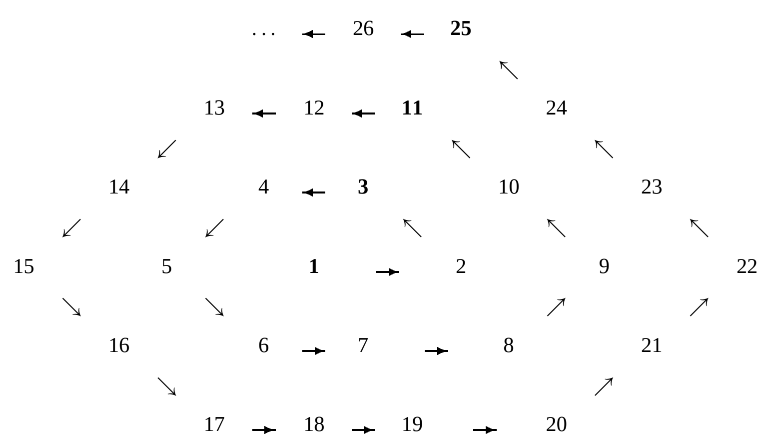
ITET   WS 02/03
R. Suter

DISKRETE MATHEMATIK

Serie 5

1. a) Auf wieviele Arten lässt sich ein Korb mit n Früchten füllen, wenn Äpfel, Orangen, Birnen, Grapefruits, Papayas und Mangos zur Auswahl stehen und die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen. Die Anzahl der Orangen ist ungerade, die Anzahl der Birnen ist durch drei teilbar. Es dürfen höchstens zwei Grapefruits, höchstens eine Papaya und höchstens eine Mango verwendet werden.

b) Die positiven ganzen Zahlen werden wie folgt spiralförmig angeordnet.



Die Zahlen der zweiten Speiche bilden die Folge a_0=1, a_1=3, a_2=11, a_3=25, ...
Finden Sie eine Rekursionsformel für diese Zahlenfolge und bestimmen Sie ihre erzeugende Funktion. Was ist a_{26}?

2. a) Die formale Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei Lösung der Differentialgleichung

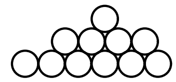
$$x^2 y'(x) + (x-1)y(x) + 1 = 0 .$$

Wie lauten die Koeffizienten a_n?

b) Die erzeugende Funktion der Folge der Fibonaccizahlen F_0, F_1, F_2, ... lautet bekanntlich $\frac{x}{1-x-x^2}$.
Wie lautet die erzeugende Funktion der Folge F_1, F_3, F_5 ... der Fibonaccizahlen mit ungeradem Index?

Bitte wenden!

3. Gleichartige Münzen werden in Zeilen angeordnet. Dabei soll jede Münze, welche sich nicht in der untersten Zeile befindet, genau zwei Münzen der tiefer gelegenen Nachbarzeile berühren. Jede Münzenzeile soll zusammenhängend sein.



a) Zeigen Sie, dass die Anzahl f_n solcher Arrangements von Münzen, die in der untersten Zeile genau $n \geq 1$ Münzen enthalten, der Rekursionsgleichung

$$f_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, f_i \qquad (n \geq 1)$$

genügt.

b) Finden Sie unter Verwendung erzeugender Funktionen eine explizite Darstellung für f_n. (**Hinweis:** Sie können das Ergebnis von Aufgabe **2.b)** benutzen.)

4. Sei X die Menge der $(2 \times n)$–Matrizen mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Seien R die Gruppe der Zeilenpermutationen und C die Gruppe der Spaltenpermutationen. Die Produktgruppe $G = R \times C$ wirkt auf der Menge X.
Bestimmen Sie für den Fall $n = 3$ die Anzahl der Orbits von G mithilfe des Lemmas von Cauchy–Frobenius.

5. Auf wieviele Arten lässt sich ein konvexes $(n+2)$–Eck durch $(n-1)$ Diagonalen, welche einander im Innern des $(n+2)$–Ecks nicht schneiden, in n Dreiecke zerlegen?

Anleitung:
Seien $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n+1}$ die Ecken des $(n+2)$–Ecks, nummeriert im Uhrzeigersinn. Über jeder Seite des $(n+2)$–Ecks muss eines der n Teildreiecke liegen. Die dritte Ecke des Dreiecks, das über der Seite $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n+1}}$ liegt, ist einer der Punkte $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$. Zeigen Sie, dass daraus für die gesuchte Anzahl Δ_n die Rekursionsformel

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k-1} \cdot \Delta_{n-k} \qquad (n \geq 1), \qquad \Delta_0 = 1 \qquad (*)$$

folgt. Leiten Sie aus $(*)$ für die erzeugende Funktion $\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n x^n$ die Gleichung

$$\Delta(x) = 1 + x\,(\Delta(x))^2 \qquad (**)$$

her. Lösen Sie die quadratische Gleichung $(**)$ und bestimmen Sie dann die gesuchten Koeffizienten Δ_n.

Abgabe: Freitag, den 17. 1. 2003, in der Vorlesungspause