ITET WS 02/03
R. Suter

DISKRETE MATHEMATIK

Serie 6

1. **a)** Welche der nachstehenden Listen sind Gradfolgen eines Graphen?

Zeichnen Sie jeweils den Graphen oder geben Sie eine kurze Begründung, warum es einen solchen Graphen nicht geben kann.

i) 1, 2, 2, 3, 4
ii) 1, 2, 2, 4, 5
iii) 2, 3, 3, 4, 4
iv) 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5
v) 3, 3, 3, 3, 3, 3

Zeigen Sie, dass im Fall v) die Gradfolge die Isomorphieklasse des Graphen nicht bestimmt.

b) Zeigen Sie, dass es in einem Graphen mit $n \geq 2$ Ecken immer zwei Ecken gibt, welche denselben Grad haben.

2. Für $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ sei der Graph $G_N = (V_N, E_N)$ mit 2^{N-1} Ecken folgendermassen definiert:

$$V_N = \left\{\text{Youngdiagramme mit Anzahl Zeilen} + \text{Anzahl Spalten} \leq N\right\}$$
$$E_N = \left\{\{\lambda, \lambda^+\} \in \tbinom{V_N}{2} \;\middle|\; \lambda^+ \text{ entsteht aus } \lambda \text{ durch Hinzufügen einer Box } \square\right\}$$

Bsp.: $V_4 = \left\{\ \ , \ydiagram{1}, \ydiagram{2}, \ydiagram{1,1}, \ydiagram{2,1}, \ydiagram{2,2}, \ydiagram{3}, \ydiagram{1,1,1}\right\}$ (leeres Diagramm nicht vergessen!).

Zeichnen Sie die Graphen G_N für $N = 3, 4, 5$, bestimmen Sie ihre Automorphismengruppen und finden Sie die chromatische Zahl von G_5.

3. **a)** Finden Sie alle Paare (n, m) mit $n, m \geq 3$, für die es eine Abbildung $C_n \to C_m$ von Kreisgraphen gibt.

b) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Eine Kante e heisst *Brücke*, falls der Graph $(V, E - \{e\})$ nicht zusammenhängend ist.

i) In welchen zusammenhängenden Graphen ist jede Kante eine Brücke? Begründen Sie Ihre Antwort.
ii) Zeigen Sie: Falls alle Eckengrade in G gerade sind, dann hat G keine Brücke.

Bitte wenden!

4. **a)** Es gibt 6 verschiedene (d. h. paarweise nicht–isomorphe) Bäume auf 6 Ecken. Zeichnen Sie diese Bäume!

b) Die Gradfolge eines Baumes T sei $1, \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Wieviele Blätter besitzt der Baum T?

5. Der folgende Algorithmus (Depth First Search) überprüft, ob ein gegebener nicht–leerer Graph zusammenhängend ist, und konstruiert in diesem Fall einen aufspannenden Baum:

1. Wähle eine beliebige Ecke als *aktuelle Ecke* und gib ihr die Nummer 1.

2. Die aktuelle Ecke habe Nummer i und es seien die Nummern $1, \ldots, r$ vergeben.

- Falls $r = \#$Ecken: STOP — Der aufspannende Baum ist konstruiert.
- Falls unnummerierte Nachbarn von i existieren, wähle eine solche Ecke aus, gib ihr die Nummer $r + 1$ und füge die Kante $\{i, r + 1\}$ ein. Nun wird $r + 1$ die aktuelle Ecke und i die *Vorgängerecke* von $r + 1$.
- Falls keine unnummerierten Nachbarn von i existieren, verfahre wie folgt: Falls $i > 1$, mache die Vorgängerecke von i zur aktuellen Ecke. Falls $i = 1$: STOP — Der Graph ist nicht zusammenhängend.

3. Iteriere **2.**

a) Konstruieren Sie einen aufspannenden Baum mithilfe des DFS-Algorithmus in dem durch nachfolgende Inzidenzmatrix B gegebenen Graphen.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir der Übersichtlichkeit halber . statt 0 geschrieben.

b) Weisen Sie die Korrektheit des Algorithmus nach.

Abgabe: Freitag, den 31. 1. 2003, in der Vorlesungspause