Musterlösung Serie 2

1. a) Es gibt natürlich jeweils mehrere richtige Lösungen. Deshalb sind unsere Lösungen nur Beispiele für die geforderten Funktionen:

i) Die Funktion $f(n) = 2n$ trifft nur die geraden natürlichen Zahlen, ist also nicht surjektiv. Die Funktion ist jedoch injektiv, denn aus $2n_1 = 2n_2$ folgt $n_1 = n_2$.

ii) Die Funktion $f(n) = |n - 5|$ erreicht jede gegebene natürliche Zahl m, denn $f(m + 5) = m$, ist aber nicht injektiv.

b) i) **Bijektiv**. — Die Umkehrfunktion lautet $\mathbb{Z} \ni y \longmapsto (y - 1) \in \mathbb{Z}$.

ii) Es werden nur positive ganze Zahlen getroffen, und zwar jeweils für x und $(-x)$ die gleiche, also **weder injektiv, noch surjektiv**.

iii) Die Funktion ist sicher **nicht surjektiv**, denn zum Beispiel $1 + x^3 = 3$ hat keine ganzzahlige Lösung. Die Funktion ist streng monoton steigend, also wird keine Zahl mehrfach angenommen. Damit ist die Funktion **injektiv**.

iv) $f(0) = f(-1) = 1$, also **nicht injektiv**. Weiter gilt, dass $1+x^2+x^3+x^4+x^5$ immer ungerade ist, so dass also keine geraden Zahlen getroffen werden. Also ist die Funktion auch **nicht surjektiv**.

c) i) Hier ändert sich nichts.

ii) Hier auch nicht.

iii) Die Funktion ist streng monoton wachsend, stetig, und $\lim_{x\to\pm\infty}(1+x^3) = \pm\infty$. Deshalb ist die Funktion auf $\mathbb{R}$ **bijektiv**.

iv) Dass die Funktion **nicht injektiv** ist, sehen wir an dem gleichen Beispiel wie in **b)**, also $f(0) = f(-1) = 1$. Die Funktion ist stetig und

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = \pm\infty$$

Also ist die Funktion **surjektiv**.

2. a) $$\mathrm{Prim}(x) :\Longleftrightarrow \neg \mathrm{P}_{=1}(x) \,\wedge\, \forall y\colon \big(\mathrm{P}_{|}(y, x) \to \mathrm{P}_{=1}(y) \vee \mathrm{P}_{=}(x, y)\big)$$

b) Es existiert eine Gerade g in der Ebene E und ein Punkt P aus E, der nicht aus g ist, so dass entweder jede Gerade h in E mit $P \in h$ die Gerade g schneidet oder dass zwei verschiedene Geraden h_1, h_2 in E existieren mit $P \in h_1$ und $P \in h_2$, die g nicht schneiden.

Bitte wenden!

Bemerkung: Zur Lösung der Aufgabe kann man bei Bedarf die Aussage des Parallelenaxioms in der Sprache der Prädikate und Quantoren formulieren und dann die Negationsregeln für Quantoren benutzen.

3. Jede positive ganze Zahl a lässt sich eindeutig als Produkt der Primzahlen $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, \ldots$ schreiben in der Form:

$$a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$$

mit natürlichen Exponenten $\alpha_i \in \mathbb{N}$, wobei in der zweiten Darstellung alle α_i mit $i > N$ gleich Null gesetzt sind (also die entsprechenden Faktoren gleich $p_i^0 = 1$ sind). Die Zahl 1 hat die Primfaktorzerlegung $1 = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^0$.

Wenn jetzt $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ die Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned} a &= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i} \qquad \text{und} \\ b &= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\beta_i} \end{aligned}$$

haben, so lassen sich ggT und kgV wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a \wedge b := \mathrm{ggT}(a, b) &= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \qquad \text{und} \\ a \vee b := \mathrm{kgV}(a, b) &= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} \end{aligned}$$

a) Die Operationen $\wedge$ und $\vee$ sind sowohl kommutativ als auch assoziativ, weil die Operationen min und max es sind. (Die Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$ lässt sich auch ohne Primfaktorzerlegung beweisen, aber auch dieser Beweis bedarf gewisser mathematischer Überlegungen.)

Beide Distributivgesetze

$$\begin{aligned} a \wedge (c \vee d) &= (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \qquad \text{und} \\ a \vee (c \wedge d) &= (a \vee c) \wedge (a \vee d) \end{aligned}$$

gelten (und wegen der Kommutativität auch noch die zwei anderen), weil sie für min und max gelten.

Siehe nächstes Blatt!

$$\begin{aligned} a \wedge 1 &= 1 \\ a \vee 1 &= a \end{aligned}$$

b) i) Ergibt sich direkt aus ii) oder wie folgt:
$a \wedge b = a$ heisst, dass a der grösste gemeinsame Teiler von a und b ist, und ist damit äquivalent zu „a teilt b“. Ebenso sagt $a \vee b = b$, dass b das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist, und ist damit äquivalent dazu, dass b ein Vielfaches von a ist. Folglich gilt:

$$a \wedge b = a \quad \Longleftrightarrow \quad a|b \quad \Longleftrightarrow \quad a \vee b = b$$

ii)
$$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = a \cdot b$$
Folgt aus der Darstellung von ggT und kgV und den Potenzgesetzen, indem man benutzt, dass

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b\ .$$

iii) Alle drei Eigenschaften, d. h. Reflexivität ($a \leq a$), Antisymmetrie ($a \leq b \wedge b \leq a \to a = b$) und Transitivität ($a \leq b \wedge b \leq c \to a \leq c$) sind erfüllt, da die Teilbarkeitsrelation $|$ all diese Eigenschaften hat und weil wegen i)

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad a|b$$

gilt.

c) Wenn a und b Teiler von n sind, ist auch jeder gemeinsame Teiler von a und b Teiler von n (wegen der Transitivität der Teilbarkeitsrelation $|$), insbesondere ist also $a \wedge b = \mathrm{ggT}(a, b)$ ein Teiler von n: $a \wedge b \in T_n$

Wenn a und b Teiler von n sind, ist n ein *gemeinsames* Vielfaches von a und b und deshalb durch das *kleinste* gemeinsame Vielfache von a und b teilbar. Deshalb ist auch $a \vee b = \mathrm{kgV}(a, b)$ ein Teiler von n: $a \vee b \in T_n$

Ist jetzt

$$n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\gamma_i}$$

die Primfaktorzerlegung von n, so kann man die Operation $\bar{\ }: T_n \longrightarrow T_n$, $\overline{a} := \frac{n}{a}$, schreiben als

$$a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i} \mapsto \overline{a} = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\gamma_i - \alpha_i}$$

Die Aussage, dass $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$ in T_n liegt, lässt sich bei gegebenem n schreiben als

$$\forall\, i \in \mathbb{Z}_{>0} \colon 0 \leq \alpha_i \leq \gamma_i$$

Bitte wenden!

i) Die Frage lässt sich umformulieren zu:
Für welche $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\gamma_i}$ gilt

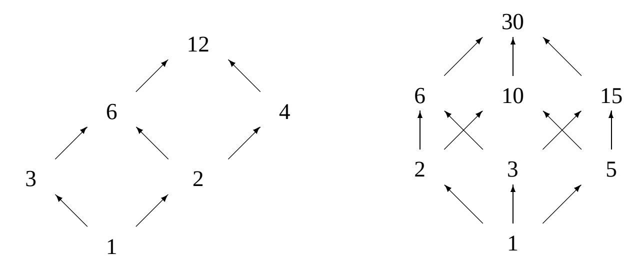
$$\forall\, i \in \mathbb{Z}_{>0}\ \forall\, (\alpha_i) \colon\ (0 \leq \alpha_i \leq \gamma_i \longrightarrow \min(\alpha_i, \gamma_i - \alpha_i) = 0)$$

Die Antwort lautet:
$$\forall\, i \in \mathbb{Z}_{>0} \colon \gamma_i \in \{0, 1\}$$
d. h., n darf jeden Primfaktor nur einmal enthalten.

ii) Gleiche Antwort. — Die Frage lautet umformuliert:
Für welche $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\gamma_i}$ gilt

$$\forall\, i \in \mathbb{Z}_{>0}\ \forall\, (\alpha_i) \colon\ (0 \leq \alpha_i \leq \gamma_i \longrightarrow \max(\alpha_i, \gamma_i - \alpha_i) = \gamma_i)$$

iii) Hasse–Diagramme von T_{12} und T_{30}:



4. **a)**
- $x \equiv_q x \iff q|(x-x) \iff q|0$ (Reflexivität)
- $x \equiv_q y \iff q|(x-y) \iff q|(y-x) \iff y \equiv_q x$ (Symmetrie)
- $x \equiv_q y$ und $y \equiv_q z \iff q|(x-y)$ und $q|(y-z)$
  $\Rightarrow q|(x-y+y-z) = (x-z) \iff x \equiv_q z$ (Transitivität)

b) i) Seien $x' \in [x]_q$ und $y' \in [y]_q$ beliebige Repräsentanten der Äquivalenzklassen. Das heisst, $q|(x-x')$ und $q|(y-y')$. Daraus folgt, dass
$q|(x-x'+y-y') = (x+y-(x'+y'))$. Also $(x'+y') \in [x+y]_q$.

ii) In Teil i) wurde der wichtige Fakt bewiesen, dass die Operation ‚+‘ je zwei Äquivalenzklassen bzgl. $\equiv_q$ eine wohldefinierte weitere der *Äquivalenzklassen* zuordnet, also eine Operation auf der Menge der Äquivalenzklassen darstellt. Desweiteren verhält sich die Operation auf den Äquivalenzklassen genau gleich wie die die “normale Addition” der reellen Zahlen, durch die sie definiert wurde:

- **Assoziativität:** klar

Siehe nächstes Blatt!

- **Neutrales Element:** $[0]_q$
- **Inverses Element:** $-[x]_q = [-x]_q$
- **Kommutativität:** klar

5. Eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist eindeutig dadurch bestimmt, dass man die zugehörige Aufspaltung von M in Äquivalenzklassen (bzgl. dieser Äquivalenzrelation) angibt. D. h., gesucht ist die Anzahl der möglichen Arten, die Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ als disjunkte Vereinigung von nicht-leeren Teilmengen darzustellen. Die nicht-leeren Teilmengen entsprechen dabei den einzelnen Äquivalenzklassen.

a) **2**: $\{\{1, 2\}\}$ und $\{\{1\}, \{2\}\}$.

b) **5**: $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ und $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

c) **15**: $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$,
$\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$,
$\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$,
$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$,
$\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$und $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

Bemerkung: *Bellzahlen*:

1, 1, **2**, **5**, **15**, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, ...