2. Vordiplom, ITET Herbst 2003
R. Suter

DISKRETE MATHEMATIK

Die beiden Teilprüfungen in Diskreter Mathematik und in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik werden unabhängig voneinander korrigiert und bewertet. Die Gesamtnote wird das auf Viertelnoten gerundete arithmetische Mittel der beiden Teilnoten sein. Achten Sie bitte darauf, dass Sie Ihre Lösungswege nachvollziehbar darstellen, und verweilen Sie nicht zu lange bei Aufgaben, die Ihnen Schwierigkeiten bereiten!

Viel Erfolg!

1. Beweisen Sie (zum Beispiel durch kombinatorische Überlegung) die Rekursionsformel

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{m} \left\{ {m \atop k-1} \right\} \qquad (n, k \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

Hierbei bezeichne $\left\{ {n \atop k} \right\}$ die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ in k (nichtleere) Blöcke, und $\binom{n-1}{m}$ ist ein Binomialkoeffizient.

Hinweis: Betrachten Sie speziell den Block, welcher die Zahl n enthält. [2 Punkte]

2. Berechnen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq 10^6$, die zu 110 teilerfremd sind. [Mit anderen Worten: Berechnen Sie die Kardinalität der Menge

$$\{\, n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10^6 \text{ und } \mathrm{ggT}(n, 110) = 1 \,\} \qquad]$$

[3 Punkte]

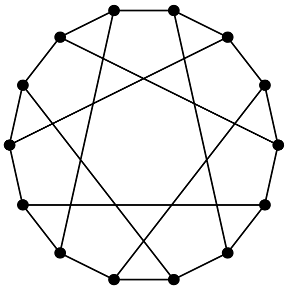
3. Mit $\mathbb{F}_4$ wird wie üblich der Körper mit 4 Elementen bezeichnet. Ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_4 & \to & \mathbb{F}_4 \\ a & \mapsto & a^3 \end{array}$$

injektiv? (Begründung!) [1 Punkt]

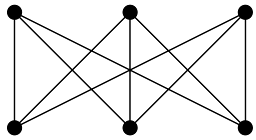
Bitte wenden!

4. Zeigen Sie, dass der folgende Graph G mit 14 Ecken und 21 Kanten nicht planar ist, indem Sie einen Untergraphen von G angeben, der zu einer Unterteilung von $K_{3,3}$ isomorph ist.



[Zur Erinnerung:

$K_{3,3}$



]

[1 Punkt]

5. Die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist durch die Rekursionsformel

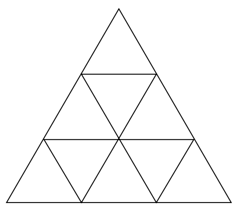
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

mit den Anfangswerten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ gegeben. Drücken Sie die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

als rationale Funktion aus. [3 Punkte]

6. Kärtchen in der Form eines gleichseitigen Dreicks sind auf Vorder- und Rückseite in 9 kongruente gleichseitige Teildreicke unterteilt worden.



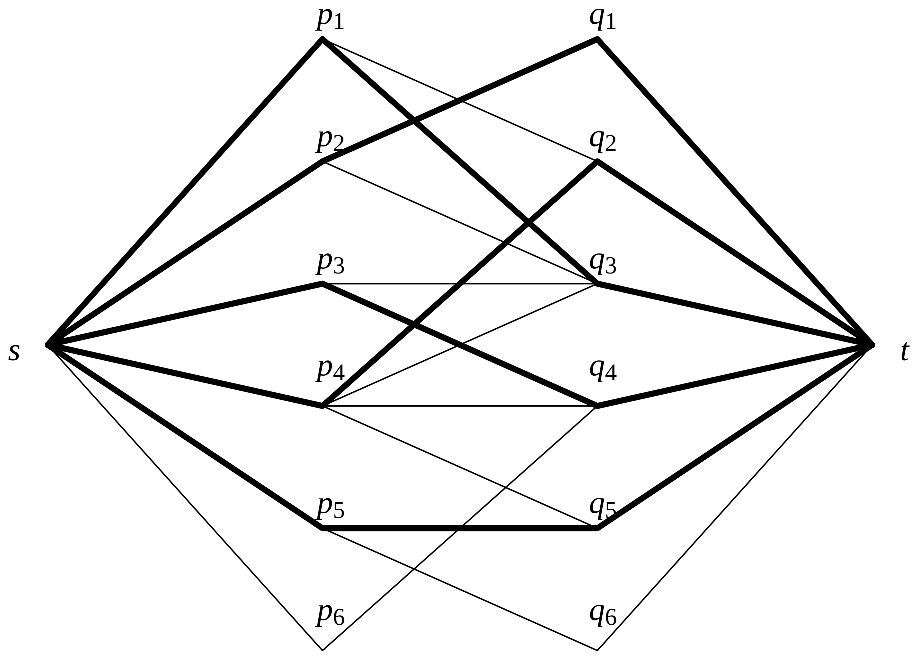
Wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, solche Kärtchen durch genau 3 gleichartige Bohrungen durch die Mitten verschiedener Teildreiecke zu kennzeichnen? Hierbei werden durchbohrte Kärtchen, die sich durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, als <u>un</u>unterscheidbar angesehen. [3 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

7. Im folgenden Netzwerk mit Quelle s und Senke t seien alle Bögen von links nach rechts gerichtet und haben Kapazität 1.

Der Fluss f mit Wert $\mathrm{val}(f) = 5$ ist so definiert:

$$\begin{aligned} f(\text{dick gezeichnete Bögen}) &= 1\,, \\ f(\text{dünn gezeichnete Bögen}) &= 0\,. \end{aligned}$$



a) Finden Sie einen zunehmenden Weg bezüglich f.
[Geben Sie dessen Folge der Ecken an.]

b) Finden Sie einen Schnitt (S, T) der Kapazität $\mathrm{cap}(S, T) = 8$.

Zur Erinnerung:

Schnitt: $S \cup T = \{s, p_1, \ldots, p_6, q_1, \ldots, q_6, t\}$
$S \cap T = \emptyset$
$s \in S,\ t \in T$

$$\mathrm{cap}(S, T) = \sum_{\substack{(u,v)\text{ Bogen} \\ u \in S, v \in T}} 1$$

[2 Punkte]

Bitte wenden!

8. Der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ ($n \geq 3$) besteht aus den $2n$ Ecken $1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$ und den $3n$ Kanten

$$\begin{aligned}
&\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}, \\
&\{\bar{1}, \bar{2}\}, \{\bar{2}, \bar{3}\}, \ldots, \{\overline{n-1}, \bar{n}\}, \{\bar{n}, \bar{1}\}, \\
&\{1, \bar{1}\}, \{2, \bar{2}\}, \ldots\ldots, \{n, \bar{n}\}\ .
\end{aligned}$$

Wieviele vollständige Matchings gibt es in G_n?

[Gesucht ist also die Anzahl der n-elementigen Teilmengen $M \subseteq E_n$ mit $\bigcup_{e \in M} e = V_n$.]

Hinweis: Sie dürfen ohne Begründung das Resultat verwenden, dass es im Gittergraphen

$$\Big(V_n, E_n - \big\{\{n, 1\}, \{\bar{n}, \bar{1}\}\big\}\Big)$$

F_{n+1} vollständige Matchings gibt. (F_{n+1} bezeichnet die $(n+1)$-ste Fibonaccizahl.)

[3 Punkte]