DISKRETE MATHEMATIK

Serie 1

1. Auf einer wenig bekannten Insel leben zwei Arten von Ureinwohnern. Die eine Art, genannt die Lügner, bringt keinen Satz über die Lippen, der nicht gelogen wäre. Die andere Art, genannt die Wahrheitsager, lügt nie.

a) Zeigen Sie, dass kein Ureinwohner behaupten kann, ein Lügner zu sein.

b) Sie kommen an einer Hütte vorbei und stellen dem dort wohnhaften Ehepaar die Frage, ob sie beide Lügner sind. Der Mann sagt: „Mindestens einer von uns!“ Ihnen ist hoffentlich bald klar, mit wem Sie es zu tun haben.

c) Was hätten Sie folgern können, wenn die Antwort gewesen wäre: „Wenn ich ein Wahrheitsager bin, dann lügt meine Frau auch nie.“?

d) Was können Sie aus der Antwort „Meine Frau und ich sind von derselben Art.“ schliessen?

e) Sie dürfen einem Inselbewohner eine Frage stellen, die er mit „ja“ oder „nein“ beantworten kann. Können Sie eine Frage finden, aufgrund deren Antwort man sicher angeben kann, ob ein Lügner oder ein Wahrheitsager geantwortet hat?

2. In einem Treppenhaus gibt es zwei Lichtschalter (Kippschalter), die auf die Positionen $+$ und $-$ gestellt werden können, und ein Licht, das genau dann brennt, wenn sich die beiden Lichtschalter in unterschiedlichen Positionen befinden. Wir definieren die Aussagen

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Schalter 1 ist in Position } +, \\ P_2 &= \text{Schalter 2 ist in Position } +, \\ Q &= \text{das Licht brennt.} \end{aligned}$$

Drücken Sie Q durch eine Formel in P_1 und P_2 mit den logischen Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ aus.
Finden Sie eine sinnvolle Verallgemeinerung für ein Treppenhaus mit einem Licht und drei Schaltern.

Bitte wenden!

3. Verifizieren Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln allgemeingültig sind.

a) $P \wedge (Q \vee \neg Q) \longleftrightarrow P$

b) $P \vee Q \longleftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

c) $P \vee \neg(Q \vee R) \longleftrightarrow \neg\big(\neg(\neg Q \vee P) \vee \neg(\neg R \vee P)\big)$

4. Der Peirce-Pfeil $\downarrow$ ist der Junktor, der dem umgangssprachlichen „weder noch" entspricht, also $P \downarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q beide falsch sind.

a) Zeigen Sie, dass $P \vee Q$ äquivalent ist zu $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$.

b) Finden Sie eine zu $P \wedge Q$ äquivalente Formel, in welcher als Junktor nur der Peirce-Pfeil vorkommt.

5. In einem nostalgischen Zug arbeiten ein Lokführer, ein Heizer und ein Kondukteur. Die drei heissen Keller, Müller und Schmid, aber nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge. Im Zug fahren drei Akademiker, ein Dr. Keller, ein Dr. Müller und ein Dr. Schmid.

1. Dr. Keller wohnt in Zürich.
2. Der Heizer wohnt in der Mitte zwischen Basel und Zürich.
3. Dr. Müller verdient genau CHF 8000 pro Monat.
4. Jener der drei Passagiere, der zufälligerweise Nachbar des Heizers ist, verdient genau dreimal soviel wie der Heizer.
5. Herr Schmid vom Fahrpersonal schlug kürzlich den Kondukteur im Schach.
6. Der Namensvetter des Heizers wohnt in Basel.

Aus diesen sechs Bedingungen folgt, dass der Lokführer Schmid heisst. Zeigen Sie, dass man dies nicht folgern kann, wenn bloss fünf der sechs Bedingungen vorausgesetzt werden.
[Wir erwarten nicht, dass Sie sich alle sechs Fälle überlegen. Falls Ihr Vorname mit einem Buchstaben aus der ersten Hälfte des Alphabets beginnt, so diskutieren Sie die drei Fälle, die durch Weglassen der Bedingung 1., 2. oder 3. entstehen. Anderenfalls diskutieren Sie die drei anderen Fälle.]

Abgabe: Freitag, den 8. 11. 2002, in der Vorlesungspause
bzw. bis Montag, den 11. 11. 2002, ins Postfach des Assistenten im Raum HG G 36

Siehe nächstes Blatt!

Übungsgruppeneinteilung:

	Raum	AssistentIn
A–B	ETZ E8	Alexander Adensamer
C–Ge	ETZ F91	Michele Gianella
Gh–He	ETZ G91	Thomas Ott
Ho–Kr	ETZ J91	Markus Schwyn
Ku–M	HG E3	Elisabeth Broger
N–Sa	HG E33.3	Thomas Mautsch
Sch–U	HG G26.1	David Pumberger
V–Z	ML D13	Philipp Spindler

Daten der Übungen:
1. Nov., 15. Nov., 29. Nov., 13. Dez., 10. Jan., 24. Jan., 7. Feb.

Testatbedingung: Abgabe von 5 Übungsserien
mit jeweils mindestens 75% der Aufgaben sinnvoll bearbeitet

Literatur: Als Begleitlektüre sind folgende Lehrbücher empfehlenswert:

- Discrete Mathematics (revised edition), N. L. Biggs, Oxford University Press.
- Diskrete Mathematik, M. Aigner, Vieweg.

Präsenz: Montag, Mittwoch und Donnerstag, jeweils 12–13 Uhr im Raum HG E 33.5 mit Schwerpunkt „Diskrete Mathematik“ am Montag.

WWW: `http://www.math.ethz.ch/~gruppe6/dm`
Unter dieser Adresse finden Sie auch einen Link zur Seite mit dem CAT (Feedback zur Vorlesung). Wir möchten Sie bitten, den CAT bis Mittwoch, den 30. 10. 2002, auszufüllen.