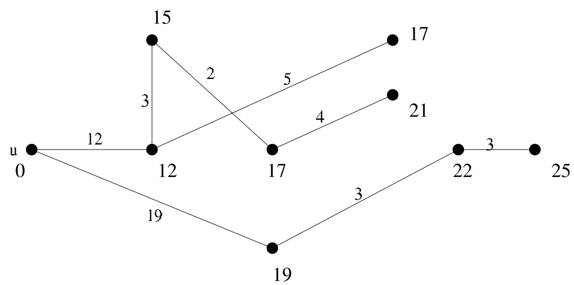
Musterlösung Serie 7

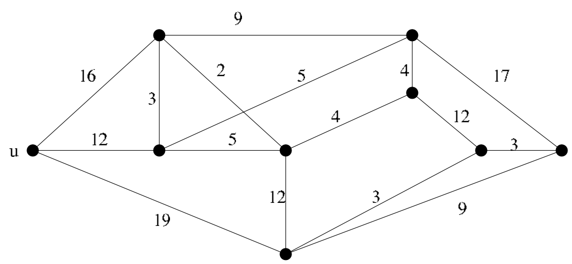
1. a) Die berechnenten Werte $d(v)$ entsprechen den Längen der kürzesten Wege von u nach v.

Bemerkung: Bei sorgfältigerer Anwendung liefert der Dijkstra–Algorithmus noch zusätzlich zu jeder Ecke v einen kürzesten Weg von u nach v.

b) Im nachfolgende Teilgraphen wurden die Werte $d(v)$ an die jeweiligen Ecken v geschrieben:



Zum Vergleich der Originalgraph:



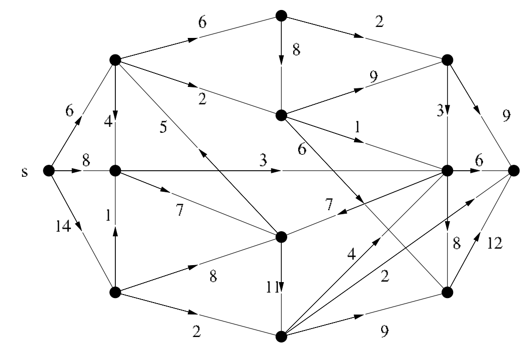
Bemerkung: Die eingezeichneten Kanten des obenstehenden Teilgraphen stellen eine Auswahl „kürzester Verbindungen" zwischen u und den anderen Ecken dar.

c) Der Dijkstra-Algorithmus für gerichtete Graphen $\overrightarrow{G} = (V, A)$ verläuft völlig analog zu dem für ungerichtete Graphen:

$d(u) := 0$
$d(v) := \infty$ für alle $v \in V - \{u\}$
$U := V$
`while` $U \neq \emptyset$ `do`
    `begin`
    wähle ein $v \in U$ mit $d(v)$ minimal
        für alle $v' \in U$ mit $a := \overrightarrow{(v, v')} \in A$ setze
        $d(v') := \min(d(v'), d(v) + w(a))$
    $U := U - \{v\}$
    `end`

Bitte wenden!

2.



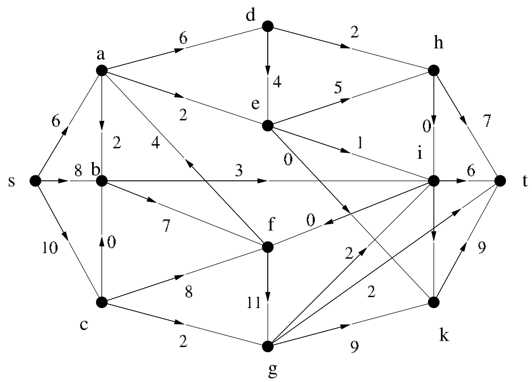
Start mit dem 0-Fluss, f=0
Vergrössere diesen sukzessiv entlang zunehmender Wege, z. B. wie folgt
(für die Bezeichnung der Ecken siehe den Lösungsgraphen am Ende der Aufgabe):

zunehmender Weg	Fluss f nach Hinzunahme des Weges
sadht	2
scgkt	4
sabit	7
saeit	8
sbfgkt	15
scfadeht	19
scfgit	21
scfgt	23
sbaeht	24

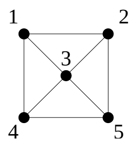
Der Schnitt $\{s, c, b, a, f\}\{g, e, d, h, i, k, t\}$ hat Kapazität 24.
Damit ist der konstruierte Fluss maximal.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung:



3.



a) Färbe zuerst 3 mit einer Farbe. — z Möglichkeiten.
1,2,4,5 sind dann mit den restlichen $(z-1)$ Farben zu färben.

Fallunterscheidung:

1. Fall: 1 und 5 werden gleich gefärbt. — $(z-1)$ Möglichkeiten.
Für die Färbung von 2 und 4 gibt es dann noch je $(z-2)$ Möglichkeiten.
Insgesamt: $z(z-1)(z-2)^2$ Färbungen mit z Farben.

2. Fall: 1 und 5 werden verschieden gefärbt. — $(z-1)(z-2)$ Möglichkeiten.
2 und 4 dürfen dann jeweils diese beiden Farben auch nicht annehmen.
— Je $(z-1-2)=(z-3)$ Möglichkeiten.
Insgesamt: $z(z-1)(z-2)(z-3)^2$ Färbungen mit z Farben.

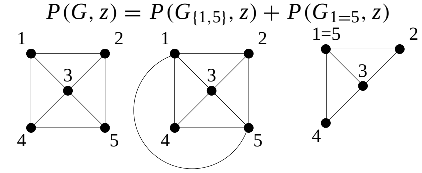
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} P(G,z) &= z(z-1)(z-2)^2 + z(z-1)(z-2)(z-3)^2 \\ &= z(z-1)(z-2)\left((z-2)+(z-3)^2\right) \\ &= z(z-1)(z-2)(z^2-5z+7) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Der Radgraph lässt sich z. B. durch Hinzunahme der Kanten $\{1,5\}$ und $\{2,4\}$ zum vollständigen Graphen K_5 ergänzen.

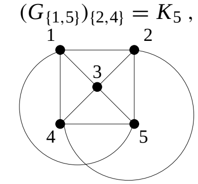
Hinzunahme der Kante $\{1,5\}$:

$$P(G,z) = P(G_{\{1,5\}},z) + P(G_{1=5},z)$$



Hinzunahme der Kante $\{2,4\}$:

$$(G_{\{1,5\}})_{\{2,4\}} = K_5\ ,$$

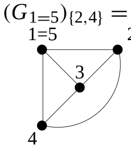


$(G_{\{1,5\}})_{2=4} = K_4$ (Bild analog zu $(G_{\{1,5\}})_{2=4} = K_4$ weiter unten)

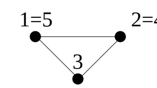
$$\begin{aligned} P(G_{\{1,5\}},z) &= P((G_{\{1,5\}})_{\{2,4\}},z) + P((G_{\{1,5\}})_{2=4},z) \\ &= P(K_5,z) + P(K_4,z) \\ &= z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4) + z(z-1)(z-2)(z-3) \end{aligned}$$

Hinzunahme der Kante $\{2,4\}$ zum Graphen $G_{1=5}$:

$(G_{1=5})_{\{2,4\}} = K_4$



$(G_{1=5})_{2=4} = K_3$

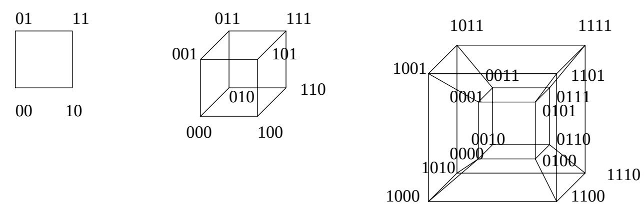


$$\begin{aligned} P(G_{1=5},z) &= P((G_{1=5})_{\{2,4\}},z) + P((G_{1=5})_{2=4},z) \\ &= P(K_4,z) + P(K_3,z) \\ &= z(z-1)(z-2)(z-3) + z(z-1)(z-2) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad P(G,z) &= P(G_{\{1,5\}},z) + P(G_{1=5},z) \\
&= z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4) + z(z-1)(z-2)(z-3) \\
&\qquad + z(z-1)(z-2)(z-3) + z(z-1)(z-2) \\
&= z(z-1)(z-2)\left((z-3)(z-4) + 2(z-3) + 1\right) \\
&= z(z-1)(z-2)(z^2 - 5z + 7)
\end{aligned}
$$

4. **a)**



b) Die Anzahl der Kanten von Q_n beträgt $n \cdot 2^{n-1}$.

Ecken von Q_n sind Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \{0,1\}$.
Kanten $\{(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\}$ sind genau diejenigen Verbindungen von Ecken, für die x_i und y_i an genau einer Stelle i verschieden sind (d. h. einmal 0 und einmal 1).
Für die Wahl dieser Stelle gibt es n Möglichkeiten. Für die Wahl der Werte übrigen $n-1$ Stellen, die in $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ gleich sind, gibt es danach je 2 Möglichkeiten (jeweils 0 oder 1).
Insgesamt: $\quad n \cdot \underbrace{2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$ Möglichkeiten (= Anzahl Kanten)

□

c) Vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang $n = 2$**:** Klar. —
Ein möglicher Hamilton–Weg ist $00 \to 01 \to 11 \to 10 \to 00$.

Induktionsschritt von $(n-1)$ **auf** $n > 2$**:** Q_{n-1} findet sich zweimal als vollständiger Teilgraph in Q_n wieder: Einmal, wenn man Q_n auf die Eckenmenge

$$V_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \{0,1\} \text{ mit } x_n = 0\}$$

einschränkt, und zum anderen, wenn man Q_n auf die Menge der übrigen Ecken

$$V_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \{0,1\} \text{ mit } x_n = 1\}$$

einschränkt. — Es gibt zwei Abbildungen von Q_{n-1} in Q_n,

$$
\begin{array}{llcll}
\Phi_0 : & V(Q_{n-1}) & \to & V_0 \subset V(Q_n) & \\
& (x_1, \ldots, x_{n-1}) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) & \quad \text{und} \\
\Phi_1 : & V(Q_{n-1}) & \to & V_1 \subset V(Q_n) & \\
& (x_1, \ldots, x_{n-1}) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)\,, &
\end{array}
$$

die den Würfelgraphen Q_{n-1} jeweils isomorph auf seine Bilder $\Phi_0(Q_{n-1})$ bzw. $\Phi_1(Q_{n-1})$ abbilden.
Zusätzlich sind Φ_0 und Φ_1 auch so definiert, dass für alle v die Ecken $\Phi_0(v)$ und $\Phi_1(v)$ eine Kante in Q_n gemeinsam haben.
Nach Induktionsvoraussetzung ist Q_{n-1} Hamiltonsch, d. h., es existiert ein geschlossener Weg

$$v_1 = (0,0,\ldots,0) \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_{2^{n-1}} \to v_1 = (0,0,\ldots,0)$$

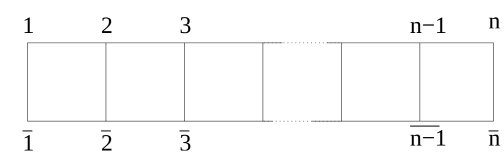
in Q_{n-1}, der jede Ecke genau einmal durchläuft.
Dann stellt

$$
\begin{array}{lcl}
\Phi_0(v_1) = (0,0\ldots,0,0) & \to \Phi_0(v_2) \to \cdots \to \Phi_0(v_{2^{n-1}}) \to & \Phi_0(v_{2^{n-1}}) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\Phi_1(v_1) = (0,0\ldots,0,1) & \to \Phi_1(v_2) \to \cdots \to \Phi_1(v_{2^{n-1}}) \to & \Phi_1(v_{2^{n-1}})
\end{array}
$$

einen Hamiltonweg in Q_n dar.
Also ist Q_n auch Hamiltonsch. □

Bemerkung: Stichwort *Gray–Code*.

5. Bezeichne a_n die Anzahl der Matchings des Gittergraphen $G_{2,n}$.



- $$\boxed{a_0 = 1}$$
- Für $n = 1$ gibt es nur Kante, $\{1, \bar{1}\}$, also auch nur ein vollständiges Matching:

$$\boxed{a_1 = 1}$$

Bitte wenden!

Siehe nächstes Blatt!

- Falls $n \geq 2$ ist, hat die Ecke n genau zwei Nachbarecken, $(n-1)$ und $\bar{n}$, mit denen sie verbunden ist.

  1. Fall: Die Kante $\{n, \bar{n}\}$ gehört zum Matching.
  In diesem Fall muss der Rest des Matchings ein (vollständiges) Matching des vollständigen Teilgraphen $G_{2,n-1}$ mit den Ecken $1, \ldots, n-1, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}$ bilden, der wieder ein Gittergraph ist.
  Hierfür gibt es a_{n-1} Möglichkeiten.

  2. Fall: Die Kante $\{n-1, n\}$ gehört zum Matching.
  In diesem Fall muss die Ecke $\bar{n}$ für das Matching mit ihrer übrigbleibenden Nachbarecke $\overline{n-1}$ gepaart werden.
  Der Rest des Matchings muss ein (vollständiges) Matching des vollständigen Teilgraphen $G_{2,n-2}$ der übrigen Ecken $1, \ldots, n-2, \bar{1}, \ldots, \overline{n-2}$ bilden, der auch wieder ein Gittergraph ist.
  Hierfür gibt es a_{n-2} Möglichkeiten.

  $\Rightarrow$ $$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2}$$

$\Rightarrow$ a_n erfüllt die Rekursionsbeziehung der Fibonacci–Zahlen, aber mit verschobenen Anfangswerten: $a_0 = F_1 = 1$, $a_1 = F_2 = 1$.

$\Rightarrow$ $$a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$