ITET
R. Suter

WS 02/03

Diskrete Mathematik

Serie 2

1. **a)** Finden Sie Beispiele für Funktionen

i) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist,
ii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

b) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ sind injektiv, welche surjektiv?

i) $x \longmapsto 1 + x$
ii) $x \longmapsto 1 + x^2$
iii) $x \longmapsto 1 + x^3$
iv) $x \longmapsto 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

c) Was ändert sich, wenn die Zuordnungsvorschriften aus **b)** reellwertige Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ definieren sollen?

2. **a)** Auf der Menge $\mathbb{Z}_{>0}$ der positiven ganzen Zahlen ist das Prädikat

$$\mathrm{Prim}(x) \ :\Longleftrightarrow \ \text{„}x \text{ ist eine Primzahl“}$$

mithilfe der Prädikate

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{|}(x, y) \ &:\Longleftrightarrow \quad x | y \quad (\text{„}x \text{ teilt } y\text{“}) \\ \mathrm{P}_{=1}(x) \ &:\Longleftrightarrow \quad x = 1 \\ \mathrm{P}_{=}(x, y) \ &:\Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

zu definieren.

b) Wie lautet die Negation des Parallelenaxioms der euklidischen Geometrie „Zu jeder Gerade g in der Ebene E und zu jedem Punkt P aus E, der nicht aus g ist, gibt es genau eine Gerade h in E mit $P \in h$, die g nicht schneidet.“ ?

3. Auf der Menge $\mathbb{Z}_{>0}$ der positiven ganzen Zahlen sind die Operationen $\wedge$ und $\vee$ definiert durch

$$\begin{aligned} a \wedge b \ &:= \ \mathrm{ggT}(a, b) \qquad \text{(grösster gemeinsamer Teiler)} \\ a \vee b \ &:= \ \mathrm{kgV}(a, b) \qquad \text{(kleinstes gemeinsames Vielfaches).} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

a) Sind die Operationen $\wedge$ und $\vee$ kommutativ, assoziativ? Welche Distributivgesetze gelten? Was sind $a \wedge 1$ und $a \vee 1$?

b) i) Zeigen Sie: Genau dann gilt $a \wedge b = a$, wenn $a \vee b = b$ gilt.

ii) Allgemeiner: Was ist $(a \wedge b) \cdot (a \vee b)$?

iii) Die Relation $\leq$ sei definiert durch

$$a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \wedge b = a\ .$$

Ist $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv?

c) Für fixiertes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichne T_n die Menge aller positiven Teiler von n. Beachten Sie, dass für $a, b \in T_n$ auch $a \wedge b \in T_n$ und $a \vee b \in T_n$ gelten.

Die 1-stellige Operation $\bar{\ }: T_n \longrightarrow T_n$ sei definiert durch $\overline{a} := \frac{n}{a}$.

i) Für welche n gilt: $\forall\, a \in T_n : a \wedge \overline{a} = 1$?

ii) Für welche n gilt: $\forall\, a \in T_n : a \vee \overline{a} = n$?

iii) Skizzieren Sie die Hasse–Diagramme von T_{12} und T_{30}.

4. Sei q eine positive ganze Zahl. Wir definieren eine Relation $\equiv_q$ auf $\mathbb{Z}$ durch:

$$x \equiv_q y :\Longleftrightarrow q|(x-y)$$

a) Zeigen Sie, dass $\equiv_q$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Man definiere eine Verknüpfung auf den Äquivalenzklassen $[x]_q$ in $\mathbb{Z}$ unter der Relation $\equiv_q$ durch:

$$[x]_q + [y]_q := [x+y]_q \qquad (\star)$$

i) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung wohldefiniert ist. (Das heisst, sie hängt nicht ab von den in $(\star)$ gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklassen.)

ii) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen mit der Verknüpfung $(\star)$ eine abelsche Gruppe bilden.

5. Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer Menge M, falls

a) $|M| = 2$;

b) $|M| = 3$;

c) $|M| = 4$?

Abgabe: Freitag, den 22. 11. 2002, in der Vorlesungspause
bzw. bis Montag, den 25. 11. 2002, ins Postfach des Assistenten im Raum HG G 36

BERICHTIGUNG: Die Präsenzen finden im Raum HG **E** 33.5 statt.