Musterlösung Serie 5

1. a) Erzeugende Funktionen der

Äpfel: $\mathrm{a}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$
Orangen: $\mathrm{o}(x) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots = \frac{x}{1-x^2}$
Birnen: $\mathrm{b}(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots = \frac{1}{1-x^3}$
Grapefruits: $\mathrm{g}(x) = 1 + x + x^2$
Papayas: $\mathrm{p}(x) = 1 + x$
Mangos: $\mathrm{m}(x) = 1 + x$

Erzeugende Funktion des Früchtekorbs:

$$\begin{aligned}
\mathrm{k}(x) &= \mathrm{a}(x) \cdot \mathrm{o}(x) \cdot \mathrm{b}(x) \cdot \mathrm{g}(x) \cdot \mathrm{p}(x) \cdot \mathrm{m}(x) \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot (1+x+x^2) \cdot (1+x)^2 \\
&= \frac{x \cdot (1+x+x^2) \cdot (1+x)^2}{(1-x) \cdot (1-x)(1+x) \cdot (1-x)(1+x+x^2)} \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \\
&= (x+x^2)(1-x)^{-3} \\
&= (x+x^2) \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2}{\ell} x^\ell \\
&= (x+x^2) \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2}{2} x^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2}{2} x^{\ell+1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2}{2} x^{\ell+2} \\
&= \binom{0+2}{2} x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} \right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} \right) x^n
\end{aligned}$$

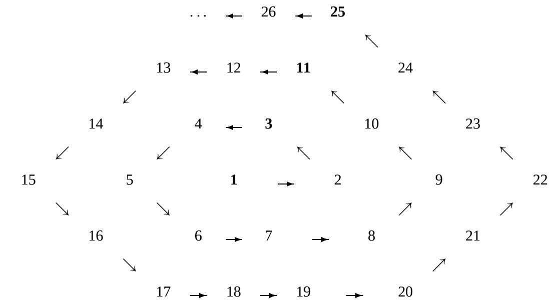
Bitte wenden!

Koeffizient vor x^n:

$$[x^n]\,\mathrm{k}(x) = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2 \qquad (\text{für } n \geq 1)$$

Der Fruchtkorb lässt sich auf n^2 verschiedene Arten füllen.

b)



$$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 11,\ a_3 = 25, \ldots.$$

Um (für $n \geq 1$) von a_{n-1} nach a_n zu gelangen, geht man in der Spirale nacheinander

- $(n-1)$ Schritte nach links,
- $(n-1)$ Schritte nach links–unten,
- $(n-1)$ Schritte nach rechts–unten,
- n Schritte nach rechts,
- $(n-1)$ Schritte nach rechts–oben und
- n Schritte nach links–oben,

also **insgesamt** $4(n-1) + 2n = 6n - 4$ Schritte. Das ergibt $a_n - a_{n-1} = 6n - 4$, also die Rekursionsformel

$$a_n = a_{n-1} + 6n - 4 \qquad (n \geq 1), \qquad a_0 = 1\,.$$

Die erzeugende Funktion

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Siehe nächstes Blatt!

erfüllt dementsprechend:

$$\begin{aligned}
a(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + 6n - 4)\, x^n \\
&= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 6x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' - 4 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= 1 + x a(x) + 6x \left(\frac{x}{1-x} \right)' - 4 \frac{x}{1-x} \\
&= 1 + x a(x) + 6x \frac{1}{(1-x)^2} - 4 \frac{x}{1-x} \\
&= x a(x) + \frac{(1-x)^2 + 6x - 4x(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= x a(x) + \frac{1+5x^2}{(1-x)^2} \\
(1-x) a(x) &= \frac{1+5x^2}{(1-x)^2} \\
a(x) &= \frac{1+5x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Potenzreihenentwicklung:

$$\begin{aligned}
a(x) &= \frac{1+5x^2}{(1-x)^3} \\
&= (1+5x^2)(1-x)^{-3} \\
&= (1+5x^2) \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2}{2} x^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2}{2} x^\ell + \sum_{\ell=0}^{\infty} 5 \binom{\ell+2}{2} x^{\ell+2} \\
&= \binom{0+2}{2} + \binom{1+2}{2} x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\binom{n+2}{2} + 5 \binom{n}{2} \right) x^n
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$\begin{aligned}
a_n &= [x^n] a(x) \\
&= \binom{n+2}{2} + 5 \binom{n}{2} \qquad (\text{für } n \geq 2) \\
&= 3n^2 - n + 1 \\
a_{26} &= 3 \cdot 26^2 - 26 + 1 \;=\; \mathbf{2003}
\end{aligned}$$

Bemerkung: In diesem Fall könnte man a_n auch direkt aus der Rekursionsformel berechnen:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (6k - 4) \\
&= 1 + 6 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) - 4 \cdot n \;=\; 1 + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 4 \cdot n \;=\; 1 - n + 3n^2 \,.
\end{aligned}$$

2. a) Die (formale) Ableitung der formalen Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lautet

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Bemerkung: Bei richtigen Potenzreihen ist dieses gliedweise Ableiten der Potenzreihe nur für Werte x erlaubt, die innerhalb des Konvergenzradius der Potenzreihe liegen.

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt:

$$\begin{aligned}
& x^2 y'(x) + (x-1) y(x) + 1 \\
= {} & x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 \\
= {} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 \\
= {} & \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 \\
= {} & 1 - a_0 - a_1 x + a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1) a_{n-1} + a_{n-1} - a_n \right) x^n \\
= {} & (1 - a_0) + (a_0 - a_1) x + \sum_{n=2}^{\infty} (n a_{n-1} - a_n)\, x^n
\end{aligned}$$

Diese Potenzreihe soll 0 sein, d. h. all ihre Koeffizienten müss(t)en gleich 0 sein.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad a_0 &= 1 \\
a_1 &= a_0 \;=\; 0 \\
a_n &= n a_{n-1} \qquad \text{für alle } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies ist die rekursive Definition der Fakultät. $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = n!}$

Bemerkung: Die formale Potenzreihe lautet also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.
Diese Potenzreihe hat allerdings Konvergenzradius 0 und definiert damit keine Funktion. Die eigentlichen Lösungen der gegebenen Differentialgleichung sind Funktionen, die im Nullpunkt $x_0 = 0$ nicht analytisch sind, also um Null nicht in eine Potenzreihe entwickelbar sind.

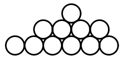
b)

$$
\begin{aligned}
F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \ldots &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} \\
F_0 - F_1 x + F_2 x^2 \mp \ldots &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n (-x)^n = \frac{-x}{1-(-x)-(-x)^2} = \frac{-x}{1+x-x^2} \\
F_1 x + F_3 x^3 + F_5 x^5 + \ldots &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x-x^2} - \frac{-x}{1+x-x^2}\right) \\
&= \frac{x}{2} \cdot \frac{(1+x-x^2)+(1-x-x^2)}{(1-x^2)^2 - x^2} \\
&= \frac{x(1-x^2)}{1-3x^2+x^4} \\
F_1 + F_3 x^2 + F_5 x^4 + \ldots &= \frac{1-x^2}{1-3x^2+x^4} \\
F_1 + F_3 x + F_5 x^2 + \ldots &= \frac{1-x}{1-3x+x^2}
\end{aligned}
$$

Die erzeugende Funktion der Folge F_1, F_3, F_5 der Fibonaccizahlen mit ungeraden Indizes lautet $\dfrac{1-x}{1-3x+x^2}$.

Bitte wenden!

3. a) $f_n =$ Anzahl Arrangements mit n Münzen in der untersten Zeile



Behauptung $\quad f_n = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (n-i)\, f_i \qquad (n \geq 1)$

Beweis Die Anzahl i der Münzen in der Zeile direkt über der untersten Zeile kann gleich $0, 1, \ldots, (n-1)$ sein.
Falls i gleich 0 ist, gibt es nur die unterste Zeile (und nur **1** Arrangement).
Falls $1 \leq i \leq n-1$ ist, kann die zweite Zeile an einer der $(n-i)$ vorderen Lücken über den Münzen der untersten Zeile beginnen. (Würde die zweite Zeile später beginnen, würde sie rechts „überhängen“.) Für die Anordnung der Münzen über der zweiten Zeile (aus i Münzen) gibt es nach Definition f_i Möglichkeiten, also zusammen mit der Wahl des „Anfangspunktes“ der zweiten Zeile $\mathbf{(n-i)f_i}$ Möglichkeiten.
Zusammen ergibt das, wie behauptet,

$$f_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, f_i$$

Möglichkeiten. $\square$

Siehe nächstes Blatt!

b) Erzeugende Funktion: $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x^n$

Aus der Rekursionsgleichung folgt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, f_i\right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, f_i x^n \qquad (1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x^{n-i} \cdot f_i x^i \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k x^k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} f_\ell x^\ell\right) \qquad \text{(Faltungsformel)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right) \cdot f(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right) \cdot f(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' \cdot f(x) \\
&= \frac{x}{1-x} + x \left(\frac{x}{1-x}\right)' f(x) \\
f(x) &= \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} f(x) \\
\Rightarrow \quad (1-x)^2 f(x) &= x(1-x) + x f(x) \\
(1-3x+x^2) f(x) &= x - x^2 \\
f(x) &= \frac{x-x^2}{1-3x+x^2} = x \cdot \frac{1-x}{1-3x+x^2}
\end{aligned}$$

Glücklicherweise ähnelt die erzeugende Funktion $f(x)$ dem Ergebnis von **2.b)**, weshalb wir sofort schliessen können, dass f_n die Fibonaccizahlen mit ungeradem Index sind:

$$f_n = F_{2(n-1)+1} = F_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \right) \quad \text{für } n \geq 1$$

Bitte wenden!

Bemerkung: Es gibt noch einen **alternativen**, etwas längeren **Weg,** (1) **auszuwerten**, indem man die Summationen über n und i vertauscht:
Der innere Summationsindex i in (1) durchläuft alle positiven Zahlen, und n muss bei gegebenem i grösser als i sein: $n-1 \geq i \iff n \geq i+1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, f_i x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i+1}^{\infty} (n-i)\, f_i x^n \\
&= \frac{x}{1-x} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_i \cdot \sum_{n=i+1}^{\infty} (n-i) x^n \right)
\end{aligned}$$

Auswertung der inneren Summe:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=i+1}^{\infty} (n-i) x^n &= \sum_{n=i+1}^{\infty} (n x^n - i x^n) \\
&= x \sum_{n=i+1}^{\infty} n x^{n-1} - i \sum_{n=i+1}^{\infty} x^n \\
&= x \left(\sum_{n=i+1}^{\infty} x^n\right)' - i \sum_{n=i+1}^{\infty} x^n \\
&= x \left(\frac{x^{i+1}}{1-x}\right)' - i\, \frac{x^{i+1}}{1-x} \\
&= \frac{(i+1)x^{i+1}}{1-x} + \frac{x^{i+2}}{(1-x)^2} - \frac{i x^{i+1}}{1-x} \\
&= \frac{x^{i+1}}{1-x} + \frac{x^{i+2}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)x^{i+1} + x^{i+2}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^{i+1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Zurück zur Auswertung von $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1-x} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_i \cdot \sum_{n=i+1}^{\infty} (n-i) x^n \right) \\
&= \frac{x}{1-x} + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{x^{i+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} f_i x^i \\
&= \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die übrige Rechnung verläuft wie beim ersten Lösungsweg.

4. **Bemerkung:** Man sollte anmerken, dass unabhängig davon, ob man erst eine Permutation der Zeilen $r \in R$ und dann eine Permutation der Spalten $c \in C$ ausführt oder ob man zuerst c und dann r ausführt, das gleiche Ergebnis (die gleiche Vertauschung der Elemente der Matrix) herauskommt. (Das ist nicht selbstverständlich!) Deshalb ist es in Ordnung, ein Element der Gruppe g als Paar (r, c) zu schreiben; und die Wirkung von $g = (r, c)$ besteht aus nacheinanderfolgender Anwendung von r und c, ohne dass man die Reihenfolge von r und c spezifizieren muss.

$G = R \times C$ enthält $2! \cdot 3! = 12$ Elemente.

$g \in G = R \times C$ Paar (Perm. d. Zeilen,Perm. d. Spalten	Fixpkte. X^g	Anzahl $\lvert X^g \rvert$	total
(id, id)	$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$	2^6	64
((12), id)	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$	2^3	8
(id, (12)) oder (id, (13)) oder (id, (23))	$\begin{pmatrix} x & x & * \\ y & y & * \end{pmatrix}$	$2^4 = 16$	$\times 3 = 48$
((12), (12)) od. ((12), (13)) od. ((12), (23))	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$	$2^3 = 8$	$\times 3 = 24$
(id, (123)) oder (id, (132))	$\begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \end{pmatrix}$	$2^2 = 4$	$\times 2 = 8$
((12), (123)) oder ((12), (132))	$\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$	2	$\times 2 = 4$
			$64 + 8 + 48 + 24 + 8 + 4 = 156$

Nach Cauchy–Frobenius gibt es $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{156}{12} = 13$ Orbits.

Bemerkung: Für allgemeines n ist die Anzahl der Orbits gleich $\frac{(n+1)(n+3)(2n+7)}{24} + \frac{1+(-1)^n}{16}$

5. Seien $P_0, \ldots, P_{n+1}$ die Ecken des $(n+2)$–Ecks, nummeriert im Uhrzeigersinn.
Über jeder Seite des $(n+2)$–Ecks muss eines der n Teildreiecke liegen. Z. B. ist das Dreieck, das über der Seite $\overline{P_{n+1}P_0}$ liegt, eindeutig durch die Angabe seiner dritten Ecke P_k bestimmt, die einer der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sein muss.
Wenn jetzt $P_{n+1}P_0P_k$ eines der Teildreiecke der „Triangulierung" ist, muss man noch die beiden übrigen Polygone, das $(k+1)$–Eck $P_0P_1 \ldots P_k$ und das $(n-k+2)$–Eck $P_kP_{k+1} \ldots P_{n+1}$ in Dreiecke teilen. Hierfür gibt es $\Delta_{k-1} \cdot \Delta_{n-k}$ Möglichkeiten; nach Summation über $k = 1, \ldots, n$:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k-1} \cdot \Delta_{n-k} \qquad (n \geq 1) \tag{$*$}$$

Der Rekursionsanfang ist $\Delta_0 = 1$ (bzw. $\Delta_1 = 1$).

Bitte wenden!

Aus $(*)$ ergibt sich für die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n \, x^n \\
&= \Delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k-1} \cdot \Delta_{n-k} \cdot x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k-1} \cdot \Delta_{n-k} \cdot x \cdot x^{k-1} \cdot x^{n-k} \\
&= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k-1} \, x^{k-1} \cdot \Delta_{(n-1)-(k-1)} \, x^{(n-1)-(k-1)} \\
&= 1 + x \sum_{(n-1)=0}^{\infty} \sum_{(k-1)=0}^{n-1} \Delta_{k-1} \, x^{k-1} \cdot \Delta_{(n-1)-(k-1)} \, x^{(n-1)-(k-1)} \\
&= 1 + x \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{n'} \Delta_{k'} \, x^{k'} \cdot \Delta_{n'-k'} \, x^{n'-k'} \\
&= 1 + x \cdot \Delta(x) \cdot \Delta(x) \qquad \text{(Faltungsformel)}
\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $\Delta(x)$:

$$x\Delta(x)^2 - \Delta(x) + 1 = 0 \tag{$**$}$$

mit den beiden Lösungen $\Delta(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$, von denen aber nur

$$\Delta(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} ,$$

die Bedingung $\Delta(0) = \Delta_0 = 1$ erfüllt, da:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}} = 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

Potenzreihenentwicklung von $\Delta(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$:

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \frac{x^{-1}}{2}\left(1-(1-4x)^{1/2}\right) \\
&= \frac{x^{-1}}{2}\left(1-\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{\ell}(-4x)^{\ell}\right) \qquad \text{(Binomische Reihe)} \\
&= -\frac{x^{-1}}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{\ell}(-4x)^{\ell} \\
&= -\frac{x^{-1}}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-(\ell-1)\right)}{\ell\cdot(\ell-1)\cdot\ldots\cdot 1}(-1)^{\ell}2^{2\ell}x^{\ell} \\
&= -\frac{x^{-1}}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ell}}\cdot\frac{1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(3-2\ell)}{\ell}(-1)^{\ell}2^{2\ell}x^{\ell} \\
&= \frac{x^{-1}}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\ell-3)}{\ell!}2^{\ell}x^{\ell} \\
&= \frac{x^{-1}}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\ell-3)}{\ell!}\cdot\frac{(2\ell-2)\cdot(2\ell-4)\cdot\ldots\cdot 2}{(\ell-1)\cdot(\ell-2)\cdot\ldots\cdot 1}2x^{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(2\ell-2)!}{(\ell-1)!\cdot\ell!}x^{\ell-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n}\,.
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\Delta_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$