ITET WS 02/03
R. Suter

DISKRETE MATHEMATIK

Serie 3

1. **a)** Auf $\mathbb{R}$ sei die binäre Operation $*$ definiert durch $r * s := rs + r + s$. Welche der Gruppenaxiome (Assoziativität, Neutralelement, Inverse) gelten bzw. gelten nicht?

b) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elementes in der (additiven) Gruppe $\mathbb{Z}_{12}$ der Restklassen modulo 12.

c) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elementes in der (multiplikativen) Gruppe $\mathbb{Z}_{24}^{\times}$ der zu 24 teilerfremden Restklassen modulo 24.

d) In einer Gruppe G gelte $g^2 = 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

e) Seien G eine Gruppe und $x, y \in G$. Zeigen Sie: $|x| = |y^{-1}xy|$.

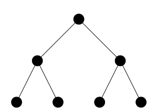
2. **a)** Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe aller Symmetrien des Tetraeders (einschliesslich Spiegelungen und Drehungen) und beschreiben Sie die Wirkungen der einzelnen Symmetrien.

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe der Rotationssymmetrien des Fussballs.

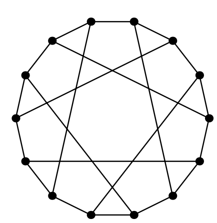
c) Die Symmetriegruppe eines Graphen besteht aus all denjenigen Bijektionen f auf der Menge der Eckpunkte des Graphen, die Kanten erhalten, d. h. für die für sämtliche Eckpunkte k und l des Graphen gilt:

$$\{k, l\} \text{ ist Kante} \iff \{f(k), f(l)\} \text{ ist Kante.}$$

Finden Sie die Ordnung der Symmetriegruppe des folgenden Graphen:



d)* Finden Sie die Ordnung der Symmetriegruppe des folgenden Graphen aus 14 Ecken und 21 Kanten:



Bitte wenden!

3. Sei K ein Körper (z. B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$ (p prim)). Für $a \in K^\times = K - \{0\}$ und $b \in K$ definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{a,b} \colon K &\to K \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: $\mathrm{Aff}(K) := \left\{ \mathrm{T}_{a,b} \;\middle|\; a \in K^\times,\ b \in K \right\}$ ist eine Gruppe (mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfungsvorschrift).

[Was ist $\mathrm{T}_{a,b} \circ \mathrm{T}_{c,d}$? Was ist das Neutralelement? Was ist $\left(\mathrm{T}_{a,b}\right)^{-1}$?]

b) Bestimmen Sie für den Spezialfall $K = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ die Gruppentafel von $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_3)$.

4. Sei K ein Körper. Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(K)$ aller invertierbaren 2×2–Matrizen mit Einträgen in K wirkt wie bei Matrizen üblich auf der Menge aller Vektoren $v = \binom{x}{y} \in K^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(K) \times K^2 &\to K^2 \\ (A, v) &\mapsto Av\,. \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir den Fall $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ hat dann Ordnung 6, und ihre Elemente sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Orbits.

b) Finden Sie die Stabilisatoren aller vier Punkte in ${\mathbb{F}_2}^2$.

5. Besitzt das folgende Gleichungssystem Lösungen in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ bzw. $\mathbb{Z}_{11}$?

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ -x + 4y &= -3 \end{aligned}$$

Lösen Sie das System gegebenenfalls.

Abgabe: Freitag, den 6. 12. 2002, in der Vorlesungspause
bzw. bis Montag, den 9. 12. 2002, ins Postfach im Raum HG G 36