

## Musterlösung Serie 3

1. a)  $r * s = (r + 1)(s + 1) - 1$ .

**Assoziativität:** Ist erfüllt, denn

$$\begin{aligned} (r * s) * t &= ((r + 1)(s + 1) - 1 + 1)(t + 1) - 1 \\ &= (r + 1)(s + 1)(t + 1) - 1 \\ &= (r + 1)((s + 1)(t + 1) - 1 + 1) - 1 \\ &= r * (s * t) \end{aligned}$$

**Neutrales Element** existiert: 0.

$$0 * s = s = s * 0$$

**INVERSES** existiert keines zum Element  $-1$ , denn:

$$\begin{aligned} r * (-1) &= 0 \\ \iff -r + r - 1 &= 0 \\ -1 &= 0 \quad \text{ist nicht lösbar.} \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}, *)$  ist keine Gruppe.

**Bemerkung:** Die Verknüpfung  $*$  definiert allerdings eine Gruppenstruktur auf der Menge der reellen Zahlen, die ungleich  $-1$  sind. (Dazu müsste man auch noch zeigen, dass aus  $r \neq -1$  und  $s \neq -1$  folgt, dass  $r * s \neq -1$ .)

b)  $|0| = 1, |x| = \frac{12}{\text{ggT}(x, 12)}$  für  $x \in \mathbb{Z}_{12} - \{0\}$ .

c)  $\mathbb{Z}_{24}^\times = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} = \{1, 5, 7, 11, -11, -7, -5, -1\}$   
1 hat Ordnung 1. Jedes andere Element hat Ordnung 2:

$$(\pm 5)^2 = (\pm 7)^2 = (\pm 11)^2 = (\pm 13)^2 = 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_{24}$$

**Bemerkung: Alternativ** kann man feststellen, dass die zu 24 teilerfremden Zahlen gerade die nicht durch 2 oder 3 teilbaren Zahlen sind, um dann zu beweisen, dass wenn  $n$  nicht durch 2 oder 3 teilbar ist,

$$n^2 - 1 \text{ durch } 24 = 8 \cdot 3 \text{ teilbar ist}$$

(z. B. indem man  $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$  benutzt).

d) Für beliebige  $a, b \in G$  gilt

$$a \circ b = \underbrace{(b \circ a) \circ (b \circ a)}_{=1} \circ a \circ b = b \circ a \circ b \circ \underbrace{a \circ a}_{=1} \circ b = b \circ a \circ \underbrace{b \circ b}_{=1} = b \circ a$$

e)  $|x| = \inf \{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid x^n = 1\}$   
und  $x^n = 1 \iff yx^n = y \iff yx^n y^{-1} = yy^{-1} = 1 \iff (yx y^{-1})^n = 1$ .  
Die letzte Äquivalenz ergibt sich aus der Gleichheit  $(yx y^{-1})^n = yx^n y^{-1}$ :

$$\begin{aligned} (yx y^{-1})^n &= yx y^{-1} yx y^{-1} \dots yx y^{-1} yx y^{-1} \\ &= yx (y^{-1} y) x (y^{-1} \dots y) x (y^{-1} y) x y^{-1} \\ &= yx x \dots x x y^{-1} \\ &= yx^n y^{-1} \end{aligned}$$

2. a) I) Identität

II) Rotationen um Achsen durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt ( $120^\circ, 240^\circ$ )

III) Rotationen durch zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte ( $180^\circ$ )

IV) Spiegelungen an Ebenen, die durch eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante verlaufen

V) Drehspiegelungen: Spiegelungen an Ebenen, die durch jeweils 2 Paare gegenüberliegender Kantenmitten verlaufen und anschließende Drehung (um  $\pm 90^\circ$ ) um die Achse, die senkrecht auf der Spiegelungsebene steht und durch den Mittelpunkt des Tetraeders verläuft

	Anzahl
Typ I)	1
Typ II)	$4 \times 2 = 8$
Typ III)	3
Typ IV)	6
Typ V)	$3 \times 2 = 6$

Die Ordnung der Gruppe ist also  $1 + 8 + 3 + 6 + 6 = 24$ .

Dies lässt sich auch folgendermassen bestimmen:

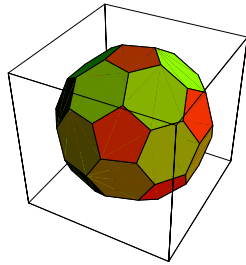
$$|\text{Ordnung}| = |\text{Bahn}(x)| \cdot |\text{Stab}_x| = 4 \cdot 6 = 24.$$

Der Orbit einer Ecke  $x$  unter allen Symmetrien besteht aus allen 4 Punkten des Tetraeders, da jede Ecke in jede andere überführt werden kann. Der Stabilisator dieser Ecke  $x$  ist isomorph zur Symmetriegruppe des gegenüberliegenden (gleichseitigen) Dreiecks, die aus 6 Elementen besteht. — Drehungen des Dreiecks entsprechen Drehungen des Tetraeders um die Achse durch den Dreiecksmittelpunkt und  $x$ ; Spiegelungen des Dreiecks an einer Achse entsprechen Spiegelungen des Tetraeders an der Ebene, die durch diese Achse und  $x$  verläuft.

**Bitte wenden!**

**Siehe nächstes Blatt!**

b) Die Symmetriegruppe des Fussballs wirkt z. B. auf den Seitenflächen des Balles.



Jede der 12 fünfeckigen Seitenflächen des Fussballs lässt sich durch eine Drehung des Balles in jede andere überführen. Die Drehungen, die eine Fünfeckfläche des Balles auf sich selbst abbilden, bilden auch die gegenüberliegende fünfeckige Seitenfläche in sich ab und müssen deshalb die Verbindung der Mittelpunkte dieser beiden Flächen als Drehachse haben. Es gibt insgesamt 5 solche Drehungen (wenn man Identität als Drehung um  $0^\circ$  dazuzählt.) Damit ist

$$\begin{aligned} & \text{Ordnung der Symmetriegruppe} \\ &= (\text{Anzahl Bahnen einer 5-Eck-Fläche}) \cdot (\text{Ordnung der Stabilisatorgruppe}) \\ &= 12 \cdot 5 = 60. \end{aligned}$$

**Alternativer Lösungsweg:** Wenn man auf jede fünfeckige Seite des Fussballs eine Pyramide aufsetzt, erhält man ein regelmässiges Ikosaeder,



und jede Symmetrie des Fussballs wird auch das Ikosaeder symmetrisch auf sich abbilden. Umgekehrt kann man aus einem regelmässigen Ikosaeder wieder einen Fussball konstruieren, indem man alle 12 „Spitzen“ abschneidet, so dass sämtliche Kantenlängen der abgeschnittenen Pyramiden ein Drittel der Kantenlängen des Ikosaeders betragen. Dadurch kann man sich überzeugen, dass jede Symmetrie des Ikosaeders auch den (abgeschnittenen) Fussball symmetrisch auf sich abbildet. Deshalb sind die Symmetriegruppen von Fussball und regelmässigem Ikosaeder „gleich“ (besser gesagt, isomorph), aber die des Ikosaeders lässt sich etwas einfacher berechnen:

Wir nennen die Gruppe der Rotationssymmetrien des Ikosaeders  $I$ . Sei  $x$  ein Eckpunkt des Ikosaeders. Die Gruppe  $I$  operiert transitiv auf der Menge der Ecken des Ikosaeders, so dass  $|I \cdot x| = 12$ . Wenn eine Rotation den Punkt  $x$  festlässt,

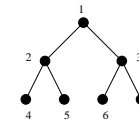
muss auch der  $x$  diametral gegenüberliegende Eckpunkt fixiert bleiben, weil er *der einzige* Eckpunkt ist, der mit keinem der Nachbarn von  $x$  eine Kante gemeinsam hat (und da die Nachbarpunkte von  $x$  wieder in zu  $x$  benachbarte Punkte abgebildet werden müssen). Das bedeutet dann, dass die ganze Achse durch  $x$  und den gegenüberliegenden Punkt bei der Rotation fixiert bleiben muss und damit die Drehachse der Rotation sein muss.

Tatsächlich gibt es genau 5 Rotationen um diese Achse, die das Ikosaeder in sich überführen (mit Winkeln  $0^\circ$ ,  $\pm 72^\circ$  und  $\pm 144^\circ$ ).

Damit gilt:

$$|I| = |I \cdot x| \cdot |I_x| = 12 \cdot 5 = 60.$$

c)  $S =$  Symmetriegruppe von  $T$ .  $S$  operiert auf den Ecken  $\{1, \dots, 7\}$  von  $T$ .



Betrachte zum Beispiel die Ecke 4:  $|S \cdot 4| = 4$  und  $|S_4| = 2$  ( $S_4 = \{e, (67)\}$ ). Also gilt

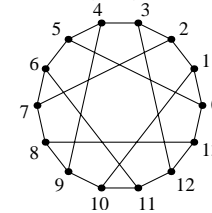
$$|S| = 4 \cdot 2 = 8.$$

Die Elemente von  $S$  sind (als Permutationen der Ecken in Zykelschreibweise):

$$\begin{aligned} & e \text{ (Identität)}, (45), (67), (23)(46)(57), (45)(67), \\ & (23)(4657), (23)(4756), (23)(47)(56). \end{aligned}$$

d) **Behauptung:** Die Symmetriegruppe des Graphen hat die Ordnung  $14 \cdot 24 = 336$ .

Seien die Ecken mit den Nummern  $0, \dots, 13$  bezeichnet wie im Bild:



Die Symmetriegruppe des Graphen wirkt auf den Ecken transitiv, d. h. jede Ecke liegt in der Bahn eines einzigen Eckpunktes. Z. B. lässt sich der Punkt 0 durch die Bijektion (im Bild eine Drehung um den Winkel  $360^\circ \cdot \frac{2k}{14}$ )

$$f(n) := n + 2k \pmod{14},$$

**Bitte wenden!**

**Siehe nächstes Blatt!**

die eine Symmetrie des Graphen ist (Überprüfen!), in jeden Punkt mit gerader Nummer  $2k$  abbilden, und er lässt sich durch die Bijektion (im Bild eine Spiegelung des 14-Ecks)

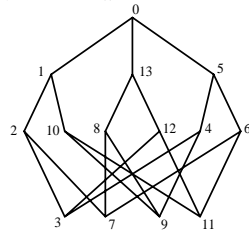
$$f(n) := 2k + 1 - n \pmod{14},$$

die auch eine Symmetrie des Graphen ist (Auch überprüfen!), in jeden Punkt mit ungerader Nummer  $2k + 1$  abbilden.

Die Bahn von 0 besteht somit aus 14 Punkten. Das ist der erste Faktor in  $336 = 14 \cdot 24$ . Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass die Isotropiegruppe des Punktes 0 aus 24(!) Elementen besteht, d. h., dass genau 24 Symmetrien des Graphen existieren, die den Punkt 0 unbewegt lassen.

Was wissen wir über solche Abbildungen  $f$ ? Wenn  $\{0, k\}$  eine Kante des Graphen ist, muss auch  $\{f(0) = 0, f(k)\}$  eine Kante sein, d. h. jedes solche  $f$  muss die drei Nachbarecken 1, 5 und 13 von 0 untereinander permutieren. Mit der gleichen Begründung muss  $f$  auch die Ecken 2, 10, 4, 6, 8 und 12, die von 0 aus im Graph Abstand 2 haben untereinander permutieren, und  $f$  muss die vier Ecken 3, 7, 9, 11, die von 0 aus den Abstand 3 haben (und damit von 0 am weitesten entfernt liegen) untereinander permutieren.

Hier ein Bild des Graphen, das diese „Abstände“ besser wiedergibt:



**Behauptung** Jede der  $4! = 24$  Permutationen der Punkte 3, 7, 9, 11 kann durch eine Symmetrie des Graphen, die den Punkt 0 fest lässt, realisiert werden. Umgekehrt gibt es zu jeder Permutation der Punkte 3, 7, 9, 11 auch nur genau eine derartige Symmetrie des Graphen gibt.

Wenn diese Behauptung bewiesen ist, sind wir fertig (24 ist der zweite Faktor in  $336 = 14 \cdot 24$ ).

Der **zweite Teil der Behauptung**, dass  $f$  durch die Wahl der Bilder  $f(3), f(7), f(9), f(11)$  von 3, 7, 9, 11 *eindeutig* bestimmt ist, ist der einfachere:

Jedes Paar  $\{x, y\}$  von Punkten aus der Menge  $\{3, 7, 9, 11\}$  (und damit auch aus der Menge  $\{f(3), f(7), f(9), f(11)\}$ ) bestimmt eindeutig einen Punkt aus der Menge  $\{2, 10, 8, 12, 4, 6\}$ , der gleichzeitig im Graphen Nachbar von  $x$  und von  $y$  ist. Z. B. ist 2 gleichzeitig der Nachbar von 3 und 7 (siehe Abbildung), deshalb

**Bitte wenden!**

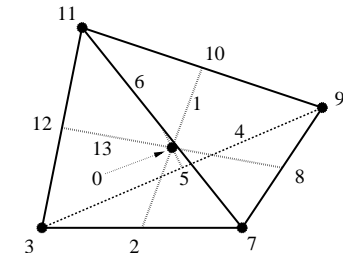
muss  $f(2)$  gleichzeitig Nachbar von  $f(3)$  und  $f(7)$  sein, wodurch  $f(2)$  eindeutig bestimmt ist. Damit sind die Werte  $f(2), f(10), f(8), f(12), f(4), f(6)$  eindeutig durch die Werte  $f(3), f(7), f(9), f(11)$  bestimmt.

Analog zeigt man, dass auch die Werte  $f(1), f(13)$  und  $f(5)$  durch die Werte  $f(2), f(10), f(8), f(12), f(4), f(6)$  und damit indirekt durch die Werte  $f(3), f(7), f(9), f(11)$  eindeutig bestimmt sind (und  $f(0)$  muss 0 sein).

Allerdings muss dafür z. B., da 1 sowohl Nachbar von 2 als auch von 10 ist, der Wert  $f(1)$  gleichzeitig Nachbar von  $f(2)$  und  $f(10)$  sein, d. h.  $f(2)$  UND  $f(10)$  MÜSSEN EINEN GEMEINSAMEN NACHBARN IM GRAPHEN BESITZEN.

Dass dies für jede beliebige Wahl von  $(f(3), f(7), f(9), f(11))$  als Permutation der Punkte  $(3, 7, 9, 11)$  so ist, ist allerdings ÜBERHAUPT NICHT KLAR und muss deshalb als **erster Teil der** obenstehenden **Behauptung** bewiesen werden:

Dazu bedienen wir uns eines Tricks. – Wir zeichnen die 14 Ecken des Graphen als Teile eines regulären Tetraeders auf, und zwar 3, 7, 9, 11 als Ecken des Tetraeder, 2, 10, 8, 12, 4, 6 als Kanten des Tetraeders, 1, 5, 13 als Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten des Tetraeders und 0 als Mittelpunkt des Tetraeders, und zwar so, dass zwei dieser Teile des Tetraeders sich genau dann treffen, wenn im ursprünglichen Graphen eine Kante zwischen ihnen lag (siehe Bild):



Wie wir in Teil **a**) gesehen haben, bestimmt jede der 24 Permutationen der Eckpunkte 3, 7, 9, 11 eindeutig eine (der 24) Symmetrien des Tetraeders, und bei einer Symmetrie des Tetraeders werden Kanten in Kanten, Verbindungen von Mittelpunkten gegenüberliegender Kanten in ebensolche Verbindungen und der Mittelpunkt des Tetraeders in den Mittelpunkt abgebildet, und die Bilder von Teilen, die sich vorher geschnitten haben, schneiden sich auch wieder, d. h. jede Symmetrie des Tetraeders liefert uns eine Symmetrie des Graphen, die den Mittelpunkt 0 auf den Mittelpunkt 0 abbildet. Das war, was wir zeigen wollten. □

**Beispiel:** Nehmen wir die Permutation

$$f(3) = 7, f(7) = 9, f(9) = 3, f(11) = 11,$$

**Siehe nächstes Blatt!**

entspricht sie einer Drehung des Tetraeders um  $120^\circ$ , für die dann gilt:  
 $f(2) = 8, f(8) = 4, f(4) = 2, f(10) = 12, f(12) = 6, f(6) = 10,$   
 $f(1) = 13, f(13) = 5, f(5) = 1$  und  $f(0) = 0$ .

3. a) **Abgeschlossenheit:**  $T_{a,b} \circ T_{c,d} = T_{ac,ad+b}$  liegt wieder in  $\text{Aff}(K)$  wegen

$$T_{a,b} \circ T_{c,d}(x) = a(cx + d) + b = (ac)x + (ad + b) \quad \forall x \in K$$

und da  $ac \neq 0$ .

**Assoziativität:** Die Assoziativität von  $(\text{Aff}(K), \circ)$  ist offensichtlich erfüllt, weil die Elemente von  $\text{Aff}(K)$  Funktionen sind, und die Verknüpfung  $\circ$  von Funktionen assoziativ ist.

Alternativ kann man die Assoziativität aber auch durch Rechnung zeigen:

$$\begin{aligned} (T_{a,b} \circ T_{c,d}) \circ T_{e,f} &= T_{(ac)e, (ac)f + (ad+b)} \\ &= T_{ace, acf + ad + b} \\ &= T_{a(ce), a(cf + d) + b} \\ &= T_{a,b} \circ (T_{c,d} \circ T_{e,f}) \end{aligned}$$

**Neutrales Element** ist  $T_{1,0}$ , denn  $T_{1,0}$  ist als Funktion die identische Abbildung:

$$T_{1,0}(x) = 1 \cdot x + 0 = x \quad \forall x \in K$$

Alternativ kann man natürlich auch rechnen:

$$\begin{aligned} T_{1,0} \circ T_{a,b} &= T_{1 \cdot a, 1 \cdot b + 0} = T_{a,b} \\ T_{a,b} \circ T_{1,0} &= T_{a \cdot 1, a \cdot 0 + b} = T_{a,b} \end{aligned}$$

**Inverses Element zu gegebenem  $T_{a,b}$ :**

Zu lösen wäre  $T_{c,d} \circ T_{a,b} = T_{1,0}$  (bzw.  $T_{a,b} \circ T_{c,d} = T_{1,0}$ ), d. h.:

$$\begin{aligned} ca = 1 & \quad \text{und} \quad cb + d = 0 \\ \iff c = a^{-1} & \quad \text{und} \quad d = -a^{-1}b \end{aligned}$$

Das inverse Element zu  $T_{a,b}$  ist  $T_{a^{-1}, (-a^{-1}b)}$

( $a^{-1}$  existiert und liegt in  $K^\times$ , weil  $a \neq 0$  vorausgesetzt wurde.)

Es gilt auch  $T_{a,b} \circ T_{a^{-1}, -a^{-1}b} = T_{aa^{-1}, a(-a^{-1}b) + b} = T_{1,0}$

**Bemerkung:** Es ist übrigens nicht schwer zu zeigen, dass  $\text{Aff}(K)$  eine nicht-abelsche Gruppe ist, sobald der Körper  $K$  mehr als zwei Elemente hat.

b) 
$$T_{a,b} \circ T_{c,d} = T_{ac,ad+b}$$

$\circ$	$T_{1,0}$	$T_{2,0}$	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$
$T_{1,0}$	$T_{1,0}$	$T_{2,0}$	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$
$T_{2,0}$	$T_{2,0}$	$T_{1,0}$	$T_{2,2}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{1,1}$
$T_{1,1}$	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{1,0}$	$T_{2,0}$
$T_{2,1}$	$T_{2,1}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$	$T_{1,0}$	$T_{2,2}$	$T_{1,2}$
$T_{1,2}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{1,0}$	$T_{2,0}$	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$
$T_{2,2}$	$T_{2,2}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$	$T_{1,0}$

**Bemerkung:** In  $\mathbb{F}_3$  ist es meist günstiger, statt mit 2 mit dem äquivalenten Wert  $(-1)$  zu rechnen.

4. **Bemerkung:** Dies ist weder die unaufwendigste noch die eleganteste Lösung dieser Aufgabe.

$(A, v) \mapsto Av$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Der Orbit des Punktes  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

Der Orbit jedes anderen Punktes  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  (mit  $x \neq 0$  oder  $y \neq 0$ ) besteht aus allen Punkten ausser  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ : 
$$\text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b)

$$\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{GL}_2(\mathbb{F}_2),$$

$$\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Aus der zweiten Gleichung folgt:  $x = 4y + 3$   
 Einsetzen in die erste Gleichung ergibt:  $5y = -3$

Bitte wenden!

Siehe nächstes Blatt!

i) In  $\mathbb{Q}$  besitzt das Gleichungssystem eine Lösung, die man auch mittels Cramerscher Regel berechnen kann:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{5}$$

ii) In  $\mathbb{Z}_5$  ergibt die Gleichung  $5y = -3$  den Widerspruch  $0 \cdot y = 0 = -3$ .  
In  $\mathbb{Z}_5$  ist das Gleichungssystem somit nicht lösbar.

iii)  $5y = -3$  ist in  $\mathbb{Z}_{11}$  zu lösen. Wegen

$$-3 = 11 - 3 = 8 = 11 + 8 = 19 = 11 + 19 = 30 = 5 \cdot 6$$

ist diese Aufgabe äquivalent zur Lösung von  $5y = 5 \cdot 6$ .

Da 5 und 11 teilerfremd sind, darf man durch 5 kürzen:

$$\begin{aligned} y &= 6 \\ x &= 4 \cdot 6 + 3 = 27 = 5. \end{aligned}$$

Man kann diese Aufgabe auch mittels Cramerscher Regel lösen (siehe oben), da  $\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{F}_{11}$  ein Körper ist:

$$x = \frac{3}{5} = \frac{3 - 3 \cdot 11}{5} = -\frac{30}{5} = -6 = 5, \quad y = -\frac{3}{5} = -(-6) = 6.$$