 0,$$

und mit

$$1 = \|x_k\|_Y \to 0\ \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda),$$

folgt der gewünschte Widerspruch. $\square$

Analog zu Lemma 10.3.1 gilt

Lemma 10.3.3. *i) Sei $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$ Lösung von* (10.3.1)*, wobei $a_{ij}, f_i \in C^{1,\alpha},\ c, h \in C^\alpha$, und sei $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}(0)$. Dann existieren $C, \delta = \delta(a_{ij}^{(0)}) > 0$ so dass*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\big),$$

falls

$$\sup_{supp(u)} |a_{ij} - a_{ij}^{(0)}| < \delta.$$

ii) Analog für $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u \equiv 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ und $supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Differenziere (10.3.2) in Richtung x_k, wobei $1 \leq k \leq n-1$ im Falle ii). Dann ist $U_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ Lösung von

$$A^{(0)} U_k = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_k}\right) - \delta_{ik}\tilde{h}\right)$$

mit $U_k \equiv 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ im Falle von ii), wobei

$$\tilde{f}_i = f_i + (a_{ij}^{(0)} - a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C^{1,\alpha},\ \ \tilde{h} = h - cu \in C^{\alpha}.$$

Mit Satz 10.2.3 folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla U_k\|_{C^\alpha} &\leq C\big(\|U_k\|_{H^1} + \|\tilde{f}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\tilde{h}\|_{C^\alpha}\big) \\ &\leq C\big(\|u\|_{H^2} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\big) + C_1\delta\,\|u\|_{C^{2,\alpha}} + C\,\|u\|_{C^2}\,. \end{aligned}$$

Im Falle i) folgt nach Summation über k für $C_1\delta < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\big(\|u\|_{H^2} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\big) + C\,\|u\|_{C^2}\,,$$

Mit Lemma 10.3.2 folgt

$$\|u\|_{H^2} + \|u\|_{C^2} \leq \epsilon\,\|u\|_{C^{2,\alpha}} + C\,\|u\|_{H^1}$$

und damit die Behauptung.

Im Fall ii) benutzen wir (10.3.1), um abzuschätzen

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial U_n}{\partial x_n}\right\|_{C^\alpha} &\leq C\,\|Au\|_{C^\alpha} + C\sum_{k=1}^{n-1}\|\nabla U_k\|_{C^\alpha} + C\,\|u\|_{C^\alpha} \\ &\leq C\big(\|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{H^2}\big) + C_1\delta\,\|u\|_{C^{2,\alpha}} + C\,\|u\|_{C^2}\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wie im Fall i). □

Um zu Lemma 10.3.3 vergleichbare Abschätzungen für Lösungen von (10.3.1) auf Gebieten $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zu erhalten, benötigen wir eine geometrische Interpretation der Divergenz.

Sei $f = (f^1, \dots, f^n)$ ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_\Omega \underbrace{d\varphi}_{=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\cdot f^i} \cdot f\ dx = -\int_\Omega \varphi\ div_{g_{\mathbb{R}^n}} f\ dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

mit

$$div_{g_{\mathbb{R}^n}} f = \frac{\partial f^i}{\partial x^i}.$$

Analog erklären wir für ein Vektorfeld f auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) die Divergenz bzgl. g durch

$$\int_U d\varphi \cdot f\sqrt{|g|}\ dx =: -\int_U \varphi\ div_g f\sqrt{|g|}\ dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$ auf einer Koorinatenumgebung U, mit

$$div_g f := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} f^i)}{\partial x^i}.$$

Diese Definition ist „natürlich“: Falls $H : \; N \to M$ Diffeomorphismus einer Koordinaten-Umgebung $V \subset N$ auf die Koordinaten-Umgebung $U \subset M$, mit $H^* g = h$ und $\varphi \in C_0^\infty(U)$ mit $H^*\varphi = \varphi \circ H, \;\; H^* f = (dH)^{-1} f \circ H$, so gilt

$$\int_M d\varphi \cdot f \sqrt{|g|}\, dx = \int_N d(H^*\varphi) \cdot H^* f \sqrt{|h|}\, dy = -\int_N \varphi \circ H div_h(H^* f) \sqrt{|h|}\, dy.$$

Andererseits gilt

$$-\int_M \varphi div_g f \sqrt{|g|}\, dx = -\int_N \varphi \circ H (div_g f) \circ H \sqrt{|h|}\, dx, \; \forall \varphi \in C_0^\infty(U)$$

Da $\varphi \in C_0^\infty(U)$ beliebig, folgt

$$(div_g f) \circ H = H^*(div_g f) = div_{H^* g}(H^* f) = div_h\big((dH)^{-1} f \circ H\big). \qquad (10.3.3)$$

Satz 10.3.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$ für ein $0 < \alpha < 1$, und sei $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Weiter sei $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ gleichmässig elliptisch, und seien $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^{1,\alpha}(\Omega), \; c, h \in C^\alpha(\Omega)$.*
Dann gibt es $C > 0$, so dass für jede Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ von (10.3.1) mit $u = u_0$ auf $\partial\Omega$ gilt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}}\big).$$

Beweis. OBdA sei $u_0 = 0$. Betrachte sonst $\tilde{u} = u - u_0, \; \tilde{f_i} = f_i + a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}$. Sei $\delta > 0$ die kleinste der in Lemma 10.3.1 und 10.3.3 auftretenden Konstanten $\delta(a_{ij}(x)) > 0$. Überdecke

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{l=1}^L U_l$$

mit offenen $U_l \subset\subset \mathbb{R}^n$, so dass für $U_l \subset \Omega$ gilt

$$\sup_{x,y \in U_l} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| < \delta, \qquad (10.3.4)$$

und so, dass für $U_l \not\subset \Omega$ ein $C^{2,\alpha}$- Diffeomorphismus $H_l : \; Q \to U_l$ existiert mit

$$H_l(Q_+) = U_l \cap \Omega, \;\; H_l(Q_0) = U_l \cap \partial\Omega \qquad (10.3.5)$$

und

$$\sup_{y \in Q} |h_{ij}(x) - h_{ij}(y)| < \delta \qquad (10.3.6)$$

wobei $(h_{ij}) = (h_{ij}^{(l)}) = H_l{}^*(a_{ij}^{(l)})$, mit $a_{ij}^{(l)} = a_{ij}(x_l)$ für ein $x_l \in U_l$.

Die Bedingungen (10.3.4) und (10.3.6) kann man durch Verfeinern einer gegebenen Überdeckung erreichen.

Schliesslich sei (φ_l) eine Zerlegung der Eins bezüglich (U_l) und zerlege

$$u = \sum_{l=1}^{L} u_l \text{ mit } u_l = u\varphi_l,\ 1 \le l \le L.$$

i) Sei $U_l \subset \Omega$. Dann löst $u_l = u\varphi_l$ die Gleichung

$$\begin{aligned} Au_l &= (Au)\varphi_l - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}u\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\Big) - a_{ij}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\Big(f_i\varphi_l + a_{ij}u\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\Big)}_{=\tilde{f}_{l,i}} + \underbrace{h\varphi_l + f_i\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - a_{ij}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}}_{=\tilde{h}_l} \end{aligned} \tag{10.3.7}$$

mit $supp(u_l) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Lemma 10.3.3 ergibt

$$\begin{aligned} \|u_l\|_{C^{2,\alpha}} &\le C\big(\|u_l\|_{H^1} + ||\tilde{f}_l||_{C^{1,\alpha}} + ||\tilde{h}_l||_{C^\alpha}\big) \\ &\le C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha}\big) + C\,\|u\|_{C^{1,\alpha}}\,. \end{aligned}$$

ii) Sei $U_l \not\subset \Omega$. Analog zu (10.3.1), (10.3.2) betrachte die äquivalente Form von (10.3.7):

$$\begin{aligned} A^{(l)}u_l &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(l)}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\Big) \\ &= A^{(l)}u_l - Au_l - \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f}_{l,i} + \tilde{h}_l, \end{aligned}$$

wobei $a_{ij}^{(l)} = a_{ij}(x_l)$ und

$$A^{(l)}u_l - Au_l = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\big(a_{ij}^{(l)} - a_{ij}\big)\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\Big) - cu_l.$$

Das heisst,

$$A^{(l)}u_l = -\frac{\partial}{\partial x_i}g_{l,i} + j_l$$

mit

$$\begin{aligned} g_{l,i} &= \tilde{f}_{l,i} + (a_{ij}^{(l)} - a_{ij})\frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \\ j_l &= \tilde{h}_l - cu_l. \end{aligned}$$

Gemäss (10.3.3) erfüllt $v_l = u_l \circ H_l \in C^{2,\alpha}(Q_+)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta_{h_l}v_l &= -\frac{1}{\sqrt{|h_l|}}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\sqrt{|h_l|}h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j}\Big) = -div_{h_l}\big({H_l}^*g_l\big) + j_l \circ H_l \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|h_l|}}\frac{\partial}{\partial y_i}\big(\sqrt{|h_l|}({H_l}^*g_l)_i\big) + j_l \circ H_l; \end{aligned}$$

d.h

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j}\Big) &= \frac{\partial}{\partial y_i}\big(\log\sqrt{|h_l|}\big)h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j} - \frac{\partial}{\partial y_i}({H_l}^*g_l)_i \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y_i}\big(\log\sqrt{|h_l|}\big)\big({H_l}^*g_l\big)_i + j_l \circ H_l = -\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{g}_{l,i} + \tilde{j}_l \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{g}_l = {H_l}^* g_l = dH_l^{-1} g_l \circ H_l,$$
$$\tilde{j}_l = j_l \circ H_l + \frac{\partial}{\partial y_i}\big(\log\sqrt{|h_l|}\big)\Big(h_l^{ij}\frac{\partial v_l}{\partial y_j} - \big({H_l}^* g_l\big)_i\Big)$$

und

$$v_l = 0 \text{ auf } Q_0,\ supp(v_l) \subset Q \subset\subset \mathbb{R}^n.$$

Lemma 10.3.3 ergibt

$$\begin{aligned}\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} &\leq C\,\|v_l\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\big(\|v_l\|_{H^1} + \|\tilde{g}_l\|_{C^{1,\alpha}} + \big\|\tilde{j}_l\big\|_{C^\alpha}\big) + C_1\delta\,\|v_l\|_{C^{2,\alpha}}\\ &\leq C\big(\|u_l\|_{H^1} + \|g_l\|_{C^{1,\alpha}} + \|j_l\|_{C^\alpha} + \|u_l\|_{C^{1,\alpha}}\big) + C_2\delta\,\|u_l\|_{C^{2,\alpha}}\\ &\leq C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}\big) + C_2\delta\,\|u_l\|_{C^{2,\alpha}}\end{aligned}$$

mit einer von l unabhängigen Konstanten C_2. Wähle $\delta \leq C_2/2$. Es folgt

$$\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}\big),\quad 1 \leq l \leq L.$$

Nach Summation über l erhalten wir

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq \sum_{l=1}^{L}\|u_l\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\big(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^{1,\alpha}}\big).$$

Mit Lemma 10.3.2 folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 10.3.1. *i) Analoge Abschätzungen gelten für $C^{2,\alpha}$-Lösungen u von*

$$-\Delta_g u = -div_g f + h$$

auf einer geschlossenen (kompakt, ohne Rand) Mannigfaltigkeit (M, g).

ii) Dasselbe gilt für Operatoren

$$Au = -a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + cu$$

mit $a_{ij} = a_{ji} \in C^\alpha$ gleichmässig elliptisch. Schreibe dazu

$$Au = A^{(0)}u + (Au - A^{(0)}u),$$

wobei

$$A^{(0)}u = -a_{ij}^{(0)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$$

mit $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$. Der Störterm lässt sich abschätzen

$$\Big\|Au - A^{(0)}u\Big\|_{C^\alpha} \leq \Big\|(a_{ij} - a_{ij}^{(0)})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{C^\alpha} \leq C\,\|u\|_{C^2} + \delta\,\|u\|_{C^{2,\alpha}},$$

wobei $\delta = \sup|a_{ij} - a_{ij}(x_0)|$. Koppelung mit geeigneter Überdeckung (U_l) von Ω liefert $C^{2,\alpha}$-Abschätzung.

10.4 Existenzsätze

Betrachte die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.4.1}$$

Satz 10.4.1. *Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^{k+2}, $k > \frac{n}{2} + \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in C^{2,\alpha}$, $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^{1,\alpha}$, $h \in C^\alpha$ genau eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ von* (10.4.1), *und*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\|f\|_{C^{1,\alpha}} + \|h\|_{C^\alpha} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}}\big) \tag{10.4.2}$$

Beweis. OBdA sei $u_0 = 0$. (Sonst betrachte $\tilde{u} = u - u_0$, $\tilde{f} = f - \nabla u_0$.) Weiter gelte oBdA $f = 0$. (Sonst betrachte $\tilde{h} = h - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in C^\alpha$.)

Sei $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ glättender Kern, $h_\epsilon = h * \rho_\epsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\epsilon > 0$. Nach Satz 9.1.2 gibt es zu h_ϵ eine eindeutige Lösung $u_\epsilon \in H^{k+2} \cap H_0^1(\Omega)$ für $k > \frac{n}{2} + \alpha$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u_\epsilon &= h_\epsilon \quad \text{in } \Omega \\ u_\epsilon &= 0 \quad\ \ \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.4.1ϵ}$$

Satz 9.1.1 liefert $u_\epsilon \in C^{2,\alpha}$ und nach Satz 10.3.1 gilt

$$\|u_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}} \le C\big(\|u_\epsilon\|_{H^1} + \|h_\epsilon\|_{C^\alpha}\big).$$

Weiter folgt aus (10.4.1ϵ) mit Lemma 7.1.2 die Abschätzung

$$c_0^{-1}\|u_\epsilon\|_{H^1}^2 \le \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (-\Delta u_\epsilon)u_\epsilon\, dx \le \|h_\epsilon\|_{L^2}\|u_\epsilon\|_{L^2} \le \|h_\epsilon\|_{L^2}\|u_\epsilon\|_{H^1};$$

d.h.

$$\|u_\epsilon\|_{H^1} \le C\|h_\epsilon\|_{L^2} \le C\|h_\epsilon\|_{C^\alpha}.$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \|h_\epsilon\|_{L^\infty} &= \sup|h * \rho_\epsilon| \le \|h\|_{L^\infty}, \\ [h_\epsilon]_{C^\alpha} &\le \sup_{x_1 \ne x_2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(x_1 - y) - h(x_2 - y)|\rho_\epsilon(y)}{|x_1 - x_2|^\alpha}\, dy \le [h]_{C^\alpha}, \end{aligned}$$

und damit

$$\|u_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}} \le C\|h\|_{C^\alpha}.$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt $u_\epsilon \to u$ in C^2 (für eine Teilfolge), und $u \in C^{2,\alpha}$ löst

$$\begin{aligned} -\Delta u &= h \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.4.3}$$

Nach Satz 9.1.2 ist u eindeutig. ∎

Satz 10.4.2. *Die Aussage von Satz 10.4.1 bleibt richtig für*

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + cu$$

mit $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,\alpha}$ *gleichmässig elliptisch,* $c \in C^\alpha$*, sofern* $c \geq 0$.

Bemerkung 10.4.1. *Die Eigenfunktionen* $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$ *des Laplace-Operators erfüllen*

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_i - \lambda_i\varphi_i &= 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ \varphi_i &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 10.4.2 gilt also nicht für beliebige $c \in C^\alpha$.

Beweis von Satz 10.4.2. Wie vorher genügt es, $u_0 \equiv 0$ und $f \equiv 0$ zu betrachten. Wir benutzen die „Kontinuitätsmethode“: Für $0 \leq t \leq 1$ setze

$$A^{(t)}u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(t)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + c^{(t)}u$$

mit $a_{ij}^{(t)} = (1-t)\delta_{ij} + ta_{ij} = a_{ji}^{(t)}, c^{(t)} = tc.$

Offenbar ist $(a_{ij}^{(t)})$ gleichmässig elliptisch mit Konstanten $0 < \lambda \leq \Lambda$ unabhängig von t, und $c^{(t)} \geq 0$. Für $u \in C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda \left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 &\leq \int_\Omega a_{ij}^{(t)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx \leq \int_\Omega (A^{(t)}u)u\,dx \\ &\leq \big\|A^{(t)}u\big\|_{L^2}\left\|u\right\|_{L^2} \leq C\big\|A^{(t)}u\big\|_{C^\alpha}\left\|u\right\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Mit der Poincaré-Ungleichung folgt

$$\left\|u\right\|_{H^1} \leq C_1\big\|A^{(t)}u\big\|_{C^\alpha} \tag{10.4.4}$$

mit C_1 unabhängig von $t \in [0,1]$. Zusammen mit Satz 10.3.1 folgt

$$\left\|u\right\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_2\big\|A^{(t)}u\big\|_{C^\alpha}, \tag{10.4.5}$$

wo C_2 unabhängig ist von t. Setze

$$X = C^{2,\alpha} \cap H_0^1(\Omega),\ Y = C^\alpha(\Omega),$$

und betrachte

$$I = \{t \in [0,1];\ A^{(t)}:\ X \to Y \text{ surjektiv}\}.$$

Wir zeigen: $I = [0,1]$. Insbesondere $1 \in I$, und die Behauptung folgt. Beachte $I \neq \emptyset$, da $0 \in I$ nach Satz 10.4.1.

Beh.1. *I ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(t_k) \subset I$ mit $t_k \to t$ $(k \to \infty)$. Zu vorgegebenem $h \in Y$ seien $u_k \in X$ mit $A^{(t_k)}u_k = h$. Dann ist $(u_k) \subset C^{2,\alpha}$ wegen (10.4.4) beschränkt. Eine Teilfolge $u_k \to u$ in C^2 und $u \in C^{2,\alpha}$ löst $A^{(t)}u = h$. □

Beh.2. *I ist offen.*

Beweis. Sei $t_0 \in I$, und sei $h \in Y$ gegeben. Setze $R := (C_1 + C_2) \|h\|_{C^\alpha}$. Für $t \in I$, $v \in \overline{B_{2R}(0;X)}$ sei $u = \Phi^{(t)} v$ Lösung von

$$A^{(t_0)} u = A^{(t_0)} v - A^{(t)} v + h \in C^\alpha = Y.$$

Da

$$\begin{aligned}\left\|A^{(t_0)} v - A^{(t)} v\right\|_{C^\alpha} &= |t - t_0| \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\Big((\delta_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big) + cv \right\|_{C^\alpha} \\ &\le C|t - t_0| \, \|v\|_{C^{2,\alpha}},\end{aligned}$$

folgt mit (10.4.4) und (10.4.5) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u\|_X = \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \|u\|_{H^1} &\le (C_1 + C_2)\left\|A^{(t_0)} u\right\|_{C^\alpha} \\ &\le C_3 |t - t_0| \, \|v\|_X + R \le 2R,\end{aligned}$$

falls $|t - t_0| < \frac{1}{2C_3} =: \delta$. Für $v_1, v_2 \in \overline{B_{2R}(0;X)}$, $|t - t_0| < \delta$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\left\|\Phi^{(t)}(v_1) - \Phi^{(t)}(v_2)\right\|_X &\le (C_1 + C_2)\left\|(A^{(t_0)} - A^{(t)})(v_1 - v_2)\right\|_{C^\alpha} \\ &\le C_3 |t - t_0| \, \|v_1 - v_2\|_X \le \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_X \, ;\end{aligned}$$

d.h. für $t \in [0,1]$ mit $|t - t_0| < \delta$ definiert $\Phi^{(t)}$ eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $M = \overline{B_{2R}(0;X)}$. Also existiert für derartige t ein Fixpunkt $u \in \overline{B_{2R}(0;X)}$ von $\Phi^{(t)}$, und $A^{(t)} u = h$. D.h. $I \supset B_\delta(t_0) \cap [0,1]$. □

Da $I \neq \emptyset$, folgt mit Beh. 1 und Beh. 2, dass $I = [0,1]$. □

Index