Musterlösung Serie 1

1. a) Wahrheitsager antworten, dass sie die Wahrheit sagen; Lügner antworten, dass sie die Wahrheit sagen. — Niemand sagt von sich, dass er ein Lügner ist. (Siehe auch **e)**.)

b) Wäre der Mann ein Lügner, müsste seine Aussage „Mindestens einer von uns lügt“ eine Lüge sein, wäre aber gleichzeitig wahr.
Deshalb muss der Mann ein Wahrheitsager sein, seine Aussage wahr sein, und seine Frau eine Lügnerin.

c) Wäre der Mann ein Lügner, wäre die Prämisse seiner Aussage „Wenn ich ein Wahrheitsager bin, dann lügt meine Frau auch nie“ falsch; folglich seine Aussage (die logisch eine *Implikation* darstellt) wahr. Dies steht im Widerspruch dazu, dass Lügner keine wahren Aussagen treffen.
Somit ist der Mann ein Wahrheitsager, und seine Frau auch.

d) Die Frau muss eine Wahrheitsagerin sein. —
Sagt der Mann die Wahrheit, ist das klar. Lügt der Mann, darf seine Frau nicht von der gleichen Art wie er sein, muss also eine Wahrheitsagerin sein.

e) Z. B.: „Was würden Sie sagen, wenn ich Sie fragen würde, ob Sie ein Wahrheitsager sind?“ — Ein Wahrheitsager antwortet „ja“, ein Lügner „nein“.

Alternativ dazu kann man die Aufgabe auch mittels formaler Aussagenlogik lösen: Wenn ein Einwohner die Aussage B macht, so hängt der Wahrheitswert dieser Aussage davon ab, ob der Einwohner die Wahrheit sagt oder lügt. Schreibt man abkürzend A für „der Einwohner sagt die Wahrheit“, so gilt (entweder) $A \wedge B$ (der Einwohner sagt die Wahrheit und seine Aussage B stimmt) oder $\neg A \wedge \neg B$ (der Einwohner lügt und seine Ausage ist falsch, d. h. die Negation seiner Aussage stimmt):

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\ .$$

Dies ist das Gleiche wie die Äquivalenz $A \longleftrightarrow B$.

a) Schreibe

$$A = \text{der befragte Einwohner sagt die Wahrheit.}$$

wäre die Aussage des Einwohners „Ich bin ein Lügner“, d. h. $B := \neg A$, müsste nach der obigen Vorabdiskussion $(A \longleftrightarrow \neg A)$ gelten, aber $(A \longleftrightarrow \neg A) = 0$ ist immer falsch. Widerspruch! $\square$

Bitte wenden!

b) Schreibe von jetzt an

$$\begin{aligned} M &:= \text{der Mann ist ein Wahrheitsager;} \\ F &:= \text{die Frau ist ein Wahrheitsager.} \end{aligned}$$

Der Mann macht die Aussage $(\neg M \vee \neg F)$, weshalb gelten muss:

$$\begin{aligned} & \big(M \wedge (\neg M \vee \neg F)\big) \vee \big(\neg M \wedge \underbrace{\neg(\neg M \vee \neg F)}_{M \wedge F}\big) \\ = \ & \big(\underbrace{(M \wedge \neg M)}_{0} \vee (M \wedge \neg F)\big) \vee 0 \\ = \ & M \wedge \neg F \end{aligned}$$

Mann sagt die Wahrheit, Frau lügt.

c) Die Aussage des Mannes ist $(M \to F)$, d. h. in Wirklichkeit gilt:

$$\begin{aligned} & \big(M \wedge (M \to F)\big) \vee \big(\neg M \wedge \neg(M \to F)\big) \\ = \ & \big(M \wedge (\neg M \vee F)\big) \vee \big(\neg M \wedge \underbrace{\neg(\neg M \vee F)}_{(M \wedge \neg F)}\big) \\ = \ & \big(\underbrace{(M \wedge \neg M)}_{0} \vee (M \wedge F)\big) \vee \underbrace{(\neg M \wedge M \wedge \neg F)}_{0} \ = \ M \wedge F \end{aligned}$$

Beide sagen die Wahrheit.

d) Die Aussage des Mannes ist $(M \longleftrightarrow F)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} M \leftrightarrow (M \leftrightarrow F) \ &= \ (M \leftrightarrow M) \leftrightarrow F \qquad \text{(Assoziativität der Äquivalenz)} \\ &= \ 1 \leftrightarrow F \ = \ F \end{aligned}$$

Die Frau ist eine Wahrheitsagerin.

2. Für 2 Schalter: $Q = (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge \neg P_2)$

Für 3 Schalter: Abkürzung:

$P_1 =$ Schalter 1 ist in Position $+$,
$P_2 =$ Schalter 2 ist in Position $+$,
$P_3 =$ Schalter 3 ist in Position $+$,
$Q =$ das Licht brennt.

Siehe nächstes Blatt!

Die für ein Treppenhaus passende Verallgemeinerung wäre, dass jedes Mal, wenn ein Schalter betätigt wird, sich der Zustand („an“/„aus“) des Lichtes ändert. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten (das Licht kann an oder aus sein, wenn alle Schalter in Position $+$ stehen), von der wir hier eine aufführen:

P_1	P_2	P_3	Q
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Eine Realisierung dieser Verknüpfung ist:

$$Q = (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3)$$

Die andere mögliche Lösung ist

$$Q = (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3)$$

3. a)

P	Q	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	$P \wedge (Q \vee \neg Q)$	$P \wedge (Q \vee \neg Q) \leftrightarrow P$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1

b)

P	Q	$P \vee Q$	$\leftrightarrow$	$\neg(\neg P$	$\wedge$	$\neg Q)$
1	1	1	**1**	1 0	0	0
1	0	1	**1**	1 0	0	1
0	1	1	**1**	1 1	0	0
0	0	0	**1**	0 1	1	1

c)

P	Q	R	P	$\vee$	$\neg(Q$	$\vee$	$R)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg$	$(\neg Q$	$\vee$	$P)$	$\vee$	$\neg$	$(\neg R$	$\vee$	$P))$
1	1	1	1	1	0 1	1	1	**1**	1	0	0 1	1	1	0	0	0 1	1	1
1	1	0	1	1	0 1	1	0	**1**	1	0	0 1	1	1	0	0	1 0	1	1
1	0	1	1	1	0 0	1	1	**1**	1	0	1 0	1	1	0	0	0 1	1	1
1	0	0	1	1	1 0	0	0	**1**	1	0	1 0	1	1	0	0	1 0	1	1
0	1	1	0	0	0 1	1	1	**1**	0	1	0 1	0	0	1	1	0 1	0	0
0	1	0	0	0	0 1	1	0	**1**	0	1	0 1	0	0	1	0	1 0	1	0
0	0	1	0	0	0 0	1	1	**1**	0	0	1 0	1	0	1	1	0 1	0	0
0	0	0	0	1	1 0	0	0	**1**	1	0	1 0	1	0	0	0	1 0	1	0

Bitte wenden!

4. a) „Weder P noch Q“ bedeutet das gleiche wie „nicht (P oder Q)“:

$$(P \downarrow Q) \equiv \neg(P \vee Q)$$

$(R \downarrow R)$ ist demzufolge äquivalent zu $\neg R$:

$$R \downarrow R \equiv \neg(R \vee R) \equiv \neg R$$

Damit ergibt sich

$$(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \equiv \neg(P \downarrow Q) \equiv \neg\neg(P \vee Q) \equiv P \vee Q$$

$\square$

b) $$P \wedge Q \equiv \neg((\neg P) \vee (\neg Q)) \equiv (\neg P) \downarrow (\neg Q) \equiv (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$$

Die erste Umformung geschieht nach der de Morganschen Regel, die zweite benutzt die Darstellung des Peirce–Pfeils aus **a)**, und die dritte benutzt die Darstellung der Negation mittels Peirce–Pfeils (ebenfalls aus **a)**).

5. Lässt man eine der Aussagen 1–6 weg, kann man *Gegenbeispiele* angeben, die mit allen restlichen Aussagen verträglich sind und in denen Schmid *nicht* Lokführer ist. (In einigen Fällen gibt es mehrere denkbare Szenarien, die Gegenbeispiele liefern.)

Geordnet nach der Nummer der Aussage, die weggelassen wird:

1. Schmid ist Heizer und wohnt in Herznach. Dr. Müller verdient 8000,– CHF. *Dr. Keller* wohnt in Herznach neben Herrn Schmid und verdient dreimal soviel wie dieser. Schmid vom Fahrpersonal schlug kürzlich den Kondukteur, Keller, im Schach. Dr. Schmid wohnt in Basel.
2. Schmid ist Heizer und wohnt in *Zürich*. Dr. Müller verdient 8000,– CHF. Dr. Keller ist Schmids Nachbar in Zürich und verdient dreimal soviel wie dieser. Schmid vom Fahrpersonal schlug kürzlich den Kondukteur, Keller, im Schach. Dr. Schmid wohnt in Basel.
3. Schmid ist Heizer und wohnt in Herznach. Dr. Keller wohnt in Zürich. Dr. Müller wohnt in Herznach neben Herrn Schmid und verdient dreimal soviel wie dieser. Schmid vom Fahrpersonal schlug kürzlich den Kondukteur, Keller, im Schach. Dr. Schmid wohnt in Basel.
4. Schmid ist Heizer und wohnt in Herznach. Dr. Keller wohnt in Zürich. Dr. Müller wohnt in Herznach neben Herrn Schmid und verdient 8000,– CHF. Schmid vom Fahrpersonal schlug kürzlich den Kondukteur, Keller, im Schach. Dr. Schmid wohnt in Basel.

Siehe nächstes Blatt!

5. Schmid ist *Kondukteur*. Dr. Keller wohnt in Zürich. Dr. Müller verdient 8000,– CHF. *Müller* ist Heizer, wohnt neben Dr. Schmid in Herznach und erhält nur 1/3 von dessen Gehalt. *Dr. Müller* wohnt in Basel.
6. Schmid ist Heizer. Dr. Keller wohnt in Zürich. Dr. Müller verdient 8000,– CHF. *Dr. Schmid* wohnt in Herznach neben Herrn Schmid und verdient dreimal soviel wie dieser. Schmid vom Fahrpersonal schlug kürzlich den Kondukteur, Keller, im Schach.