ITET R. Suter

WS 02/03

DISKRETE MATHEMATIK

Serie 4

1. **a)** Die ISBN (International Standard Book Number) besteht aus zehn Ziffern, wobei die ersten neun Ziffern die Werte 0 bis 9 annehmen können und die letzte Ziffer (Prüfziffer) die Werte 0 bis 9 oder X (für 10). Ist a_i die i-te Ziffer, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{10} i a_i = 0 \,,$$

gelesen als Gleichung im Körper $\mathbb{F}_{11}$.

Können Sie eruieren, wie die fehlende Ziffer in ISBN 3–540–506?9–2 heisst?

b) Zeigen Sie, dass jede Primzahl verschieden von 2 und 5 ein Faktor unendlich vieler Zahlen der Form 111...1 (lauter Ziffern 1 in Dezimalschreibweise) ist.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst 999...9 statt 111...1.

c) Faktorisieren Sie $x^4 + 1 \in \mathbb{F}_{11}[x]$ in ein Produkt irreduzibler Polynome.

2. **a)** Beweisen Sie durch kombinatorische Überlegungen die Vandermondesche Identität:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$

b) Drücken Sie $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ durch einen Binomialkoeffizienten aus.

3. **a)** Wieviele verschiedene Monome $x^a y^b z^c$ kommen in $(x + y + z)^d$ vor, nachdem man ausmultipliziert hat?

Beispiel: In

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 \;&=\; \underline{x^3} + \underline{y^3} + \underline{z^3} + 3\underline{x^2 y} + 3\underline{x y^2} \\ &\quad + 3\underline{x^2 z} + 3\underline{x z^2} + 3\underline{y^2 z} + 3\underline{y z^2} + 6\underline{x y z}\end{aligned}$$

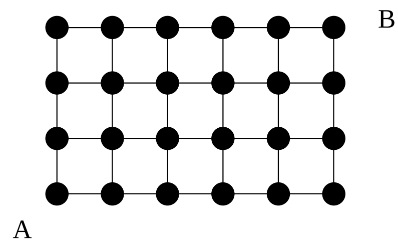
kommen 10 Monome vor.

Beantworten Sie die analoge Frage für $(x_1 + \ldots + x_n)^d$.

Bitte wenden!

b) Gegeben sei ein Rechteckgitter mit n Kanten in vertikaler und m Kanten in horizontaler Richtung.

Beispiel



n=3
m=5

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Gitterwege von A nach B, die von jedem Gitterpunkt aus entweder nach rechts oder nach oben verlaufen, gleich $\binom{m+n}{n}$ ist.

4. a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Ecken eines regelmässigen Achtecks so zu färben, dass 3 Ecken weiss und 5 Ecken schwarz gefärbt sind. Hierbei werden zwei Färbungen, die sich durch Drehungen und Spiegelungen des Achtecks ineinander überführen lassen, als gleich angesehen.

b) Auf wie viele Arten kann man (wieder bis auf Symmetrien) die Ecken eines regelmässigen Achtecks zweifarbig einfärben?

5. a) Eine Umfrage beim Lehrkörper einer Musikschule hat ergeben, dass 70% der Lehrer Klavier spielen, 60% spielen Geige, 50% spielen Waldhorn, 40% spielen Klavier und Waldhorn, 30% spielen Klavier und Geige und 20% spielen Geige und Waldhorn.

Wenn jemand behauptet, dass 15% Klavier, Geige und Waldhorn spielen, würden Sie ihm glauben?

b) Seien $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} \leq 2n$ ganze Zahlen.

Zeigen Sie, dass es $i < j$ so gibt, dass a_i ein Teiler von a_j ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung $a_k = 2^{n_k} b_k$ positiver natürlicher Zahlen in ein Produkt einer Zweierpotenz mit einer ungeraden Zahl b_k.

c) Wie viele natürliche Zahlen $\leq 1'000'000$ sind weder von der Form x^2 noch x^3 noch x^5 für natürliche Zahlen x?

Abgabe: Freitag, den 20. 12. 2002, in der Vorlesungspause
oder VORHER ins Postfach im Raum HG G 36