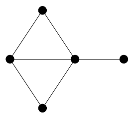
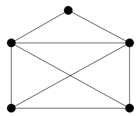
Musterlösung Serie 6

1. a)

i)



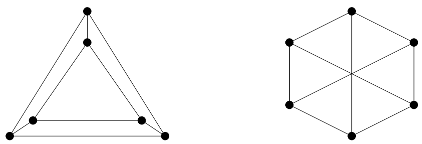
iii)



ii) Wir haben 5 Ecken, aber eine davon soll 5 Nachbarn haben. Das ist nicht möglich.

iv) In jedem Graph gibt es eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades. Hier sind 3 Ecken mit ungeradem Grad angegeben. So ein Graph ist also nicht möglich.

v) Hier sind zwei 3-reguläre, aber nicht–isomorphe Graphen. — Der linke Graph besitzt 2 Dreiecke, während der rechte keine Dreiecke enthält.



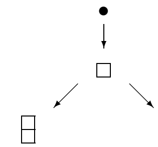
(Gleiche Knotengrade sind zwar notwendig für Isomorphie, aber nicht hinreichend.)

b) Ecken vom Grad 0 und $(n-1)$ schliessen einander aus. Mögliche Eckengrade sind also nur $0, \ldots, (n-2)$ oder $1, 2, \ldots, (n-1)$, in jedem Fall nur $(n-1)$ verschiedene bei n Ecken. Damit müssen nach dem Schubfachprinzip zwei der n Ecken gleichen Grad haben.

Bitte wenden!

2. Die Pfeile bitte nicht beachten!

G_3:

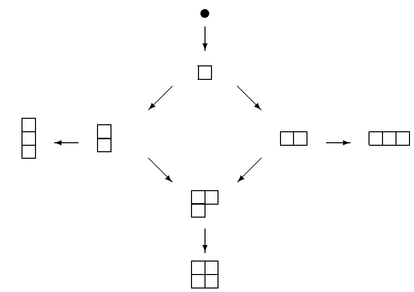


Jeder Automorphismus von G_3 muss $\square$ (als einzige Ecke vom Grad 3) festhalten; und umgekehrt besteht die Automorphismengruppe von G_3 gerade aus den 6 Permutationen der anderen drei Ecken $\bullet$, $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$, $\square\square$. In Zyklenschreibweise:

$$\mathrm{Aut}(G_3) = \left\{\mathrm{id},\ (\bullet\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\ \square\square),\ (\bullet\ \square\square\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}),\ (\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\ \square\square),\ (\bullet\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}),\ (\bullet\ \square\square)\right\}$$

$\mathrm{Aut}(G_3)$ ist damit isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 und zur Diedergruppe D_3, zur Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks.

G_4:



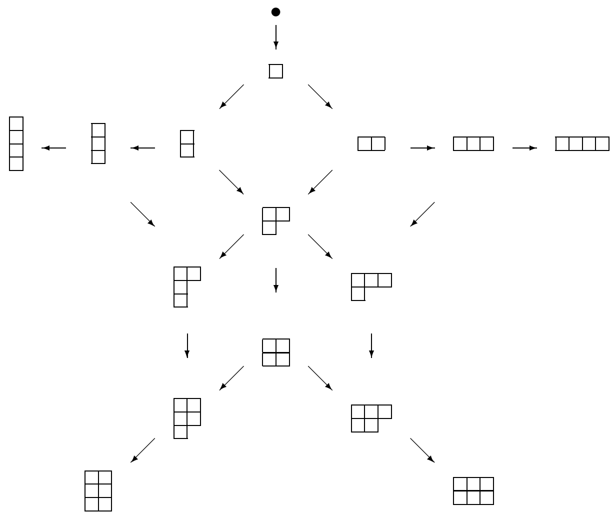
Die Ecken $\square$, $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$, $\square\square$, $\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}$ haben jeweils Grad 3, die Ecken $\bullet$, $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$, $\square\square\square$, $\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}$ haben Grad 1. Die Elemente der Automorphismengruppe von G_4 sind damit eindeutig dadurch bestimmt, dass man angibt, auf welche der vier Ecken vom Grad 3 die Ecke $\square$ abgebildet wird und auf welchen der beiden Nachbarecken vom Grad 3 dieser Ecke die Nachbarecke $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ von $\square$ abgebildet wird. Umgekehrt bestimmt auch jede dieser 8 Wahlen eine Symmetrie von G_4.

$\mathrm{Aut}(G_4)$ ist damit isomorph zur Diedergruppe D_4, zur Symmetriegruppe des Quadrats. In Zyklenschreibweise:

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(G_4) = \Big\{&\mathrm{id},\ (\square\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}\ \square\square)(\bullet\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}\ \square\square\square),\\
&(\square\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix})(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\ \square\square)(\bullet\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix})(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\ \square\square\square),\ (\square\ \square\square\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix})(\bullet\ \square\square\square\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}),\\
&(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\ \square\square)(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\ \square\square\square),\ (\square\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix})(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}\ \square\square)(\bullet\ \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix})(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}\ \square\square\square),\\
&(\square\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix})(\bullet\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}),\ (\square\ \square\square)(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix})(\bullet\ \square\square\square)(\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix})\Big\}\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

G_5**:**



Aus dem Diagramm erkennt man, dass $\mathrm{Aut}(G_5)$ isomorph zur Diedergruppe D_5, zur Symmetriegruppe des regulären Fünfecks, ist und damit aus 10 Elementen besteht.

ALLE G_N sind 2-färbbar (insbesondere auch G_5). — Man färbt diejenigen Ecken, welche Diagrammen mit gerader Anzahl Boxen ($\square$) entprechen, mit der 1. Farbe und diejenigen Ecken, welche Diagrammen mit ungerader Anzahl Boxen entprechen, mit der 2. Farbe. Keine Kante $\{\lambda, \lambda^+\}$ verbindet dann Ecken gleicher Farbe, weil sich die Zahl der Boxen von λ und λ^+ um 1 unterscheidet.

3. a) Behauptung *Es gibt genau dann eine Abbildung*

$$f : C_n \to C_m$$

der Kreisgraphen, wenn

- *n gerade ist oder*
- *n und m beide ungerade sind und $m \leq n$.*

Beweis Der Kreisgraph C_n ($n \geq 3$) kann definiert werden als $C_n = (V_n, E_n)$ mit

$$\begin{aligned} V_n &= \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ E_n &= \left\{ \{u, v\} \in \binom{\mathbb{Z}_n}{2} \mid u - v = 1 \text{ oder } u - v = -1 \pmod n \right\} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

- Falls n gerade ist, definiere $f : C_n \to C_m$ z. B. durch

$$f(u) := \begin{cases} u \pmod m & \text{für } u \in \{0, 1, \ldots, \frac{n}{2}\} \\ n - u \pmod m & \text{für } u \in \{\frac{n}{2}, \ldots, n\} \end{cases}$$

- Falls n ungerade ist und m gerade, gibt es keine Abbildung $f : C_n \to C_m$. Dies kann man daran erkennen, dass C_m 2-färbbar ist (m gerade!), und wenn eine Abbildung $f : C_n \to C_m$ existieren würde, auch C_n 2-färbbar sein müsste (indem man jeder Ecke u in C_n diejenige Farbe gibt, die $f(u)$ in C_m hat), was „n ungerade" widerspricht.
- Falls n ungerade ist und $m > n$, gäbe es mindestens eine Ecke von $v \in C_m$, die nicht das Bild einer Ecke C_n unter der Abbildiung $f : C_n \to C_m$ wäre. f wäre damit eine Abbildung von C_n in den Kreisgraphen ohne diese Ecke, $C_m - \{v\} := (V_m - \{v\}, E_m)$, der isomorph zum Weggraphen P_{m-1} ist:

$$f : C_n \to P_{m-1}(\subset C_m).$$

  Da P_{m-1} 2-färbbar ist, würde die Abblidung f (wie im vorhergehenden Punkt „n ungerade & m gerade") eine 2-Färbung auf C_n induzieren, was einen Widerspruch zu „n ungerade" ergibt.
- Falls n und m ungerade sind und $m \leq n$ definiere $f : C_n \to C_m$ z. B. durch

$$f(u) := \begin{cases} u \pmod m & \text{für } u \in \{0, 1, \ldots, \frac{n+m}{2}\} \\ n + m - u \pmod m & \text{für } u \in \{\frac{n+m}{2}, \ldots, n\} \end{cases}$$

$\square$

b) i) Es sind genau diejenige Kanten eines Graphen *Brücken*, die *in keinem Kreis des Graphen enthalten sind*. — Ist eine Kante $\{u, v\}$ keine Brücke, so existiert im restlichen Graphen ein Weg von u nach v, der sich zusammen mit der Kante $\{u, v\}$ zu einem Kreis schliesst; ist umgekehrt eine Kante $\{u, v\}$ eine Brücke, so kann sie in keinem Kreis enthalten sein, denn dieser würde die beiden Komponenten des Restgraphen verbinden.
Damit ist in einem Graph genau dann jede Kante eine Brücke, wenn keine Kante auf einem Kreis liegt, d. h., wenn der Graph keine Kreise enthält, d. h., wenn der Graph *ein Baum* ist.

ii) Angenommen G enthielte eine Brücke $e = \{u, v\}$. Dann würde $(V, E - \{e\})$ in zwei disjunkte Teilgraphen zerfallen:

$$(V, E - \{e\}) = G_u \sqcup G_v \quad \text{mit } u \in V(G_u) \text{ und } v \in V(G_v).$$

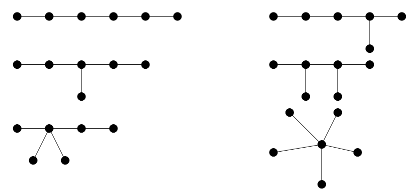
G_u (und G_v) hätte(n jeweils) genau eine Ecke ungeraden Grades, nämlich u, was im Widerspruch steht zu

$$\sum_{x \in V(G_u)} \deg(x) = 2|E(G_u)|.$$

Siehe nächstes Blatt!

(Alternativer Lsungsweg) Wenn alle Ecken eines zusammenhngenden Graphen geraden Grad haben, existiert ein *geschlossener Eulerweg* im Graphen, d. h. ein geschlossener Weg, der jede Kante genau einmal durchluft. Lscht man jetzt eine Kante des Weges, kann man alle Punkte des Graphen immer noch ber den brig bleibenden Teil des Eulerweges erreichen. Also kann die gelschte Kante keine Brcke sein.

4. **a)** **Bemerkung:** Systematisch löst man die Aufgabe, indem man rekursiv alle Bäume mit 2, 3, 4, 5 und dann 6 Ecken konstruiert, wobei man für jede zusätzliche Ecke eine neue Kante anfügt.



b) Eckenfolge: $\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

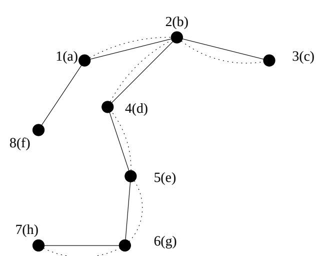
Bemerkung: Einfache (und ungenügende) Antwort: Der Baum besitzt $1 + \ldots + 1$ Blätter.

Ist der Graph ein Baum, so muss die Anzahl seiner Ecken, $k + 8$, um 1 grösser sein als die Anzahl seiner Kanten, $\frac{k \cdot 1+2+3+4+5+6+7+8+9}{2} = \frac{k+44}{2}$, also:

$$\begin{aligned} k + 8 &= \tfrac{k+44}{2} + 1 \\ k &= 30\,. \end{aligned}$$

Der Baum besitzt genau 30 Blätter (Ecken vom Grad 1).

5. **a)** Bezeichnet man die Zeilen der Inzidenzmatrix B, d. h. die Ecken des Graphen, mit den Buchstaben (a), (b), (c),..., (h), kann man mittels DFS–Algorithmus z. B. den folgenden Baum erhalten:



Bitte wenden!

b) **Falls der Algorithmus abbricht und G zusammenhängend ist, ist das Ergebnis ein aufspannender Baum.** DFS fügt stets Kanten zu noch unnummerierten Nachbarn ein, erzeugt also sicher keine Kreise. Das Ergebnis von DFS ist damit ein Baum in G.
Angenommen, dieser Baum T ist nicht aufspannend, sei also etwa die Ecke v nicht in T. Betrachte einen Weg in G, der die Anfangsecke 1 mit v verbindet. Auf diesem Weg gibt es eine Kante $k = (w_1, w_2)$ mit $w_1 \in T$, aber $w_2 \notin T$. Zu einem gewissen Zeitpunkt ist w_1 nummeriert worden und aktuelle Ecke gewesen. Da der Algorithmus nicht wegen "$r = \#$ Ecke" abgeschlossen wurde, muss w_1 (auf dem Weg zurück nach 1) ein letztes Mal aktuelle Ecke gewesen sein. Dort hätte w_2 als nicht nummerierter Nachbar von w_1 in den Baum gelangen müssen.

Falls der Algorithmus abbricht und G nicht zusammenhängend ist, produziert DFS einen aufspannenden Baum der Zusammenhangskomponente von 1. Der Algorithmus muss daher wegen Rückkehr zur Anfangsecke abgebrochen worden sein, da ja "$r = \#$ Ecken" nicht erreicht werden konnte.

Der Algorithmus bricht nach ENDLICH VIELEN **Schritten ab,** weil es eine Grösse gibt, die in jedem Schritt *streng* monoton zunimmt, aber als Werte nur endlich viele ganze Zahlen annehmen kann. Eine solche Grösse ist z. B.

$$(\text{Anzahl aller Ecken von } G) \cdot r - i\ ,$$

wobei r die Anzahl der schon nummerierten Ecken bezeichnet und i die Nummer der aktuellen Ecke.