

## DISKRETE MATHEMATIK

Die beiden Teilprüfungen in Diskreter Mathematik und in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik werden unabhängig voneinander korrigiert und bewertet. Die Gesamtnote wird das auf Viertelnoten gerundete arithmetische Mittel der beiden Teilnoten sein. Achten Sie bitte darauf, dass Sie Ihre Lösungswege nachvollziehbar darstellen, und verweilen Sie nicht zu lange bei Aufgaben, die Ihnen Schwierigkeiten bereiten!

Viel Erfolg!

1. Zeigen Sie: Die Anzahl der Partitionen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  in  $n - 2$  (nichtleere) Blöcke beträgt

$$\frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-5).$$

[2 Punkte]

2. Seien  $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$  fünf Punkte der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten gegeben. Zeigen Sie, dass man daraus zwei Punkte  $P_i, P_j$  ( $i \neq j$ ) so auswählen kann, dass der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{P_i P_j}$  auch ganzzahlige Koordinaten hat.

[2 Punkte]

3. Finden Sie einen Körper  $K$  mit mehr als 2 Elementen, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\rightarrow K \\ a &\mapsto a^4 \end{aligned}$$

bijektiv ist.

[1 Punkt]

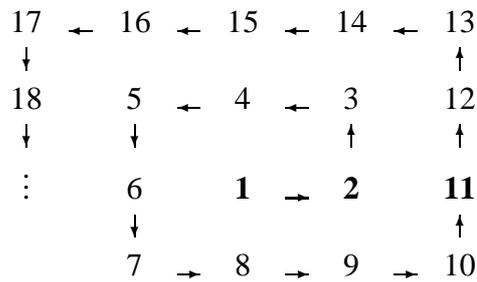
4. Finden Sie einen Graphen  $G = (V, E)$  mit  $|V| \geq 2$ , dessen einziger Automorphismus die Identitätsabbildung  $\text{id}: V \rightarrow V$  ist.

[Zur Erinnerung: Ein Automorphismus ist eine bijektive Abbildung  $f: V \rightarrow V$  mit  $\{v, w\} \in E \iff \{f(v), f(w)\} \in E$ .]

[1 Punkt]

**Bitte wenden!**

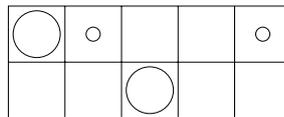
5. Die positiven ganzen Zahlen werden wie folgt spiralförmig angeordnet:



Die Zahlen auf dem von 1 ausgehenden horizontalen Strahl nach rechts bilden die Folge  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 11, \dots$

Finden Sie eine Rekursionsformel für diese Zahlenfolge und bestimmen Sie deren erzeugende Funktion  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  als rationale Funktion. [3 Punkte]

6. 4 der 10 Felder im  $2 \times 5$ -Kärtchen werden ausgestanzt, und zwar je 2 mit einem grossen bzw. kleinen kreisrunden Loch. Wieviele so gelochte unterscheidbare Kärtchen gibt es?



[3 Punkte]

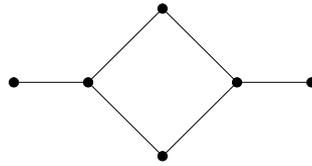
7. Sei  $w_n$  die Anzahl aller Wörter  $\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n$  aus  $n$  „Buchstaben“  $\ell_i \in \{a, b\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), die keine unmittelbar aufeinanderfolgenden b's enthalten. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$  als rationale Funktion.

Beispiel:  $w_0 = 1$  (leeres Wort)  
 $w_1 = 2$  a, b  
 $w_2 = 3$  aa, ab, ba

[3 Punkte]

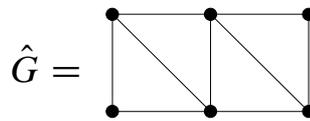
**Siehe nächstes Blatt!**

8. Gegeben sei der folgende Graph  $G = (V, E)$  mit 6 Ecken und 6 Kanten.



Sei  $\tilde{G} := (V, \binom{V}{2} - E)$ , d. h.  $\tilde{G}$  hat dieselbe Eckenmenge wie  $G$ , und  $\{v, w\}$  (mit  $v, w \in V, v \neq w$ ) ist genau dann eine Kante von  $\tilde{G}$ , wenn  $\{v, w\}$  keine Kante von  $G$  ist. (Der Graph  $\tilde{G}$  hat also 9 Kanten.)

a) Sind  $\tilde{G}$  und der Graph



isomorph? (Begründung!)

b) Der Graph  $\hat{G}$  aus a) sei Untergraph eines weiteren planaren Graphen  $\bar{G}$  mit derselben Eckenmenge wie  $\hat{G}$ . Wieviele Kanten kann  $\bar{G}$  höchstens haben? (Begründung!)

[3 Punkte]